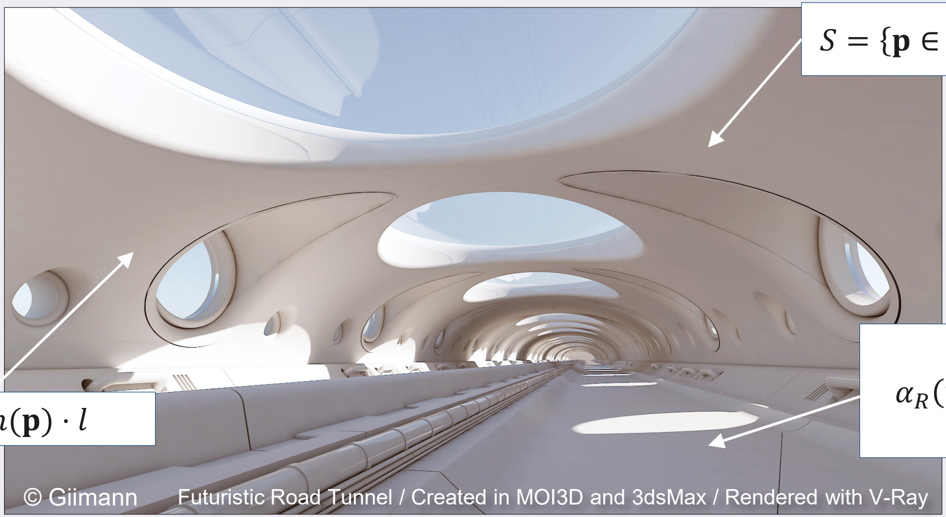
Computer Graphics

From mathematics …

$$S = \{\mathbf{p} \in \mathbf{R}^3, f(\mathbf{p}) = 0\}$$



© Giimann Futuristic Road Tunnel / Created in MOI3D and 3dsMax / Rendered with V-Ray

$$d(\mathbf{p}) = n(\mathbf{p}) \cdot l$$

$$\alpha_R(\mathbf{p}) \approx \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} \delta_i$$

… to the screen

E. Galin

Université Lyon 1

Computer Graphics

Overview

Deformations

Curves

Surfaces

Computer Graphics

Fundamentals

Université Claude Bernard Lyon 1

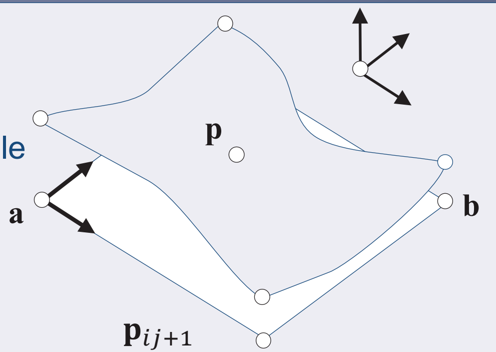
eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Surfaces d'élévation

Patch de **Monge**

Equation de type $z = h(x, y)$ où $(x, y) \in [x_\mathbf{a}, x_\mathbf{b}] \times [y_\mathbf{a}, y_\mathbf{b}]$

Paramétrage équivalent sur $(u, v) \in [0,1]^2$ par changement de variable



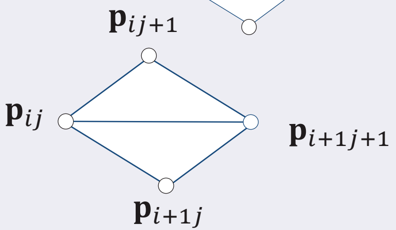
$$\begin{aligned} x &= x \\ y &= y \\ z &= h(x, y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= (1-u)x_\mathbf{a} + u x_\mathbf{b} \\ y &= (1-v)y_\mathbf{a} + v y_\mathbf{b} \\ z &= h(u, v) \end{aligned}$$

Discrétisation régulière

Génération d'un maillage de n^2 sommets et de $2(n-1)^2$ triangles

Tableau de sommets $\mathbf{v}$



For $i \in [0, n-1]$
    For $j \in [0, n-1]$
        $u = i/(n-1)$ and $v = j/(n-1)$
        Calculate x, y, and $z = h(u, v)$
        Set $\mathbf{v}[i\,n + j]$ to $\mathbf{p}_{ij} = (x, y, z)$

Géométrie G

For $i \in [0, n-2]$
    For $j \in [0, n-2]$
        Add triangles as integer triples
        $i\,n + j, (i+1)\,n + j, (i+1)\,n + j + 1$
        $i\,n + j, (i+1)\,n + j + 1, i\,n + j + 1$

