Synthèse d'images

Outils mathématiques de base

Florence Zara (semestre automne)

LIRIS, équipe ORIGAMI

Université Lyon 1

Outils mathématiques

Contexte : besoin mathématiques pour la synthèse d'images

- Pour décrire la scène
  - Définition d'un système de coordonnées

- Pour faire des transformations géométriques
  - Projection et transformation

Bases pour la géométrie

- Points
- Vecteurs
- Triangles

Interpolation

Matrices et transformations géométriques

Outils mathématiques

Contexte : besoin mathématiques pour la synthèse d'images

- Pour décrire la scène
  - Définition d'un système de coordonnées

- Pour faire des transformations géométriques
  - Projection et transformation

Bases pour la géométrie

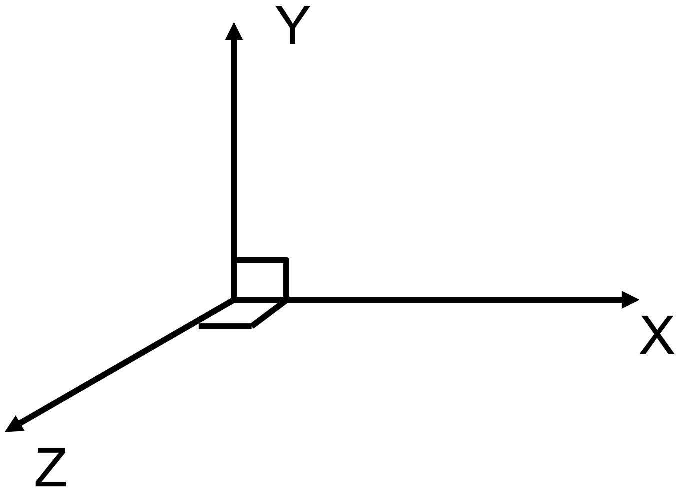
- Points
- Vecteurs
- Triangles

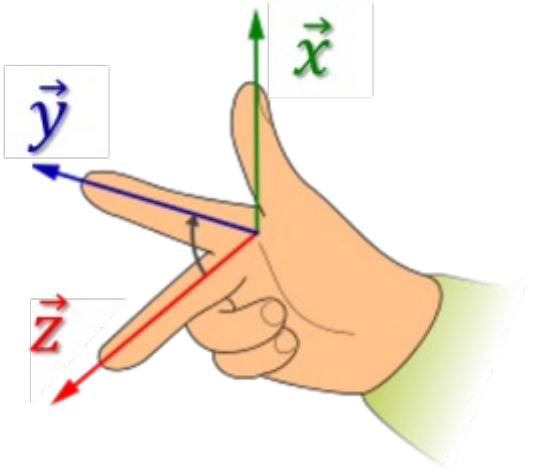
Interpolation

Matrices et transformations géométriques

Description de la scène

Définition d’un système de coordonnées



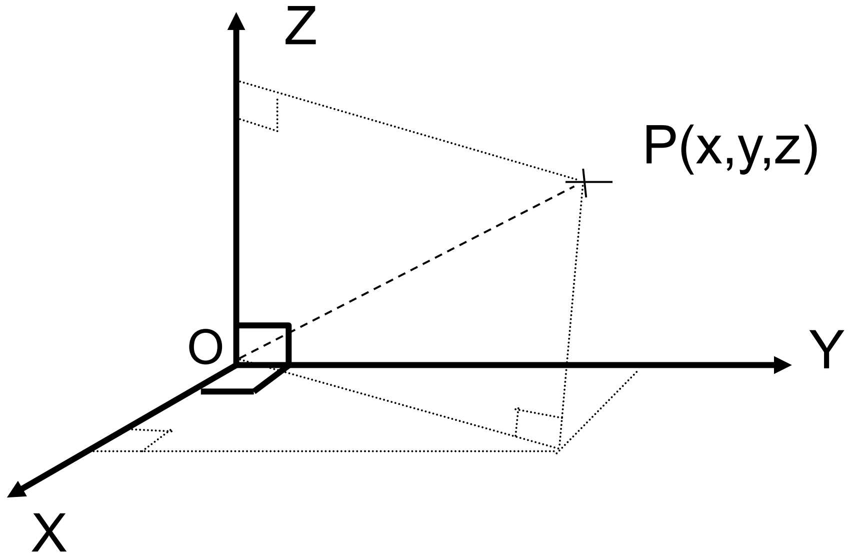


Règle de la main droite
(système ortho-normé)

Points

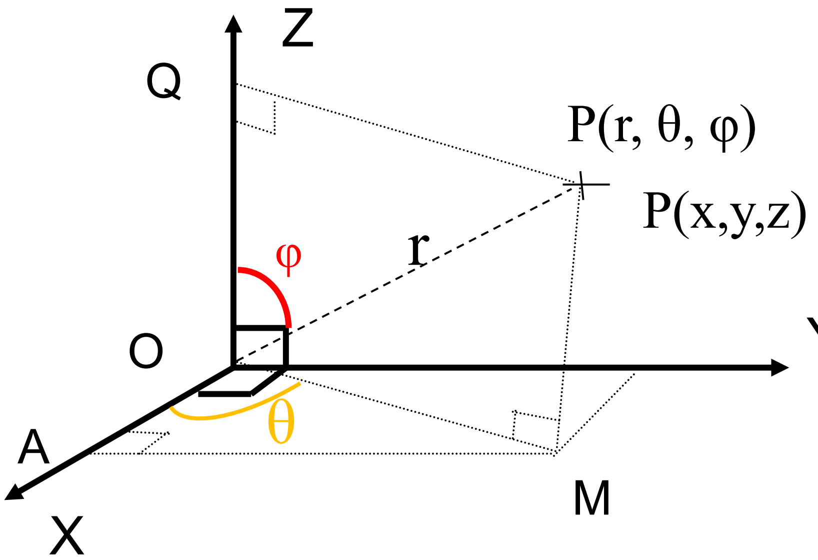
P (x, y, z) : donne une **position** relative à l'origine dans notre système de coordonnées

(x,y,z) = coordonnées cartésiennes du point dans l'espace



Points

P(r,θ,φ) : donne la position en coordonnées polaires

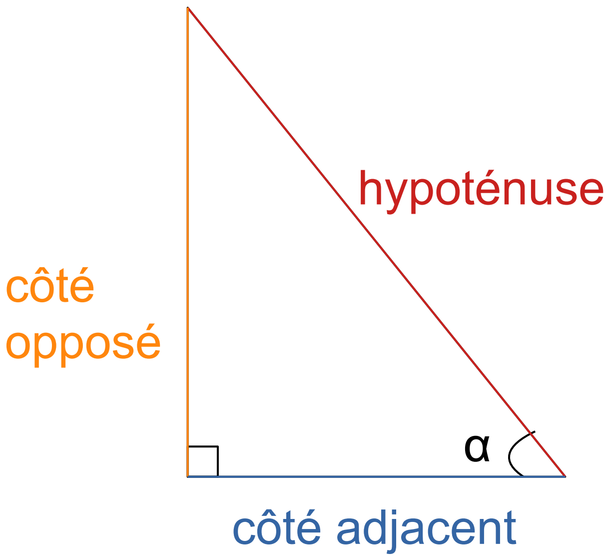


Exercice : exprimer (x, y, z) en fonction de (r, θ, φ)

