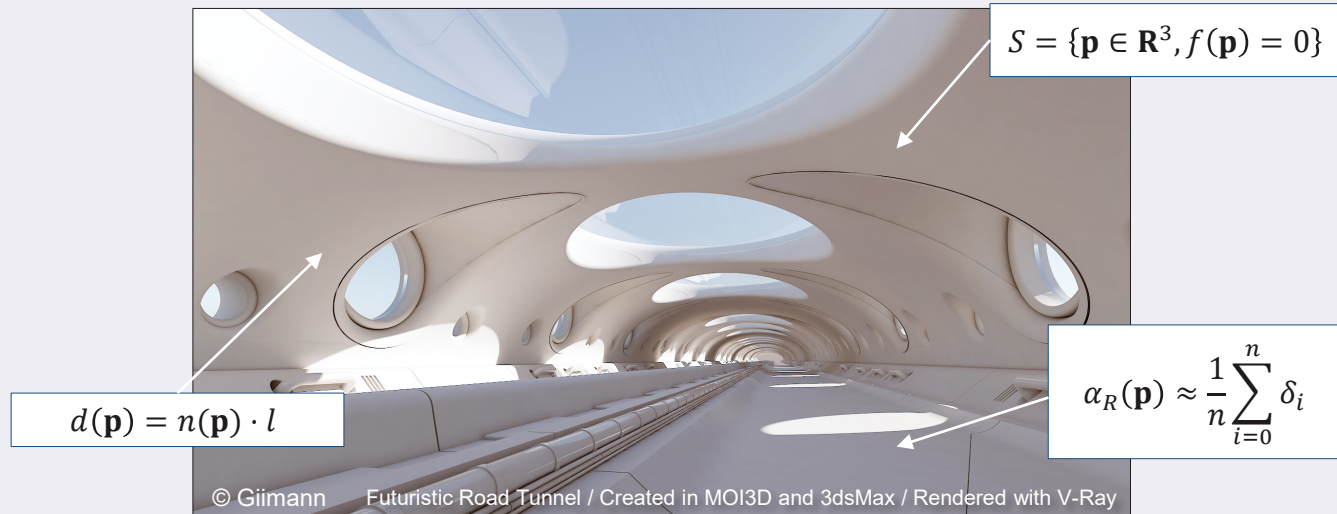


Computer Graphics

From mathematics ...



... to the screen

E. Galin
Université Lyon 1

Computer Graphics

Overview
Deformations
Curves
Surfaces

Introduction

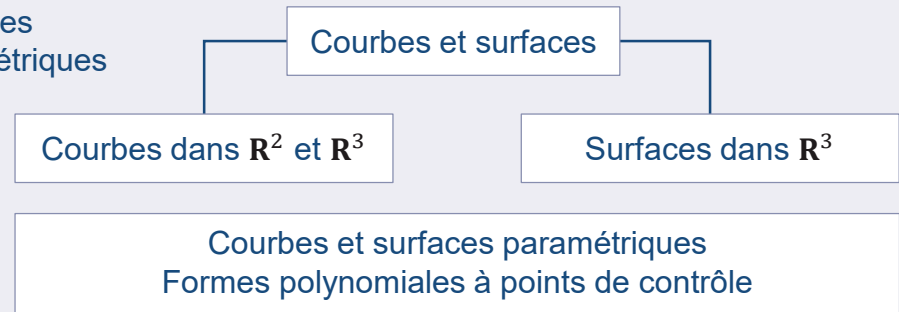
Introduction

Fundamentals

Polynomial curves

Classification

Sous catégorie de courbes et surfaces
Formes implicites, explicites, paramétriques



eric.galin@liris.cnrs.fr
<http://liris.cnrs.fr/~egalin>

Introduction

Introduction

Fundamentals

Polynomial curves

Courbes dans l'espace

Forme paramétrique ou implicite

$$C = \{\mathbf{p} = f(t) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in \Omega\}$$

Equation paramétrique

$$S = \{\mathbf{p} = f(u, v) \in \mathbb{R}^3 \mid (u, v) \in \Omega\}$$

Forme explicite

$$C = \{\mathbf{p}(x, f(x)), x \in \Omega \subset \mathbb{R}\}$$

Intersection des surfaces

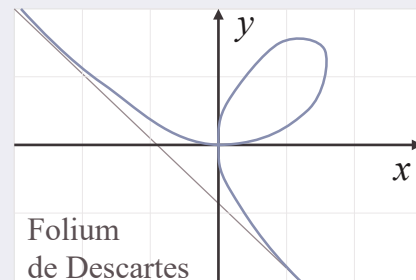
$$C = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\mathbf{p}) = 0 \wedge g(\mathbf{p}) = 0\}$$

