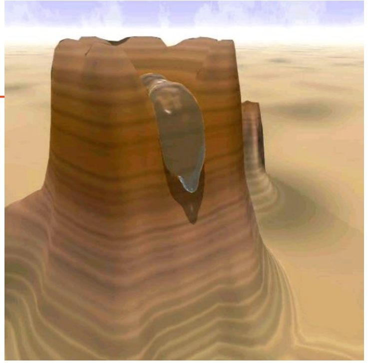


Modélisation

Florence Zara (semestre automne)
LIRIS-ORIGAMI, Université Lyon 1

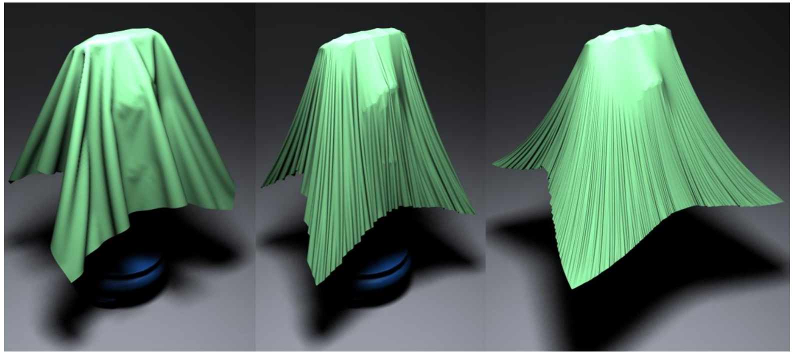
Modèle géométrique d'un objet

Description de la forme de l'objet : propriétés géométriques et topologiques

Modèle surfacique (2D dans l'espace) ou volumique (3D dans l'espace)

Surfaces paramétrées
Subdivisions
Maillages surfaciques
Champs de hauteur

Composition arborescente
Enumération spatiale
Génération par balayage
Surfaces implicites
Maillages volumiques



Modèle choisi en fonction de l'objet à représenter, des calculs à effectuer

Plan du cours

Focus sur quelques modèles géométriques surfaciques

- Surface implicite
- Quadrique
- Création d’un objet par extrusion
- Création d’un objet par révolution
- Création d’un terrain avec une carte de hauteur

Surface implicite

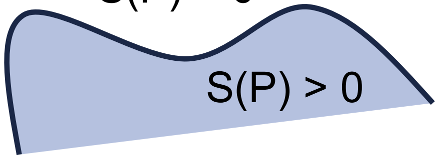
Surface du volume caractérisée par l'ensemble des points $P = (x, y, z)$ avec $P \in R^3$ tels que :

$$S(P) = S(x,y,z) = 0$$

Surface fermée délimitant deux régions de l'espace :

$S(x,y,z) < 0$ (région infinie)

$S(x,y,z) > 0$ (intérieur de l'objet)



Permet de modéliser des formes lisses, des objets de topologie variable

Le gradient en un point de la surface donne la direction de la normale à la surface en ce point :

Vecteur normal à la surface = $\vec{n}$ = gradient de $S(x,y,z) = \nabla S(x,y,z) = (dS/dx, dS/dy, dS/dz)$

Rappel - Gradient

Gradient d'une fonction en un point =

vecteur caractérisant la variabilité de la fonction au voisinage de ce point

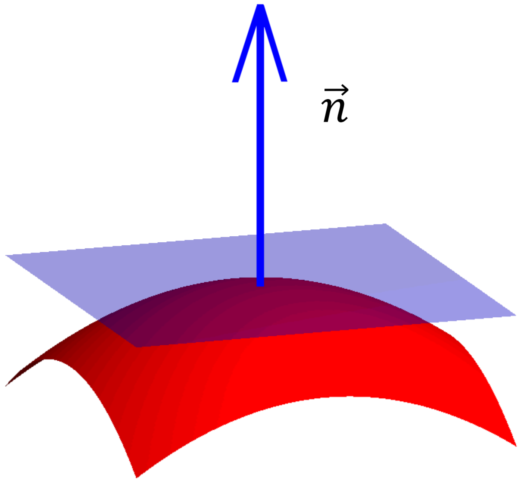
Gradient est défini en tout point où la fonction est différentiable