Points

Petit rappel sur les angles pour résoudre l’exercice

On considère un triangle rectangle



cos(α) = coté adjacent / hypoténuse

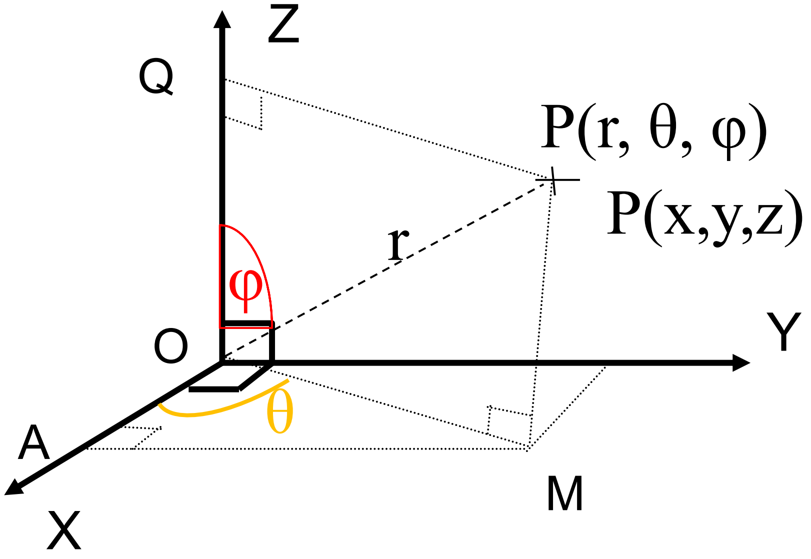
sinus(α) = coté opposé / hypoténuse

Points - solution

- On connaît le point $P(r,\theta,\varphi)$
- <u>Triangle QOP est rectangle en Q</u>
  - $\cos \varphi = OQ = z/OP = z/r$ => $z = r \cos \varphi$
  - $\sin \varphi = QP/r$ => $QP = r \sin \varphi$
- <u>Triangle OAM est rectangle en A</u>
  - $\cos \theta = OA/OM = x/OM$ => $x = OM \cos \theta = QP \cos \theta$

    => $x = r \sin \varphi \cos \theta$
  - $\sin \theta = AM/OM = y/OM$ => $y = OM \sin \theta = QP \sin \theta$

    => $y = r \sin \varphi \sin \theta$



Vecteurs

$\overrightarrow{V}$ (x, y, z) : donne une **direction** dans l'espace avec $\overrightarrow{V} \in \mathbf{R}^3$

Points ≠ Vecteurs

- Point – Point = ?
- Vecteur + Vecteur = ?
- Point + Vecteur = ?
- Point + Point = ?

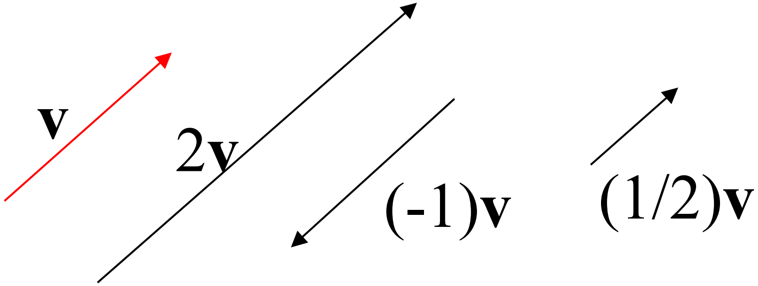
Vecteurs - solution

$\overrightarrow{V}$ (x, y, z) : donne une **direction** dans l'espace avec $\overrightarrow{V} \in \mathbf{R}^3$

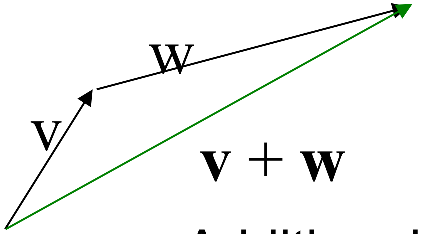
Points ≠ Vecteurs

- Point – Point = Vecteur ($\overrightarrow{AB}$ = **AB** = B - A)
- Vecteur + Vecteur = Vecteur
- Point + Vecteur = Point (translation du point)
- Point + Point = rien !

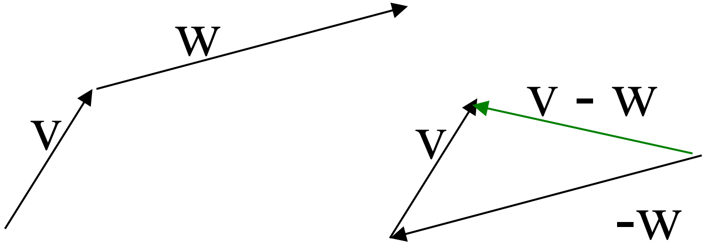
Vecteurs



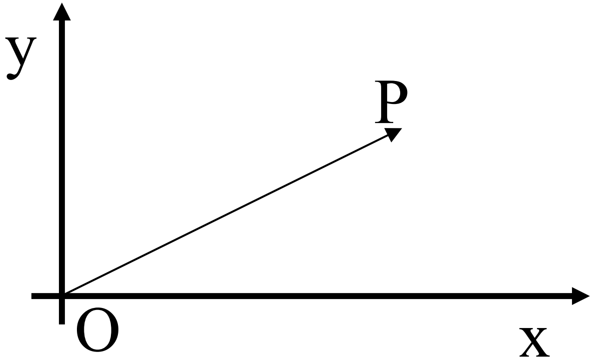
Multiplication par un scalaire :
vecteurs restent //



Addition de vecteurs
v + w



Difference de vecteurs
v - **w** = **v** + (-**w**)



Vecteur **OP** = P - O

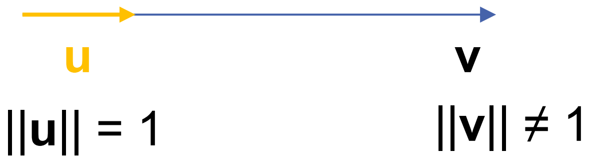
Vecteurs

Soit un vecteur **v**(x, y, z) défini dans l'espace, avec **v** ∈ $\mathbf{R}^3$

Sa **longueur** (ou norme) est définie par : ||**v**|| = $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Un vecteur unitaire est un vecteur dont la norme vaut 1

Pour obtenir le vecteur unitaire **u** à partir du vecteur **v**, on fait : **u** = **v** / ||**v**||



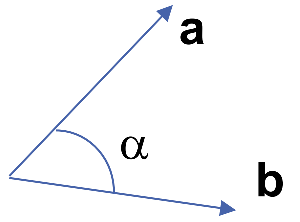
Vecteurs

Soient **a**(x_a,y_a,z_a) et **b**(x_b,y_b,z_b) deux vecteurs définis dans l'espace, avec **a,b** $\in$ **R**^{3}

Le produit scalaire de ces deux vecteurs est défini par :

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ||\mathbf{a}||\ ||\mathbf{b}|| \cos \alpha \quad \Rightarrow \cos \alpha = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}\ /\ ||\mathbf{a}||\ ||\mathbf{b}||$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = x_a * x_b + y_a * y_b + z_a * z_b$$



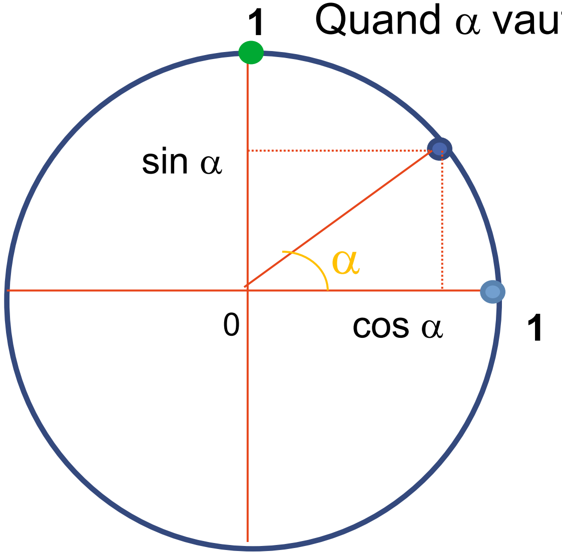
Le produit scalaire est un scalaire

Si on considère les vecteurs unitaires du repère ?