Surfaces

$$S = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\mathbf{p}) = 0\}$$

$$S = \{\mathbf{p}(x, y, h(x, y)), (x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2\}$$

$$\mathbf{p}(t) = (3t/(1+t^3), 3t^2/(1+t^3)), t \in \mathbb{R} - \{-1\}$$
$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy = 0$$



eric.galin@liris.cnrs.fr
<http://liris.cnrs.fr/~egalain>

Computer Graphics

Fundamentals

Géométrie différentielle

Introduction

Fundamentals

Polynomial curves

Tangente

Tangente à la courbe en $\mathbf{t}(t) = \mathbf{p}'(t)$

$$\hat{\mathbf{t}}(t) = \mathbf{p}'(t) / |\mathbf{p}'(t)|$$

Vitesse v

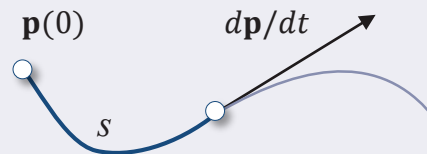
Longueur d'arc

Longueur d'arc élémentaire

$$ds = |\mathbf{p}'(t)| dt$$

Longueur d'une courbe paramétrique sur l'intervalle $[0, t]$

Point régulier de la courbe $\mathbf{p}'(t) \neq 0$



$$s = \int_0^t ds = \int_0^t |\mathbf{p}'(t)| dt$$

Normale

Vecteur (unitaire) $\hat{\mathbf{n}}$ orthogonal à \mathbf{t}

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{p}''}{|\mathbf{p}''|} = \frac{\mathbf{t}'}{|\mathbf{t}'|}$$

On définit la courbure comme

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = |\mathbf{p}''|$$



eric.galin@liris.cnrs.fr

http://liris.cnrs.fr/~egaln

Géométrie différentielle

Introduction

Fundamentals

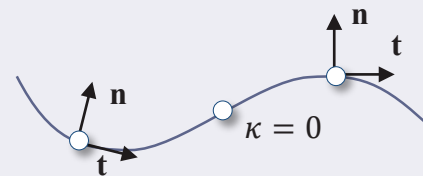
Polynomial curves

Courbes planes

Courbure signée en définissant le vecteur
Le système $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{z})$ est orthonormé
Changement de signe aux points d'inflexion

$$\mathbf{n} = \mathbf{t}^\perp$$

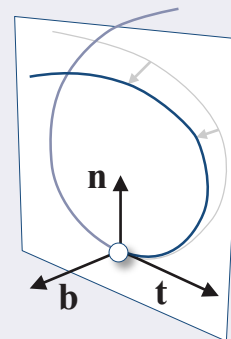
$$(x, y)^\perp = (-y, x)$$



Dans l'espace

Vecteur bi normal \mathbf{b}
Le système $(\mathbf{t}, \mathbf{b}, \mathbf{n})$ est orthonormé

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$$



Torsion

Manière dont la courbe s'écarte du plan osculateur
La dérivée de \mathbf{b} est colinéaire à \mathbf{n} ; par définition $d\mathbf{b}/ds = -\tau \mathbf{n}$
Pour une courbe de classe C^3

$$\tau = \frac{|f' f'' f'''|}{|f' \times f''|^2}$$

← Déterminant

← Produit mixte

$$|\mathbf{abc}| = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$$

$$\tau = \frac{x'''(y'z'' - y''z') + y'''(x''z' - x'z'') + z'''(x'y'' - x''y')}{(y'z'' - y''z')^2 + (x'z'' - x''z')^2 + (x'y'' - x''y')^2}$$