Le gradient est la généralisation à plusieurs variables de la dérivée d'une fonction d'une seule variable

Le gradient d'une fonction $f(x_1, x_2, .. x_n)$ est le vecteur ayant comme composantes les dérivées partielles de f par rapport aux coordonnées :

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Rappel - Gradient d'une surface



Soit une fonction à 2 variables : f(x,y)

df/dx = tangente par rapport à x
df/dy = tangente par rapport à y

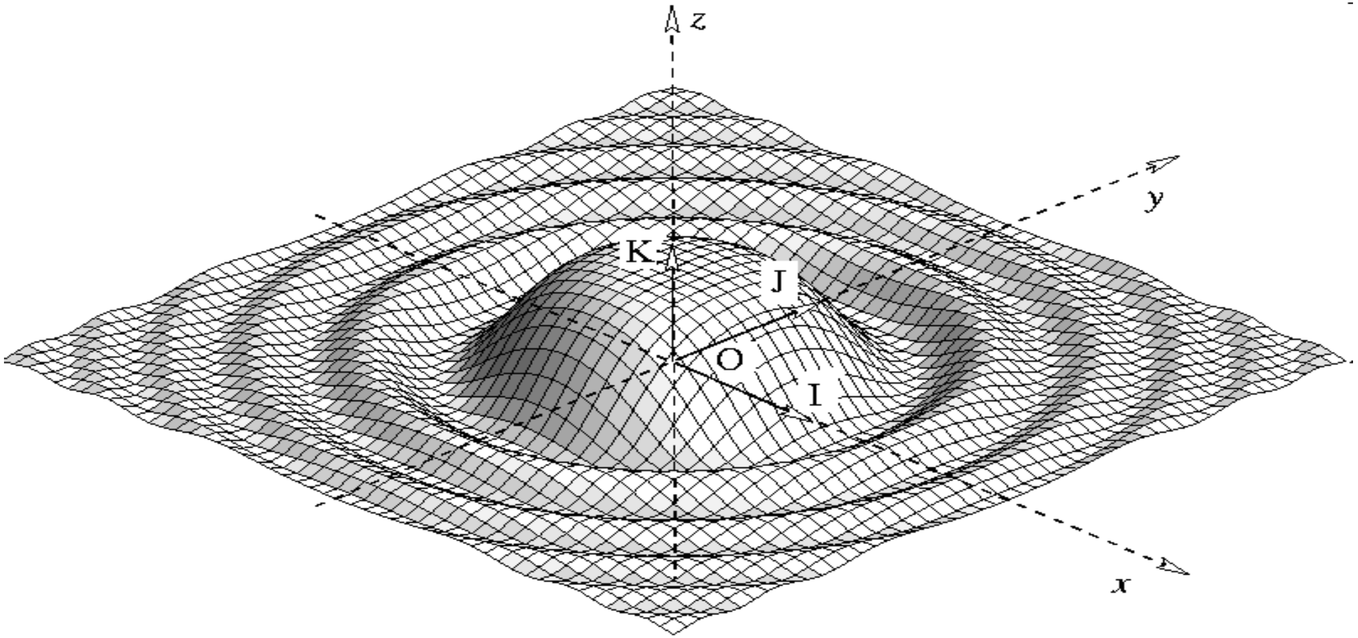
(df/dx, df/dy) = plan tangent

$\vec{n}$ = (df/dx ∧ df/dy) = vecteur normal à ces 2 tangentes

Surface implicite - exemple

Surface définie par : f(x,y) = a.sin(b(x2+y2)) / (x2+y2) = z

Ce qui donne : z - a.sin(b(x2+y2)) / (x2+y2) = 0

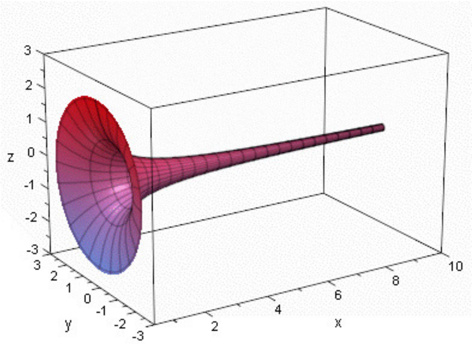


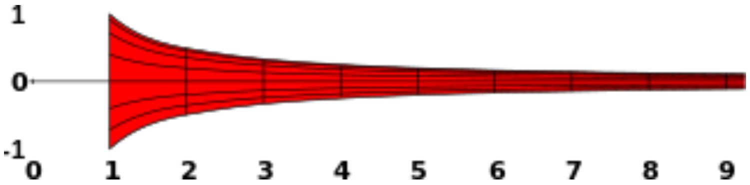
Surface implicite - exemple

Trompette de Gabriel qui est définie par :