Vecteurs

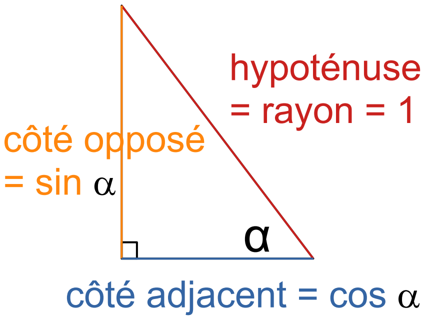
Petit rappel du cercle trigonométrique : centre O, rayon 1

Quand α vaut $\pi/2$: $\cos \pi/2 = 0$, $\sin \pi/2 = 1$



Quand α vaut 0 : $\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 1$

L'angle α varie de 0 à 2π



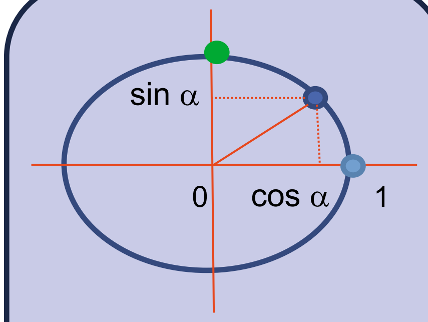
Vecteurs - Solution

- <u>Si on considère les vecteurs unitaires du repère ?</u>
  - Le produit scalaire de deux vecteurs perpendiculaires est nul

    => **i** . **j** = **j** . **k** = **k** . **i** = 0 (car cosinus est nul)

  - Le produit scalaire du même vecteur vaut 1

    => **i** . **i** = **j** . **j** = **k** . **k** = 1 (car cosinus vaut 1)

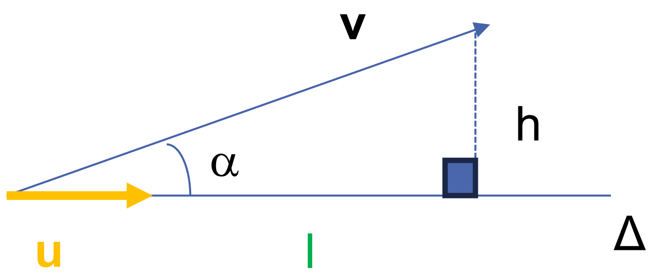


cos π/2 = 0
cos 0 = 1

Vecteurs

Longueur projetée l d'un vecteur **v** sur un axe Δ de direction unitaire **u** :

$$l = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} \qquad h = \sqrt{||\mathbf{v}||^2 - l^2} \qquad \text{avec } ||\mathbf{v}||^2 = h^2 + l^2$$



Pour vérifier :

Définition produit scalaire :

$\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = ||\mathbf{v}||\ ||\mathbf{u}|| \cos\alpha = ||\mathbf{v}|| \cos\alpha$

Dans triangle rectangle :

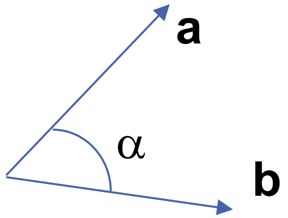
$\cos\alpha = l\ /\ ||\mathbf{v}|| \Rightarrow l = ||\mathbf{v}|| \cos = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$

Produit vectoriel

Si on considère deux vecteurs $\mathbf{a}(x_a, y_a)$ et $\mathbf{b}(x_b, y_b)$ définis <u>dans le plan</u>

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = x_a\, y_b - y_a\, x_b \qquad \text{avec } \underline{\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{R}^2}$$

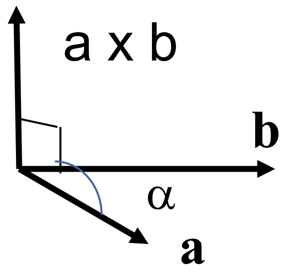
$$||\mathbf{a} \times \mathbf{b}|| = ||\mathbf{a}||\; ||\mathbf{b}|| \sin \alpha$$



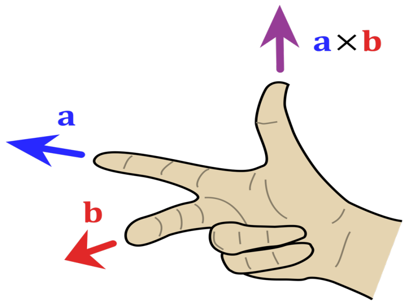
Le produit vectoriel dans le plan est un scalaire

Produit vectoriel

Si on considère deux vecteurs **a**(x_a, y_a, z_a) et **b**(x_b, y_b, z_b) définis <u>dans l'espace</u>



$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} y_a z_b - z_a y_b \\ -(x_a z_b - z_a x_b) \\ x_a y_b - y_a x_b \end{pmatrix} \quad \text{avec } \underline{\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{R}^3}$$



$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\| \, \|\mathbf{b}\| \sin \alpha$$

Produit vectoriel = vecteur normal aux 2 vecteurs

Le produit vectoriel dans l'espace est un vecteur

Utile en Informatique Graphique pour calculer la normale à une surface !

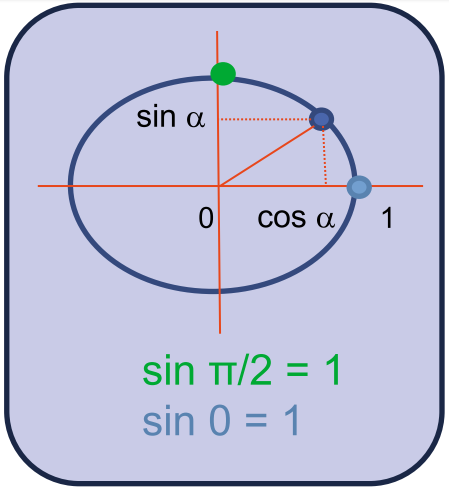
Produit vectoriel - Solution

- La norme du produit vectoriel de deux vecteurs colinéaires est nul

  || **i** x **i** || = || **j** x **j** || = || **k** x **k** || = 0 (car sinus est nul)

- La norme du produit vectoriel de deux vecteurs perpendiculaires vaut 1

  || **i** x **j** || = || **j** x **k** || = || **k** x **i** || = 1 (car sinus vaut 1)



Équation d'un plan

Trois points non alignés forment un plan unique

- Équation : $ax + by + cz + d = 0$

Attention : 4 points ne sont pas forcement coplanaires (dans le même plan)

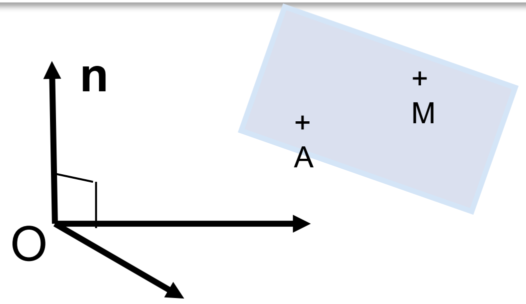
Équation d’un plan - Exercice 1

Soit un point A élément du plan

- Trouver un vecteur normal au plan

- Trouver l’équation d’un plan passant par A

Équation d'un plan - Solution



- Trouver un vecteur normal au plan
  - Plan peut être défini par un point et vecteur **n**(n_1,n_2,n_3)
  - On considère le point A(a1,a2,a3) dans le plan
  - On considère un point M(x,y,z) également dans le plan
    - Il représente l'ensemble des points de ce plan

  - Soit **n** la normale au plan, on a :

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{AM} = 0$$

$$\Rightarrow \mathbf{n} \cdot (\mathbf{AO} + \mathbf{OM}) = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{OM} - \mathbf{OA}) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{OM} - \mathbf{n} \cdot \mathbf{OA}$$

Cela équivaut à l'équation cartésienne avec M(x,y,z) et $n(n_1,n_2,n_3)$:

$$n_1\, x + n_2\, y + n_3\, z - (n_1\, a_1 + n_2\, a_2 + n_3\, a_3) = 0$$

$\Rightarrow$ Équation $ax + by + cz + d = 0$ avec $a = n_1$, $b = n_2$, $c = n_3$, $d = -\,\mathbf{n} \cdot \mathbf{OA}$

Équation d'un plan - Exercice 2

Soient 3 points : A(1,0,0), B(0,1,0), C(0,0,1)

- Trouver un vecteur normal au plan
- Trouver l'équation du plan A,B,C

Équation d'un plan - Solution

- Vecteur normal au plan ABC avec A(1,0,0), B(0,1,0), C(0,0,1)
  - **n** = **AB** x **AC** = (-1,1,0) x (-1,0,1) = (1, 1, 1)
  - Soit M (x, y, z) ∊ (A B C)
    - **AM** = M - A = (x-1, y, z) qui est orthogonal à n (1, 1, 1)
    - **AM** . **n** = 0 <=> x-1 + y + z = 0

      <=> x + y + z - 1 = 0 équation du plan (ABC)

Équation d'un plan - Solution

- Autre méthode
  - On sait que l'équation du plan est de la forme $ax + by + cz + d = 0$