eric.galin@liris.cnrs.fr

http://liris.cnrs.fr/~egalain

Computer Graphics

Polynomial curves

Courbes de Bézier

- Introduction
- Fundamentals
- Polynomial curves

Bases

Base de Bernstein $B_{k,n}$

Courbe d'approximation passant par les points de contrôle extrémaux

$$\mathbf{p}(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k$$

Base canonique

$$\mathbf{p}(t) = \sum_{k=0}^n a_k B_{k,n}(t)$$

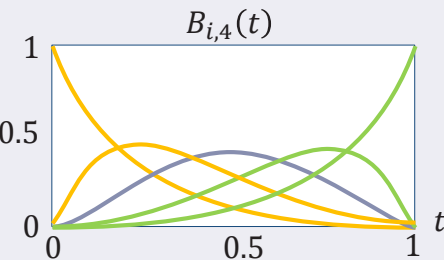
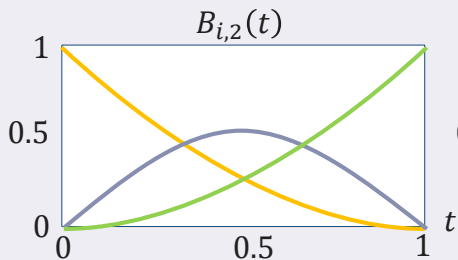
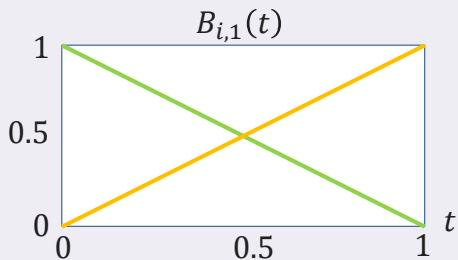
Base de Bernstein

$$B_{k,n}(t) = C_n^k t^k (1-t)^{n-k}$$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Accélération par table pré calculée

```
int binomials[5][5] = {
    { 1, 0, 0, 0, 0 },
    { 1, 1, 0, 0, 0 },
    { 1, 2, 1, 0, 0 },
    { 1, 3, 3, 1, 0 },
    { 1, 4, 6, 4, 1 };
```



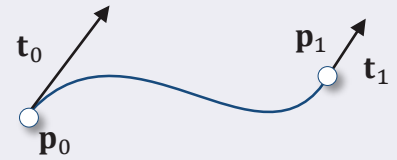
eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Hermite Cubiques Splines

- Introduction
- Fundamentals
- Polynomial curves

Formulation

Courbe cubique d'interpolation
Raccords entre cubiques de classe C^1
Contraintes de position \mathbf{p}_i et de tangente \mathbf{t}_j

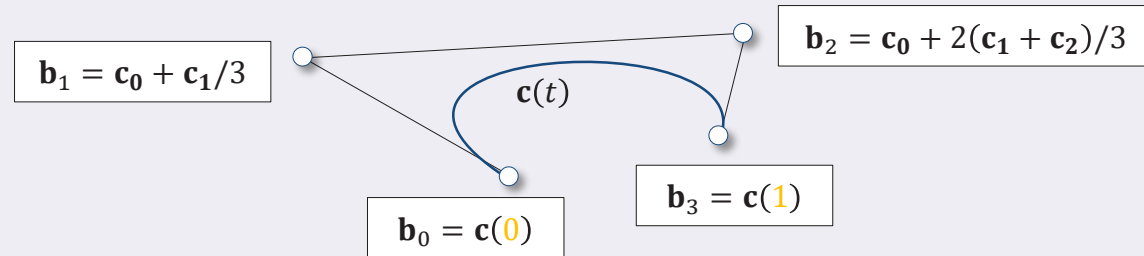


$$\mathbf{p}(u) = (2u^3 - 3tu^2 + 1)\mathbf{p}_0 + (u^3 - 2u^2 + u)\mathbf{t}_0 + (2u^3 - 3u^2)\mathbf{p}_1 + (u^3 - u^2)\mathbf{t}_1$$

$$\mathbf{p}(u) = \mathbf{p}_0 + u\mathbf{t}_0 + u^2(-3\mathbf{p}_0 - 2\mathbf{t}_0 + 3\mathbf{p}_1 - \mathbf{t}_1) + u^3(2\mathbf{p}_0 + \mathbf{t}_0 - 2\mathbf{p}_1 + \mathbf{t}_1)$$

Problème inverse

Points de contrôle de Bézier \mathbf{b}_k , $k \in [0,3]$ d'une cubique $\mathbf{c}(t)$