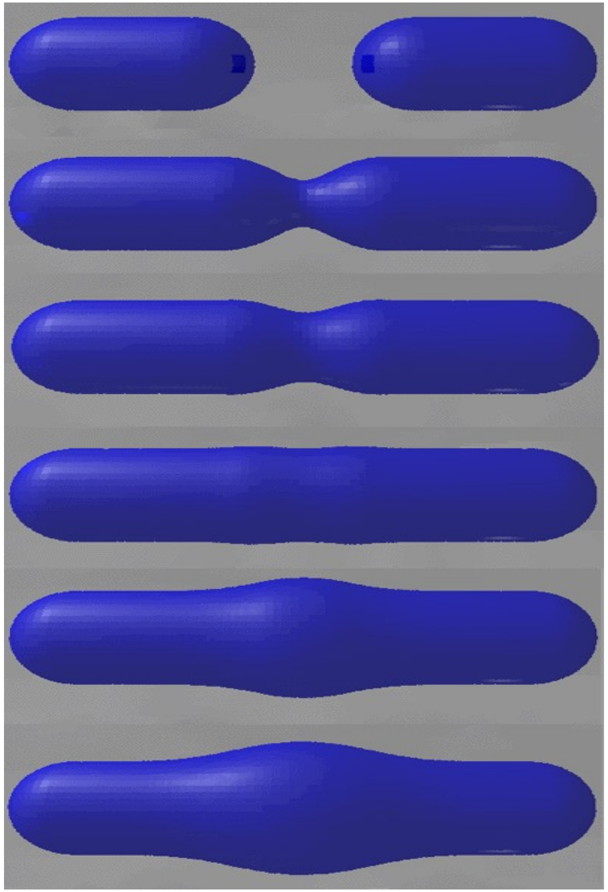
$\rho\, x = 1$ (coordonnées cylindriques)

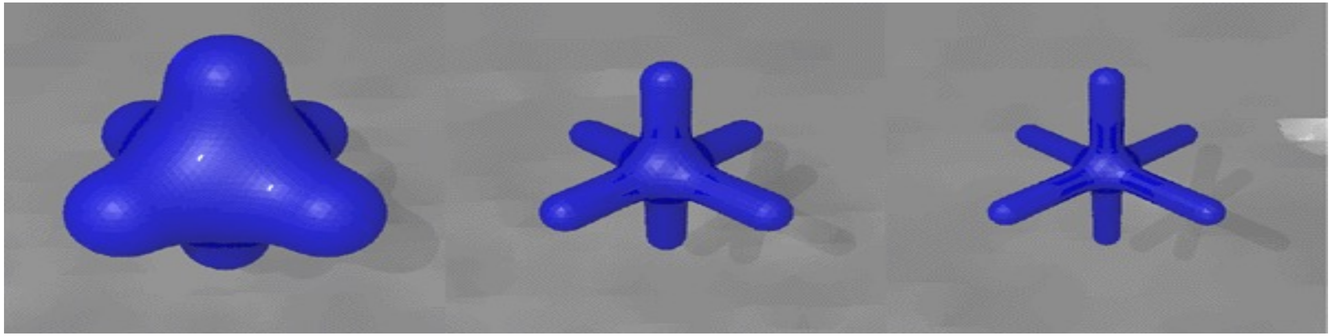
$(y^2 + z^2)\, x^2 = 1$ (coordonnées cartésiennes)