  - $A (1, 0, 0)$ appartient au plan (A, B, C)
    $\Rightarrow a + d = 0$

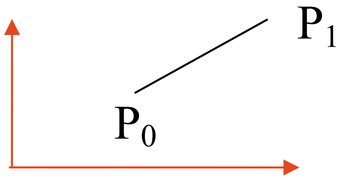
  - $B (0, 1, 0)$ appartient au plan (A, B, C)
    $\Rightarrow b + d = 0$

  - $C (0, 0, 1)$ appartient au plan (A, B, C)
    $\Rightarrow c + d = 0$

$\Rightarrow d = -a = -b = -c$

$\Rightarrow x + y + z - 1 = 0$ convient

Équation paramétrique d'une ligne



Soient

- $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$
- $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$

La ligne P passant par P_0 et P_1 est définie par :

$$P(t) = P_0 + t\,(P_1 - P_0) = \begin{cases} x(t) = x_0 + t\,(x_1 - x_0) \\ y(t) = y_0 + t\,(y_1 - y_0) \\ z(t) = z_0 + t\,(z_1 - z_0) \end{cases}$$

avec $-\infty < t < \infty$

Si $0 < t < 1$, on définit le segment [P0 P1]

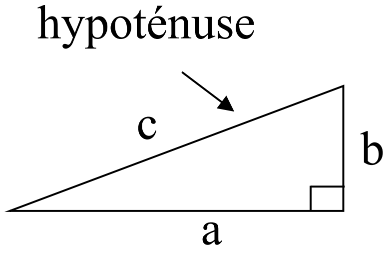
si $t = 0$, on a le point P_0

si $t = 1$, on a le point P_1

Équation d'un cercle

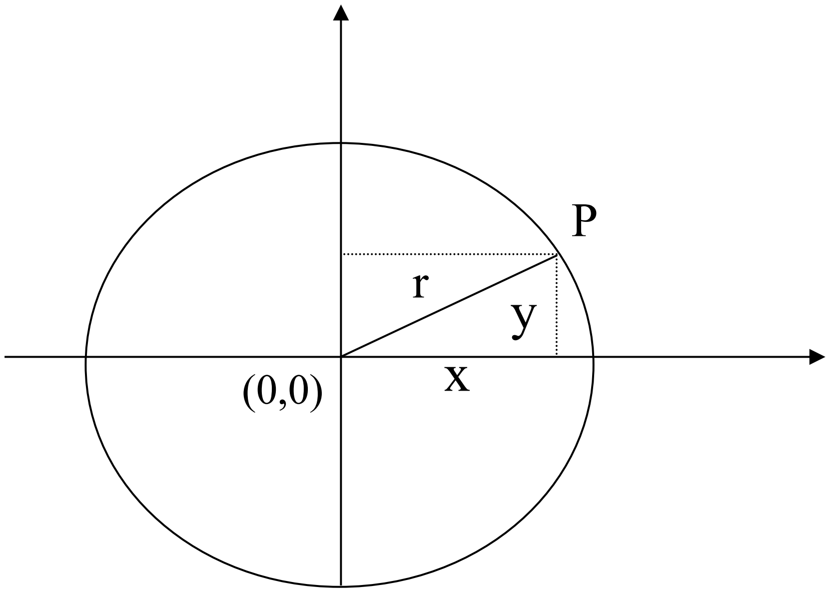
Théorème de Pythagore

$$a^2 + b^2 = c^2$$



Cercle de centre (0,0) et de rayon r, pour tout P(x,y) sur le cercle :

$$x^2 + y^2 = r^2$$



Équation d'une sphère

Théorème de Pythagore généralisé à la 3D : $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$

Pour tout P(x,y,z) sur la sphère de centre (0,0,0) et de rayon r : $\boxed{x^2 + y^2 + z^2 = r^2}$

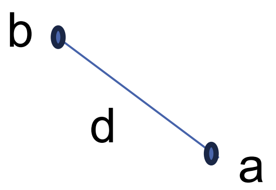
Pour tout P(x,y,z) sur la sphère de centre (x_c, y_c, z_c) et de rayon r :

$$\boxed{(x- x_c)^2 + (y- y_c)^2 + (z- z_c)^2 = r^2}$$

Distance

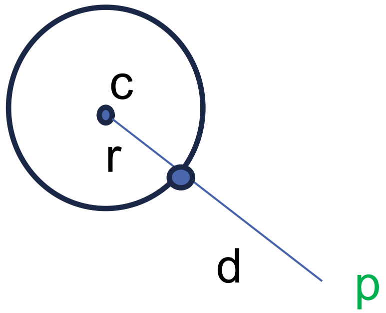
Distance entre deux points a et b :

$$d = || b - a ||$$



Distance entre un point p et une sphère S (de centre c et de rayon r) :

$$d(p,S) = || p - c || - r$$

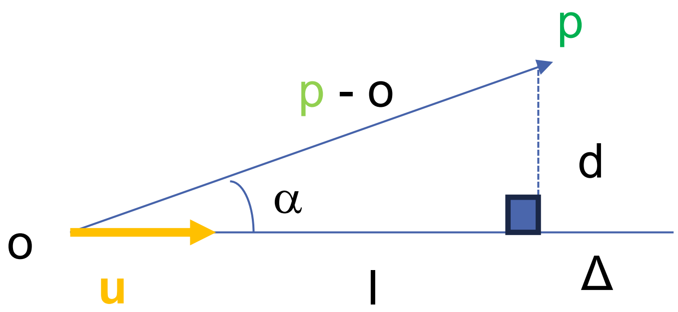


Distance d'un point p à une droite :

Soit o un point de Δ de direction unitaire u

$$l = (p - o) \cdot u$$

$$d(p, \Delta) = \sqrt{||p - o||^2 - l^2}$$

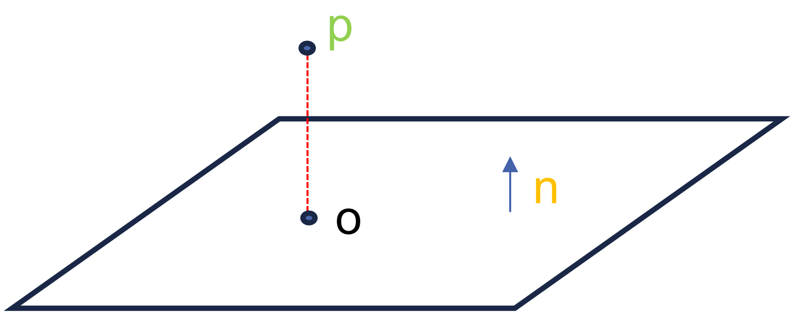


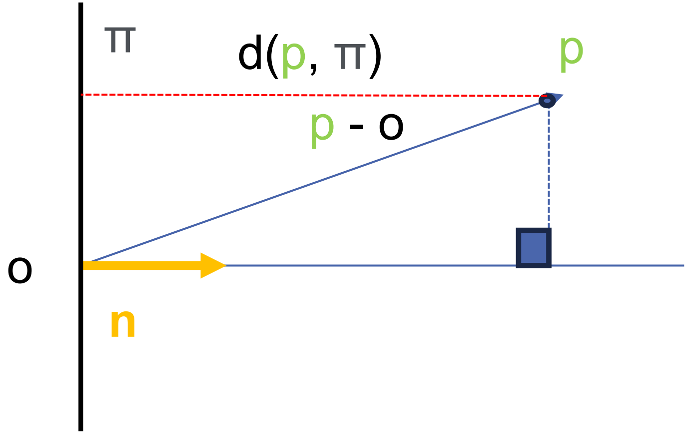
Distance

Distance d'un point p à un plan π :

Soit o un point du plan π de normale n

$d(p, \pi) = || n \cdot (p - o) ||$





Triangles

Triangle caractérisé par 3 sommets : a, b, c

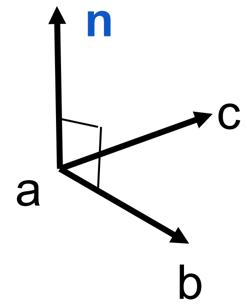
Normale $\mathbf{n}_u$ unitaire au triangle est définie par :