Topologie T

Courbure

Analyse des surfaces d'élévation

Patch de Monge $\mathbf{p}(x,y) = \big(x, y, h(x,y)\big)$ où $(x,y) \in \Omega \subset \mathbf{R}^2$

Dérivées partielles successives

$$\boxed{\kappa = \frac{h_{xx}h_{yy} - h_{xy}^2}{1 + h_x^2 + h_y^2}}$$

Courbure Gaussienne

$$\boxed{\mu = \frac{(1 + h_y^2)h_{xx} - 2h_x h_y h_{xy} + (1 + h_x^2)h_{yy}}{2\left(1 + h_x^2 + h_y^2\right)^{3/2}}}$$

Courbure moyenne

Université Claude Bernard Lyon 1

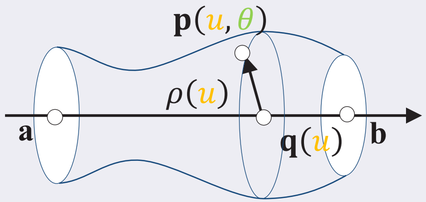
eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Surfaces de révolution

Surfaces de révolution

Courbe $\Gamma: \mathrm{r} = \rho(u)$, $u \in [0,1]$ et révolution autour d'un axe

Paramétrage sur $u \in [0,1]$



$$\mathbf{q}(u) = (1-u)\mathbf{a} + u\,\mathbf{b}$$
$$\mathbf{p}(u,\theta) = \mathbf{q}(u) + \rho(u)\,(\cos\theta\,\mathbf{x} + \sin\theta\,\mathbf{y})$$

Paramétrisation rationnelle alternative

$$\frac{1-v^2}{1+v^2}\mathbf{x} + \frac{2v}{1+v^2}\mathbf{y}$$

Discrétisation régulière

Génération de m sommets le long de l'axe, n points par cercle

Total de $m\,n$ sommets et $2(m-1)(n-1)$ triangles

For $i \in [0, m-1]$
- $u = i/(n-1)$
- Calculate $\mathbf{q}$
- For $j \in [0, n-1]$
  - Let $\theta = 2j\pi/(n-1) \in [0,2\pi]$
  - Set $\mathbf{v}[i\,n + j]$ to $\mathbf{p}(\theta)$

Géométrie G

Extrusion

Balayage d'un contour le long d'une courbe directrice

eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Tensor Product Surfaces

Surfaces de Bézier

Carreaux

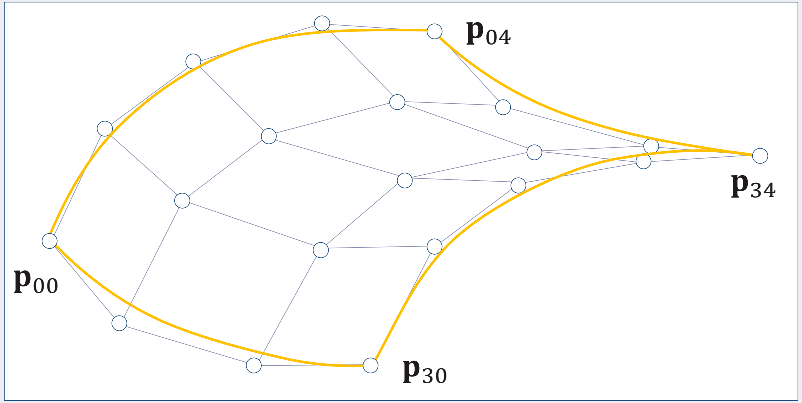
Surface produit tensoriel sur la base des polynômes de Bernstein

Points de contrôle $\mathbf{p}_{ij}$

$(u,v) \in [0,1]^2$

$$\mathbf{p}(u,v) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} B_i^m(u) B_j^n(v)\, \mathbf{p}_{ij}$$

$$B_i^m(u) = C_m^i\, u^i\, (1-u)^{m-i}$$



Carreau de degré 3×4

Propriétés

Enveloppe convexe

Enveloppe englobante $S \subset C(\mathbf{p}_{ij}) \subset B(\mathbf{p}_{ij})$

Normale

$$\mathbf{n}(u,v) = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial v}(u,v)$$

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u}(u,v) = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n} m\left(\mathbf{p}_{i+1j} - \mathbf{p}_{ij}\right) B_i^{m-1}(u) B_j^n(v)$$