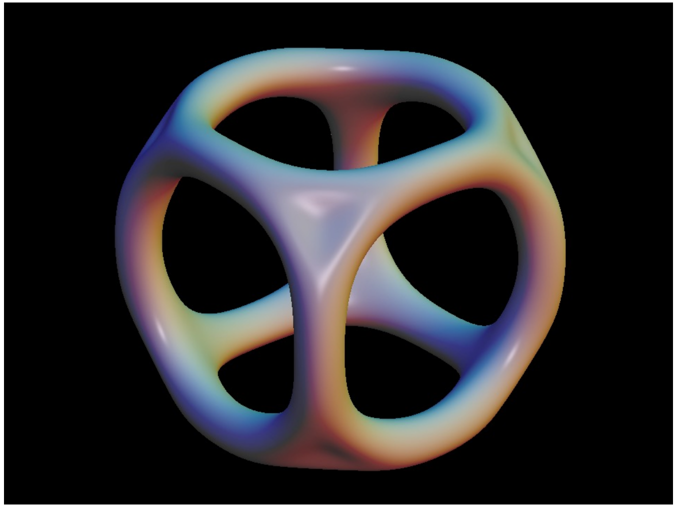


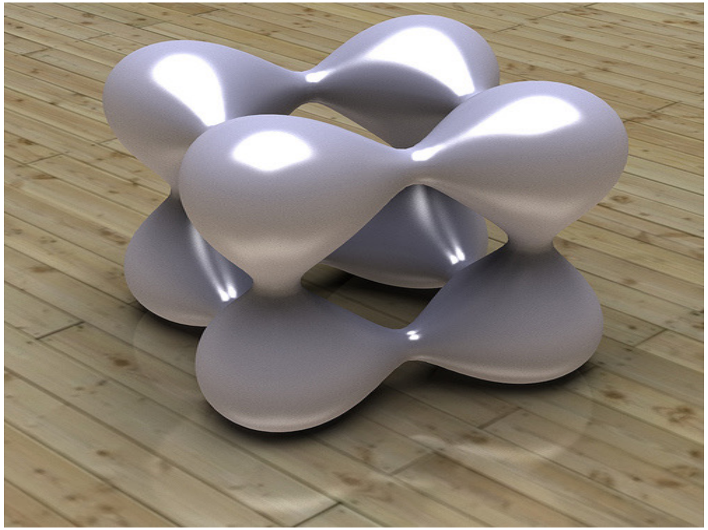


Surface implicite - exemple









Quadrique

Surfaces du second degré (degré le plus élevé dans l'équation)

Équation implicite de la forme :

$$s(x,y,z) = ax^2 + ey^2 + hz^2 + 2bxy + 2cxz + 2fyz + 2dx + 2gy + 2iz + j = 0$$

Représentation matricielle possible :

$$P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \qquad Q = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & e & f & g \\ c & f & h & i \\ d & g & i & j \end{pmatrix}$$

$$S(x,y,z) = P^T Q P = 0$$

Quadrique

$$s(x,y,z) = ax^2 + ey^2 + hz^2 + 2bxy + 2cxz + 2fyz + 2dx + 2gy + 2iz + j = 0$$

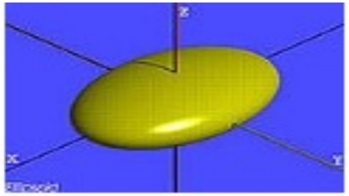
Exemples de quadriques :

Plan : Ax+By+Cz-D=0	2d=A, 2g=B, 2i=C, j=-D, autres=0
Sphère : $x^2+y^2+z^2=r^2$	a=e=h=1, b=c=f=d=g=I=0, $j=-r^2$
Cylindre : $x^2+y^2-1=0$	a=e=1, h=b=c=f=d=g=I=0, j=-1
Cône : $x^2+y^{2-}z^2=0$	a=e=1, h=-1, autres=0

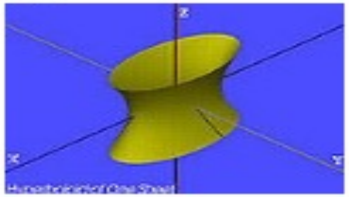
Paraboloïde, torus, …

Quadrique

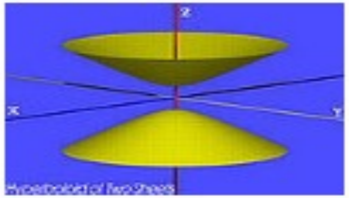
L'ellipsoïde
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$



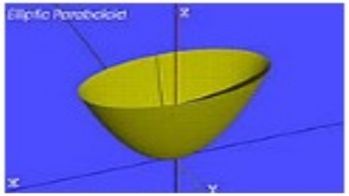
L'hyperboloïde à une nappe (H1)
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$