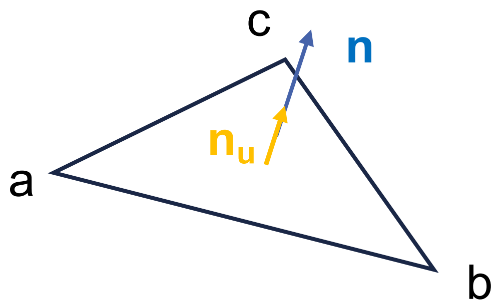
$$\mathbf{n}_u = \mathbf{ab} \times \mathbf{ac} = (b - a) \times (c - a) = \mathbf{n} \, / \, || \, \mathbf{n} \, ||$$

Aire s définie par :

$$s = \tfrac{1}{2} \, ||\mathbf{n}_u|| = \tfrac{1}{2} \, ||(b - a) \times (c - a)||$$

norme du produit vectoriel





Outils mathématiques

Contexte : besoin mathématiques pour la synthèse d'images

- Pour décrire la scène
  - Définition d'un système de coordonnées
- Pour faire des transformations géométriques
  - Projection et transformation

Bases pour la géométrie

- Points
- Vecteurs
- Triangles

Interpolation

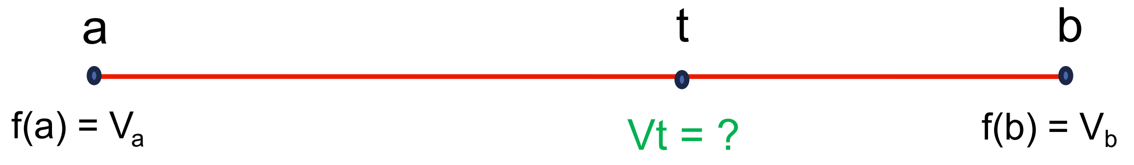
Matrices et transformations géométriques

Interpolation linéaire – cas d'une droite

Soit une fonction f définie par une droite avec f : t → V(t)

On connait les valeurs de la fonction f en a et b ∊ R, avec $f(a) = V_a$ et $f(b) = V_b$

On recherche la valeur Vt en t avec t ∊ [a,b]



Pente de la droite : $\frac{V_b - V_a}{b - a} = m$ On a aussi : $m = \frac{V_t - V_a}{t - a}$

On en déduit : $V_t = m\,(t - a) + V_a = (V_b - V_a) + V_a$

Interpolation linéaire – cas général

Soit une fonction f dont on connait les valeurs en deux points x_a et x_b avec $f(x_a) = y_a$ et $f(x_b) = y_b$

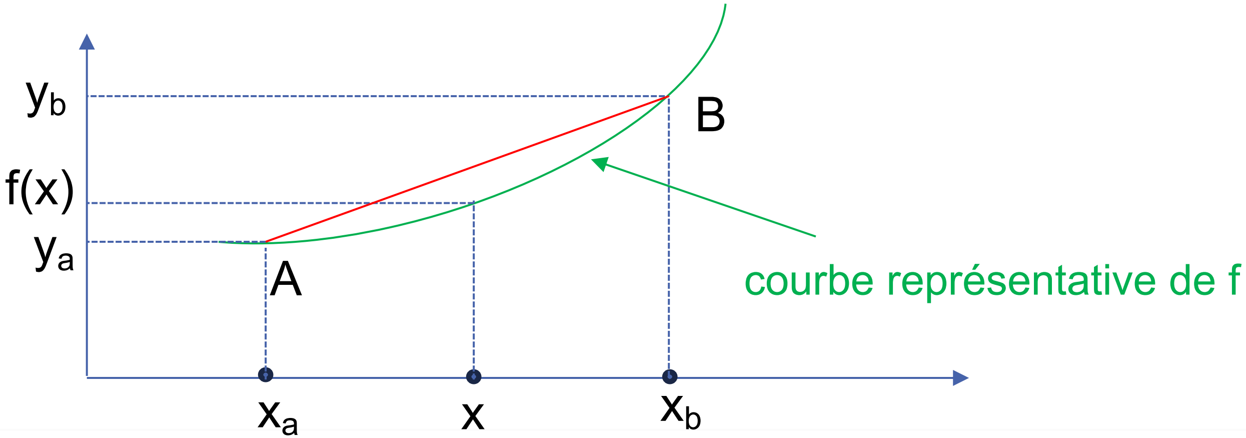
Pour calculer la valeur en x avec $x \in [x_a; x_b]$, on remplace f(x) par g(x)

où g est la fonction affine tq $g(x_a) = y_a$ et $g(x_b) = y_b$

Cela revient à remplacer la courbe représentative de f sur $[x_a; x_b]$ par la droite (AB)

On détermine ainsi f(x) par interpolation linéaire :

$$f(x) = y_a + (x - x_a)\frac{y_b - y_a}{x_b - x_a} = \frac{x_b - x}{x_b - x_a} y_b + \frac{x - x_a}{x_b - x_a} y_a$$



Outils mathématiques

Contexte : besoin mathématiques pour la synthèse d'images

- Pour décrire la scène
  - Définition d'un système de coordonnées
- Pour faire des transformations géométriques
  - Projection et transformation

Bases pour la géométrie

Interpolation

Matrices et transformations géométriques

- Définition et opérations sur les matrices
- Transformations géométriques
- Compositions de transformations

Matrices

Une Matrice est un tableau de dimensions M (lignes) par N (colonnes)

- matrice 3 par 6
- élément 2,3 est (3)

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & 1 & -1 \\ -5 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \downarrow \text{M lignes} \\ \xrightarrow{\hspace{3em}} & \\ \text{N colonnes} & \end{array}$$

Un vecteur dans R^3 peut être considéré comme une matrice 1 (ligne) x 3 (col.)

$$v = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$$

Matrices particulières

Matrices identité notée I :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2 x 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4 x 4

Matrice diagonale :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Matrice symétrique :

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$$

Opérations sur les matrices

Addition de deux matrices : $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+p & b+q \\ c+r & d+s \end{pmatrix}$ A + B = B + A

Soit $\mathbf{A}^T$ la **transposée** de la matrice A :

Matrice A de dimensions M par N, matrice A^T de dimensions N par M

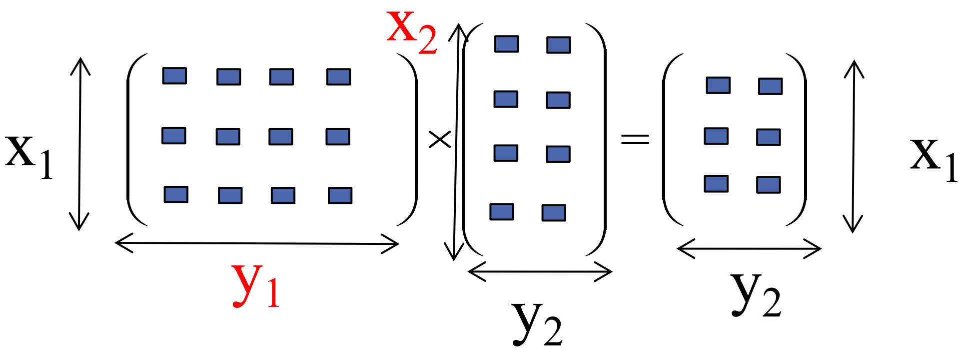
avec $a_{ij}^T = a_{ji}$

Exemples : $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 5 & 2 & 8 \\ 6 & 7 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 7 \\ 9 & 8 & 3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

Opérations sur les matrices

Multiplication de deux matrices

- Matrice x_1 y_1 multipliée par matrice x_2 y_2
  - Multiplication possible ssi $y_1 = x_2$
    - Résultat : matrice x_1 par y_2



Attention : si A B est possible, cela ne veut pas dire que B A l'est aussi !!!