Université Claude Bernard Lyon 1

eric.galin@liris.cnrs.fr

http://liris.cnrs.fr/~egalin

Surfaces de Bézier

Discrétisation régulière

Même algorithme que pour un patch de Monge
Génération d'un maillage de n^2 sommets et de $2(n-1)^2$ triangles
Tableau de sommets $\mathbf{v}$

```
For i ∈ [0, n − 1]
    For j ∈ [0, n − 1]
        u = i/(n − 1) and v = j/(n − 1)
        Calculate p(u, v)
        Set v[i n + j] to p(u, v)
```

Géométrie G

```
For i ∈ [0, n − 2]
    For j ∈ [0, n − 2]
        Add triangles as integer triples
        i n + j, (i + 1) n + j, (i + 1) n + j + 1
        i n + j, (i + 1) n + j + 1, i n + j + 1
```

Topologie T

Discrétisation adaptative

Raffinement progressif selon la courbure

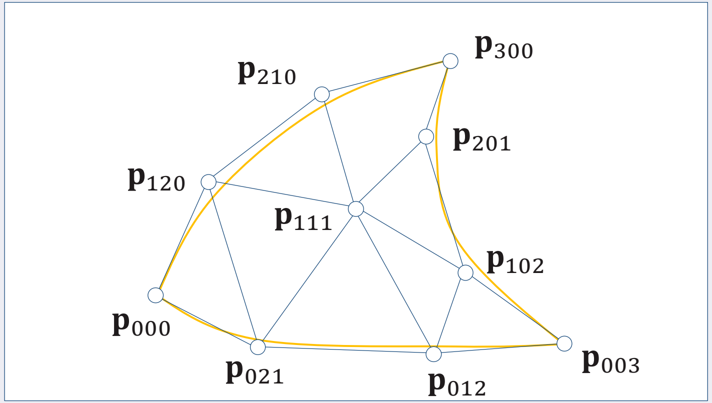
Université Claude Bernard Lyon 1
eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Patchs triangulaires

Points de contrôle $\mathbf{p}_{ijk}$

Possibilité de passage à une forme rectangulaire dégénérée

$$(u, v, w) \geq 0 \text{ et } u + v + w = 1$$



$$\mathbf{p}(u, v, w) = \sum_{\substack{j,j,k \geq 0 \\ i+j+k=n}} B^n_{ijk}(u, v, w)\, \mathbf{p}_{ijk}$$

$$B^m_{ijk}(u, v, w) = \frac{n!}{i!\, j!\, k!} u^i v^j w^k$$

$$\begin{gathered} u \geq 0 \\ v \geq 0 \\ w \geq 0 \\ u + v + w \leq 1 \end{gathered}$$

LIRIS CNRS Université Claude Bernard Lyon 1

eric.galin@liris.cnrs.fr

http://liris.cnrs.fr/~egalin

Point normal triangles

Triangles de Bézier incurvés

$$\mathbf{b}_{300} = \mathbf{p}_1 \quad \mathbf{b}_{030} = \mathbf{p}_2 \quad \mathbf{b}_{003} = \mathbf{p}_3$$

$$\mathbf{b}_{012} = \frac{1}{3}(2\mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_2 - \omega_{32}\mathbf{n}_3) \quad \mathbf{b}_{021} = \frac{1}{3}(2\mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 - \omega_{23}\mathbf{n}_2)$$

$$\mathbf{b}_{102} = \frac{1}{3}(2\mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_1 - \omega_{31}\mathbf{n}_3) \quad \mathbf{b}_{201} = \frac{1}{3}(2\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_3 - \omega_{13}\mathbf{n}_1)$$

$$\mathbf{b}_{120} = \frac{1}{3}(2\mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_1 - \omega_{21}\mathbf{n}_2) \quad \mathbf{b}_{210} = \frac{1}{3}(2\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \omega_{12}\mathbf{n}_1)$$

$$\omega_{ij} = (\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i) \cdot \mathbf{n}_i$$

$$\mathbf{b}_{111} = E + \frac{1}{2}(E - V)$$

$$E = \frac{1}{6}(\mathbf{b}_{012} + \mathbf{b}_{021} + \mathbf{b}_{102} + \mathbf{b}_{201} + \mathbf{b}_{120} + \mathbf{b}_{210})$$

$$V = \frac{1}{3}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3)$$

Université Claude Bernard Lyon 1

eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

A. Vlachos, J. Peters, C. Boyd, J. Mitchell. Curved PN triangles. *ACM.* 159–166, 2001.