L'hyperboloïde à deux nappes (H2)
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0.$$

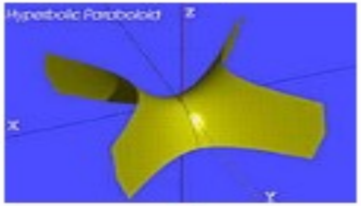


Le paraboloïde elliptique (PE)
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z.$$

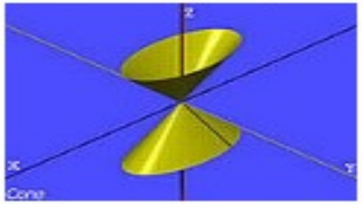


Quadrique

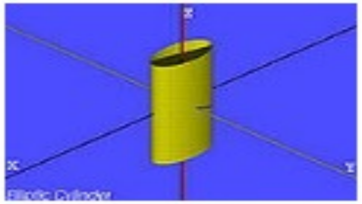
Le paraboloïde hyperbolique (PH) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z\cdot$



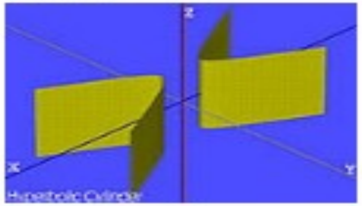
Le cône à base elliptique $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0\cdot$



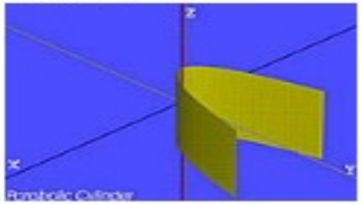
Le cylindre elliptique $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0\cdot$



Le cylindre hyperbolique $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0\cdot$



Le cylindre parabolique $x^2 = 2py\cdot$



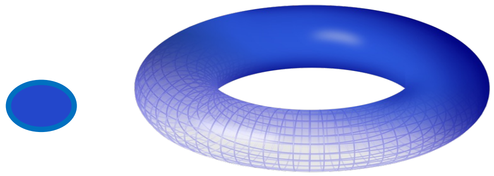
Création d'un objet par extrusion

Extrusion transforme

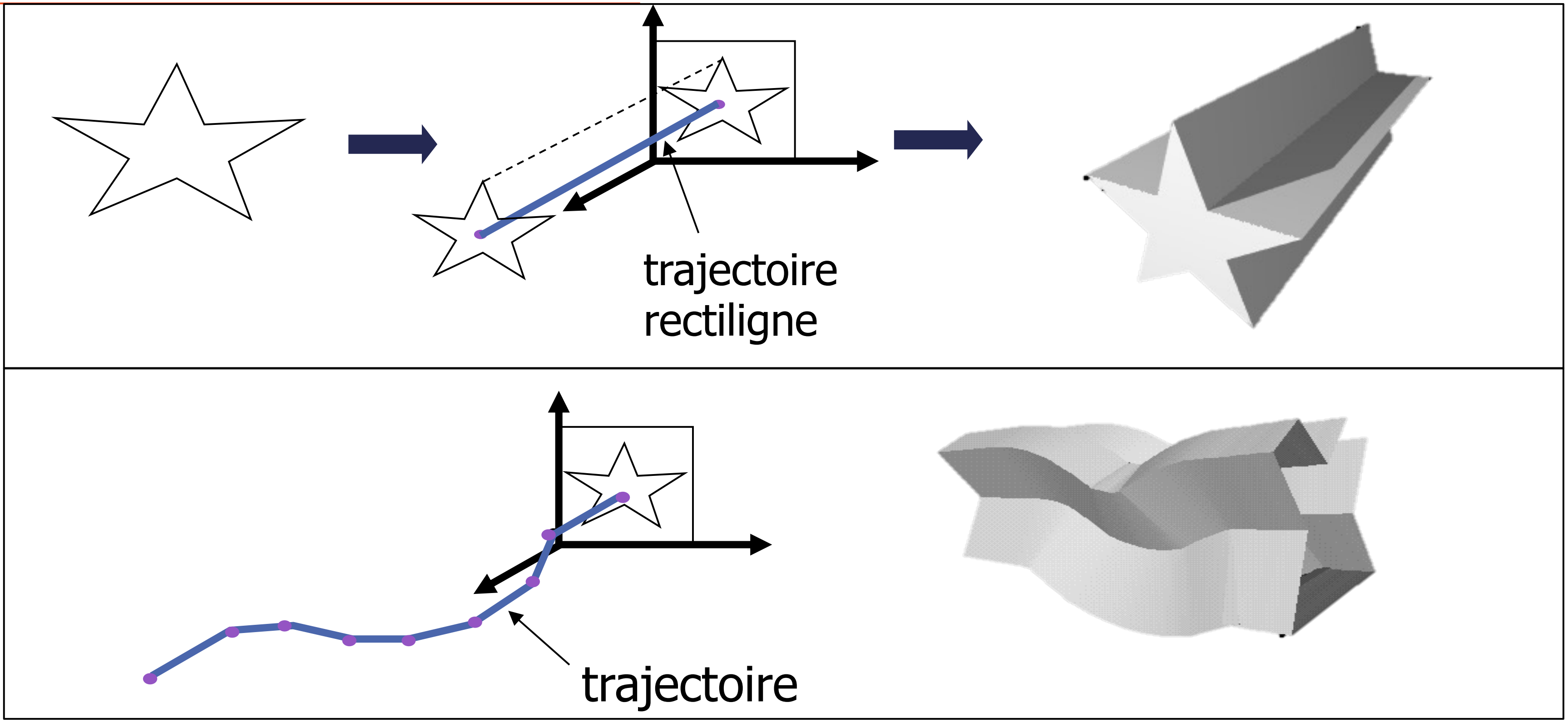
- un point en une courbe
- une courbe en une surface
- une surface en un volume