Cubiques par morceaux

Introduction

Fundamentals

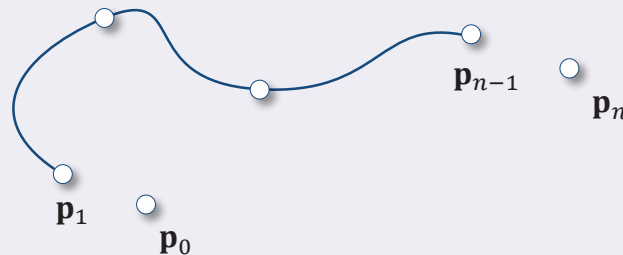
Polynomial curves

Catmull–Rom Spline

Cubique par morceaux, tangente selon les points \mathbf{p}_k de paramètres u_k

$$\mathbf{t}_k = \frac{\mathbf{p}_{k+1} - \mathbf{p}_{k-1}}{u_{k+1} - u_{k-1}}$$

Simplifie en $\mathbf{t}_k = \mathbf{p}_{k+1} - \mathbf{p}_{k-1}$ si $u_k = k$

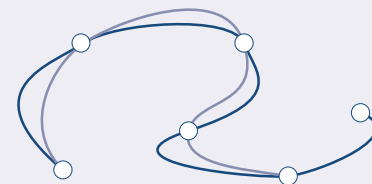


Kochanek–Bartels Spline

Cubiques, tangentes selon des paramètres de tension τ , continuité χ et biais β

$$\mathbf{t}_k = \frac{(1-\tau)(1+\beta)(1+\gamma)}{2}(\mathbf{p}_k - \mathbf{p}_{k-1}) + \frac{(1-\tau)(1-\beta)(1-\gamma)}{2}(\mathbf{p}_{k+1} - \mathbf{p}_k)$$

$$\mathbf{t}_{k+1} = \frac{(1-\tau)(1+\beta)(1-\gamma)}{2}(\mathbf{p}_{k+1} - \mathbf{p}_k) + \frac{(1-\tau)(1-\beta)(1+\gamma)}{2}(\mathbf{p}_{k+2} - \mathbf{p}_{k+1})$$



eric.galin@liris.cnrs.fr

<http://liris.cnrs.fr/~egalain>

D. Kochanek, H. Bartels. Interpolating splines with local tension, continuity, and bias control. *Proceedings of Siggraph*, 33-41, 1984.

Approximation de cubique en quadriques

Introduction

Fundamentals

Polynomial curves

Cubiques

Les courbes cubiques peuvent être coûteuses [Truong 2020]

Calculer $d(\mathbf{p}, \Gamma)$ requiert la résolution d'une équation de degré 5

Approximation de Γ par deux quadriques Q selon un terme de contrôle γ

Par défaut, $\gamma = 1/2$

Compute $\mathbf{b}_i, i \in [0,3]$ the Bézier control points of Γ

Define the new mid control points

$$\mathbf{q}_1 = \mathbf{b}_0 + 3/2 \gamma (\mathbf{c}_1 - \mathbf{b}_0)$$

$$\mathbf{q}_3 = \mathbf{b}_3 - 3/2 (1 - \gamma) (\mathbf{b}_3 - \mathbf{b}_2)$$

$$\mathbf{q}_2 = (1 - \gamma) \mathbf{q}_1 + \gamma \mathbf{q}_3$$

Two Bézier quadrics $Q(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)$ and $Q(\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3, \mathbf{q}_4)$



eric.galin@liris.cnrs.fr

<http://liris.cnrs.fr/~egalin>

N. Truong, C. Yuksel and L. Seiler. Quadratic Approximation of Cubic Curves. *ACM Computer Graphics and Interactive Techniques*, 2020.

Longueur d'arc

Introduction

Fundamentals

Polynomial curves

Définition

Intégrale de la norme de la dérivée

Pas de solution analytique si $C \in \mathbf{R}^n[t]$, $n \geq 3$

Approximation de l'intégrale par somme

Quadriques

Solution analytique

Jusqu'à 25 × plus rapide qu'une somme

$$l = \int_0^1 \|\mathbf{p}'(t)\| dt$$

Forme $\mathbf{p}'(t) = a_2 t^2 + a_1 t + a_0$
pour une quadrique

$$l = |a_2| \left[u \sqrt{u^2 + k} + k \ln(u + \sqrt{u^2 + k}) \right]^{1+d}$$

$$k = \frac{a_2^2 a_1^2 - (a_2 \cdot a_1)^2}{4 a_2^4}$$

$$d = \frac{a_2 \cdot a_1}{2 a_2^2}$$



eric.galin@liris.cnrs.fr
<http://liris.cnrs.fr/~egalin>

Computer Graphics

Supplementary material

Courbes d'interpolation

Introduction

Fundamentals

Polynomial curves

Polynômes de Lagrange

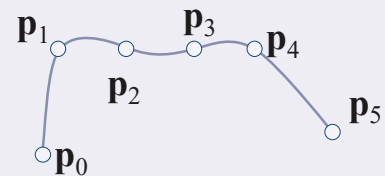
Courbe polynomiale satisfaisant des contraintes de position

$$\mathbf{p}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{p}_i l_i(t)$$

$$l_i(t) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{t - t_j}{t_i - t_j}$$

Degré élevé lorsque n augmente, oscillations

Changements de la forme lors de l'ajout de points



eric.galin@liris.cnrs.fr

<http://liris.cnrs.fr/~egalain>