$A\,B \neq B\,A$

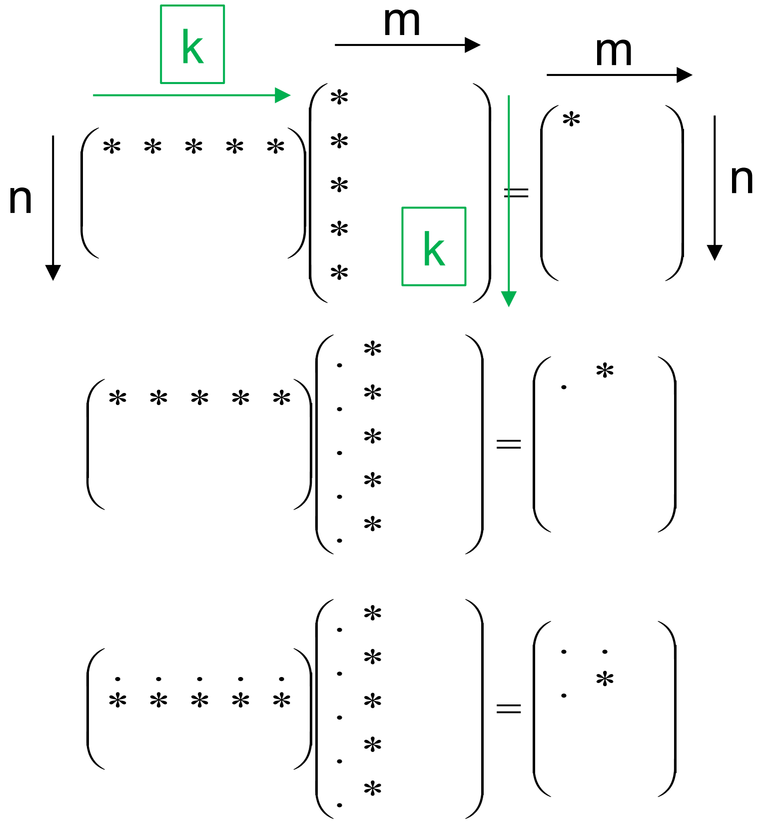
Opérations sur les matrices

Soit A matrice n (lignes) par k (colonnes)

Soit B matrice k (lignes) par m (colonnes)

C = A B est définie par $c_{ij} = \sum_{l=1}^{k} a_{il} b_{lj}$

C matrice n (lignes) par m (colonnes)



A B ≠ B A l'ordre des multiplications est important !

Exercices de multiplications de matrices

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ \end{pmatrix}$$

Exercices de multiplications de matrices

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{7} & \underline{0} \\ \underline{-2} & \underline{0} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{-2} & \underline{3} & \underline{2} \\ \underline{1} & \underline{0} & \underline{-3} \\ \underline{-1} & \underline{-1} & \underline{1} \end{pmatrix}$$

Inverse d'une matrice

Si $A\,B = I$ et $B\,A = I$ alors $A = B^{-1}$ et $B = A^{-1}$

Dit autrement, A^{-1} si elle existe est telle que : $A\,A^{-1} = I$

Inverse d'un produit : $(A\,B)^{-1} = B^{-1}\,A^{-1}$

Transformations géométriques

Les transformations géométriques sont utilisées partout :

- Changement de repère
- Projection
- Déplacement dans le temps

Elles sont effectuées en utilisant des matrices de transformation

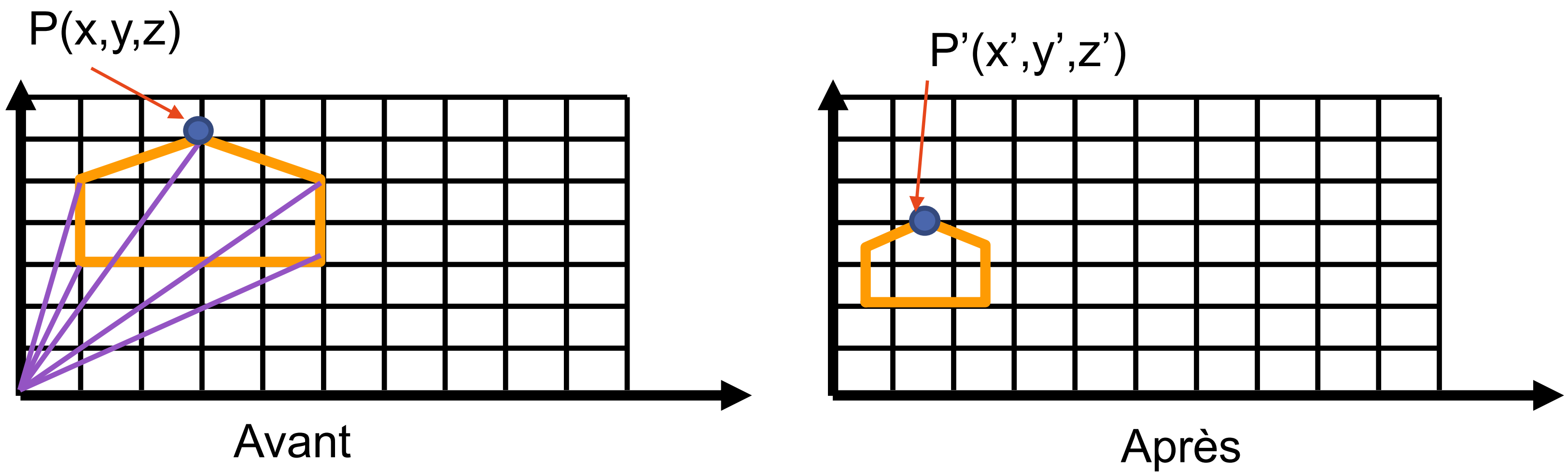
Chaque point P(x,y,z) de l'objet est multiplié par une matrice

Nous obtenons une nouvelle position P' issue de la transformation :

$$P'(x',y',z') = \underbrace{\begin{pmatrix} & \cdots & \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ & \cdots & \end{pmatrix}}_{\text{matrice transformation}} \underbrace{\begin{pmatrix} \ \end{pmatrix}}_{P}$$

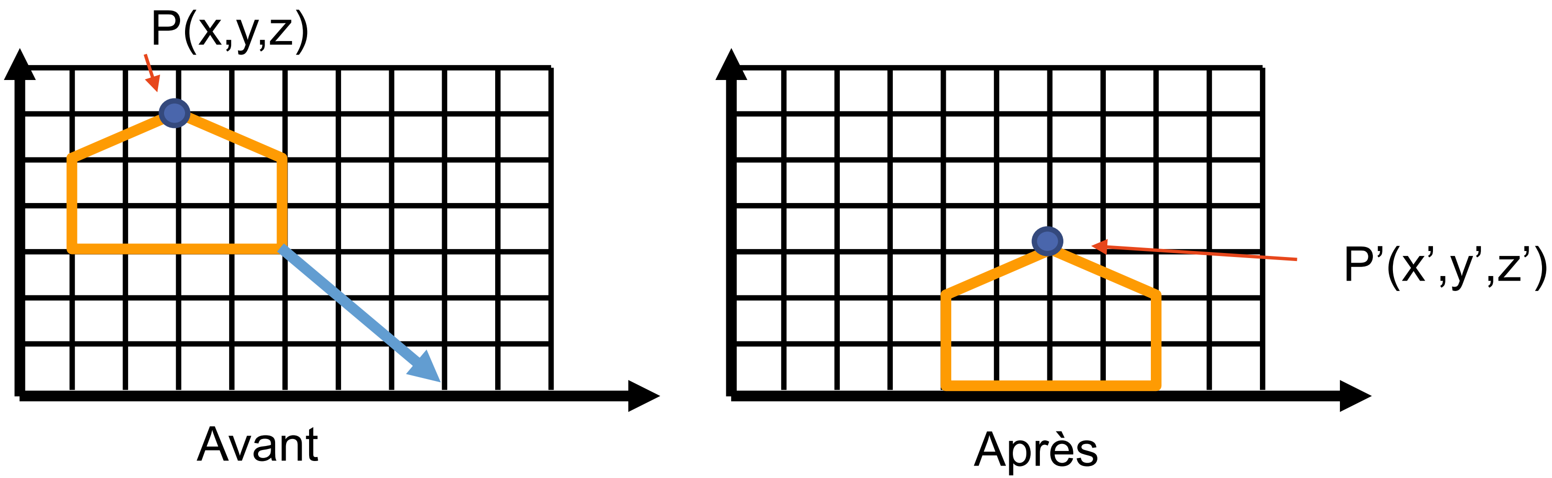
Transformations géométriques en 2D

Changement d'échelle :



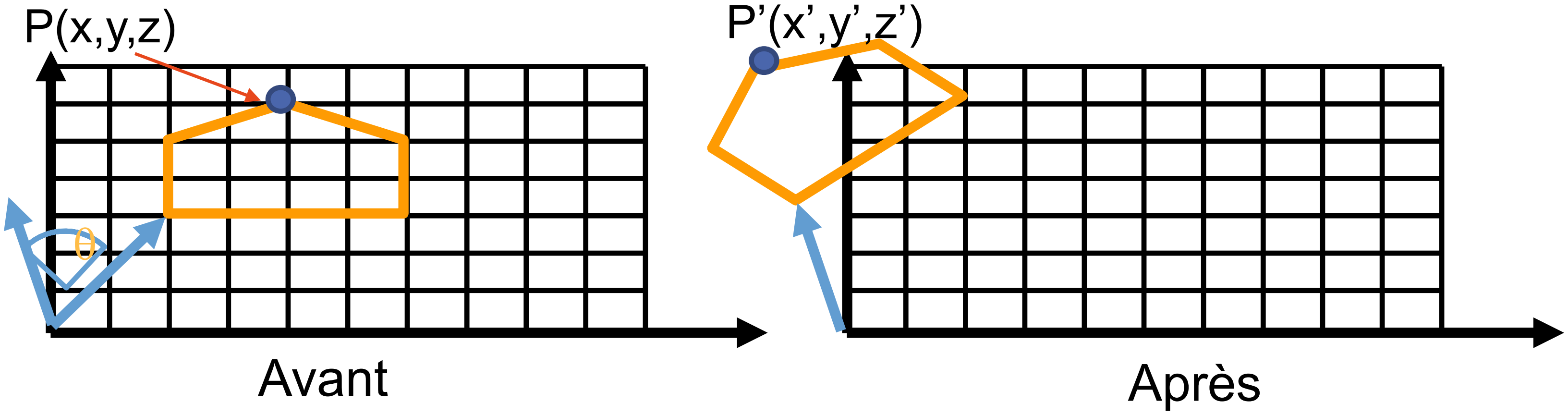
Transformations géométriques en 2D

Translation :



Transformations géométriques en 2D

Rotation :



Matrice de transformation en 3D

En 3D, un point est transformé <u>en le multipliant</u> par une matrice 3x3 appelée <u>matrice de transformation</u>

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by+cz \\ dx+ey+fz \\ gx+hy+iz \end{pmatrix}$$

Matrice de transformation

Point P qui subit la transformation

Point P' transformé

On souhaite définir les matrices des transformations géométriques : changement d'échelle, rotation, translation

Matrice de changement d'échelle

C'est une matrice diagonale de la forme suivante

(avec a, b, c les facteurs d'échelle) :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}}_{\text{Matrice de changement d'échelle}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax \\ by \\ cz \end{pmatrix}$$

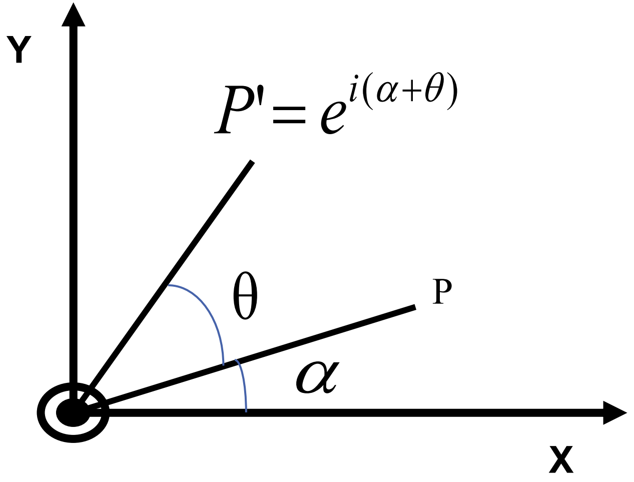
Exemple :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -10 \end{pmatrix}$$

Rotation autour d'un axe

On veut faire une rotation autour de l'axe des z d'un angle θ

Quelle est la matrice de transformation correspondante ?



Point initial :

$$\begin{aligned} P &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} r\cos(\alpha) & r\sin(\alpha) \end{pmatrix} \\ &= r(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)) \\ &= re^{i\alpha} \end{aligned}$$

Matrice de rotation en 2D

Point P' issu de la rotation de P autour de l'axe des z :

$$P' = re^{i(\alpha+\theta)} = re^{i\alpha}e^{i\theta}$$

$$= (x+iy)(\cos(\theta)+i\sin(\theta))$$

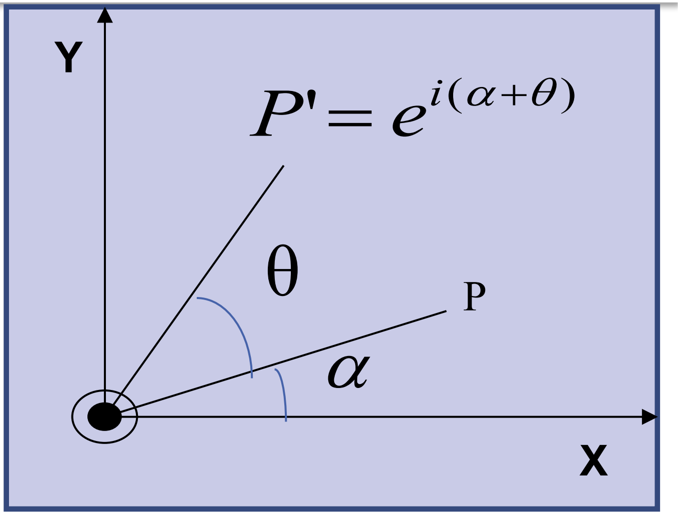
$$= x\cos(\theta)+xi\sin(\theta)+iy\cos(\theta)+iyi\sin(\theta)$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$i^2=-1$

Point P

Matrice de transformation



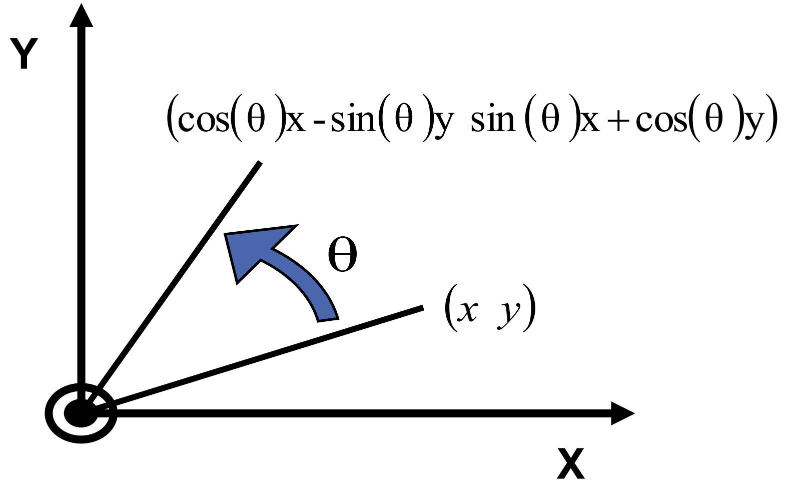
Remarque : Z ne change pas

Matrice de rotation en 3D

Matrice de rotation autour de l'axe des z :

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

car Z ne change pas



Matrice de rotation en 3D

Rotation autour de X : $R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ X ne change pas

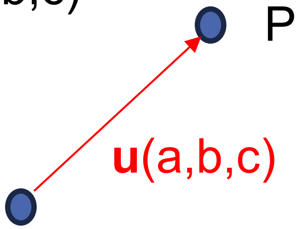
Rotation autour de Y : $R_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ Y ne change pas

Matrice de translation d’un point de l’espace

P’(x’,y’,z’) = Translation du point P(x,y,z) par le vecteur **u**(a,b,c)

avec $\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \\ z' = z + c \end{cases}$

$$P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad P' = \begin{pmatrix} x+a \\ y+b \\ z+c \end{pmatrix}$$



Souhaite trouver la matrice de translation telle que :

P’ = M P

Besoin d’introduire une nouvelle notion : les **coordonnées homogènes**

Coordonnées homogènes

Un point en 3 dimensions est représenté par un **vecteur de 4 éléments**

Le 4e élément est utilisé pour le calcul d'une coordonnée en espace projectif (calcul de projection)

La coordonnée du point est obtenue en divisant les 3 premiers éléments par le 4^e élément

$(x, y, z, w) = (x/w, y/w, z/w)$ donc le plus simple : $w=1$

Deux points (x, y, z, w) et (x', y', z', w') sont égaux ssi

$x/w = x'/w', y/w = y'/w', z/w = z'/w'$

Si $w=0$, on a un point à l'infini (utile pour les projections)

Coordonnées homogènes

Homogène veut dire qu'un point de l'espace 3D peut être représenté par une infinité de points homogènes 4D

- (2 3 4 1) = (4 6 8 2) = (3 4.5 6 1.5)

On peut contraindre le 4^{e} élément à être égale à 1 : (x, y, z, 1)

Passage en coordonnées homogènes

Coordonnées cartésiennes

Coordonnées homogènes

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x'/w \\ y'/w \\ z'/w \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$$

w est le facteur d'échelle

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix}$$

cas avec w=1

Matrice de translation – définie en 4D

Translation définie en coordonnées homogènes : matrice 4x4

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+a \\ y+b \\ z+c \\ 1 \end{pmatrix}$$

On a ajouté la 4e dimension « fictive » appelée **coordonnée homogène**

Pourquoi ceci ?

4D permet d'inclure translation / projection dans la matrice

Matrice 4x4 : représentation la plus utilisée pour les transformations (rotation, translation, changement d'échelle)

Matrices de transformation en 4D

Translation :

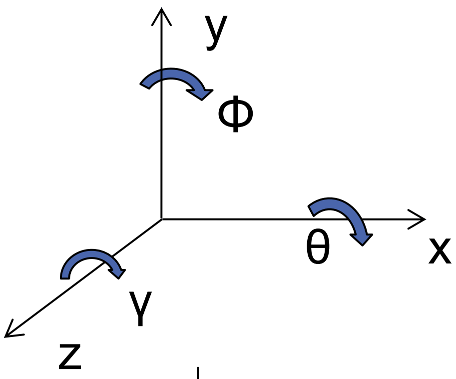
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & 0 & T_y \\ 0 & 0 & 1 & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x' = x + wT_x \\ y' = y + wT_y \\ z' = z + wT_z \\ w' = w \end{cases}$$

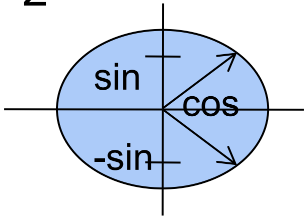
Changement d'échelle :

$$\begin{pmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x' = xS_x \\ y' = yS_y \\ z' = zS_z \\ w' = w \end{cases}$$

Matrices de transformation en 4D

Rotation dépend d'un axe et d'un angle





Rotation autour de l'axe X :
(coordonnée en x non modifiée)

$$R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rotation autour de l'axe Y :
(coordonnée en y non modifiée)

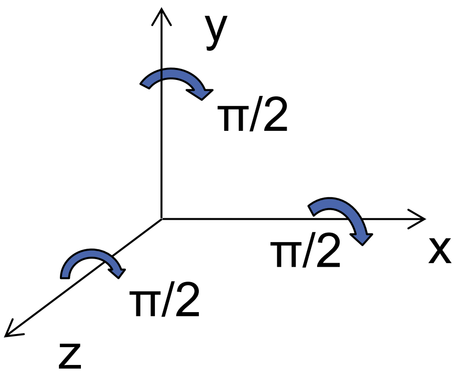
$$R_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\phi & 0 & \sin\phi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\phi & 0 & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rotation autour de l'axe Z :
(coordonnée en z non modifiée)

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrices de transformation en 4D

Rotation de l'angle π /2 :



Rotation autour de l'axe X :
(coordonnée en x non modifiée
coordonnée en y changée en z
coordonnée en z changée en -y)

$$R_x(\frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rotation autour de l'axe Y :
(coordonnée en y non modifiée
coordonnée en z changée en x
coordonnée en x changée en –z)

$$R_y(\frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rotation autour de l'axe Z :
(coordonnée en z non modifiée
coordonnée en x changée en y
coordonnée en y changée en -x)

$$R_z(\frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Composition de transformations en 4D

Rotation et/ou changement d'échelle puis translation

$$\begin{pmatrix} R_1 & R_2 & R_3 & T_1 \\ R_4 & R_5 & R_6 & T_2 \\ R_7 & R_8 & R_9 & T_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = T.R$$

- R (matrice 3x3) = rotation et/ou changement d'échelle
- T (matrice 3x1) = translation

Composition de transformations : exercice

Translation suivie d'une rotation *versus* rotation suivie d'une translation

- P(3,1,0) => (3, 1, 0, 1) en coordonnées homogènes
- R = rot(Z, Pi/2)
- T = trans(2,0,0)
- Il faut calculer P' = R T P et P" = T R P

Composition de transformations : solution

- P(3,1,0)
- R=rot(Z,Pi/2) => matrice de rotation $R_z(\frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- T=trans(2,0,0) => matrice de translation $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
  1

Composition de transformations : solution

Translation suivie d'une rotation

Calculer P'= R T P = R * (5,1,0,1) = (-1,5,0, 1)

Rotation suivie d'une translation

Calculer P" = T R P = = T * (-1,3,0,1) = (1,3,0,1)

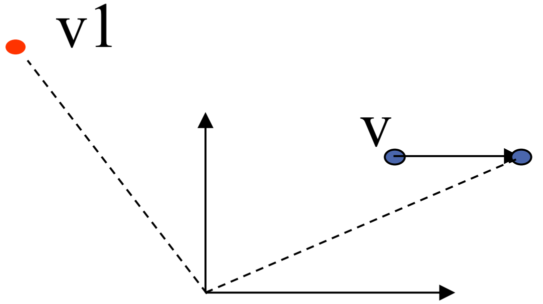
=> P' ≠ P"

Attention : l'ordre des transformations n'est pas commutative !! (RT ≠ TR)

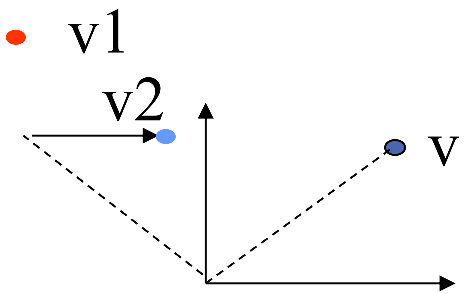
Composition de transformations

L'ordre a de l'importance

- Translation suivie d'une rotation ≠ rotation suivie d'une translation
- (RT) v ≠ (TR) v



T puis R = R T v = v1

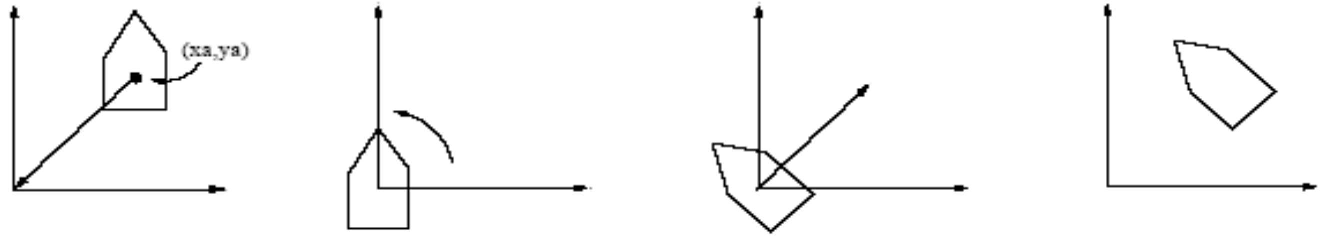


R puis T = T R v = v2

La multiplication de matrices n'est pas commutative (M1M2 ≠ M2M1)
L'ordre des transformations est donc important

Rotation de l'objet

- Pour faire une rotation de l'objet



$$X' = MX,$$

$$M = T(x_a, y_a) \cdot R(\theta) \cdot T(-x_a, -y_a).$$

Pour conclure

Toutes ces notions mathématiques sont à connaître et comprendre pour la synthèse d'images

- Géométrie : points, vecteurs, triangles
- Interpolation linéaire
- Matrices et transformations géométriques

A réviser pour bien aborder la suite de l'UE