en suivant une trajectoire définie par une courbe

- Exemples
  - Cylindre = extrusion d'un cercle avec trajectoire rectiligne
  - Tore = extrusion d'un cercle avec trajectoire circulaire



Création par extrusion : exemples

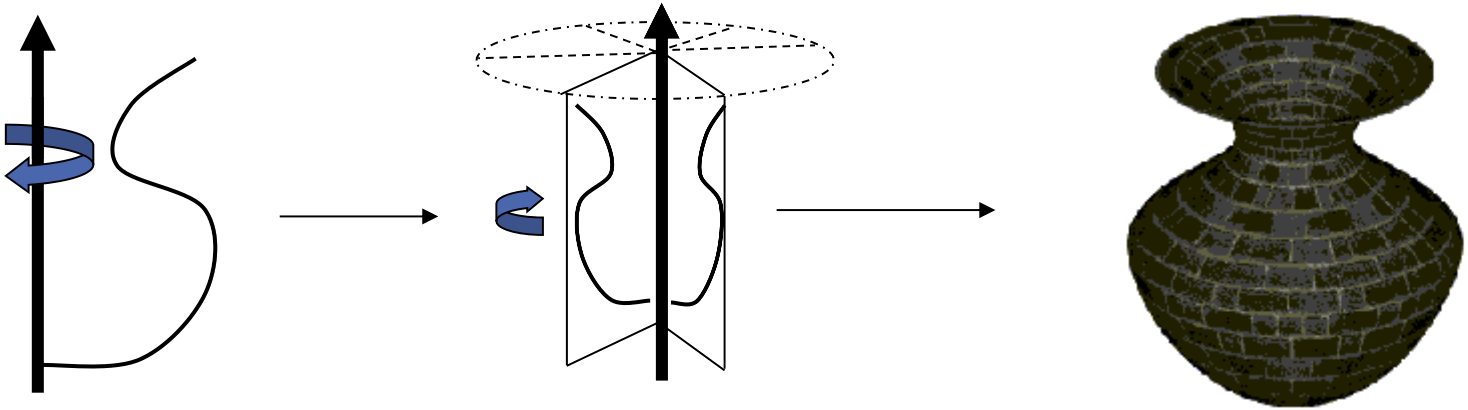


A chaque sommet du chemin il est possible d’appliquer des changements d’échelles et des déformations

Surface de révolution

Surface de révolution = surface invariante par rotation autour d'un axe

Création d'une surface de révolution = rotation autour d'un axe fixe d'une courbe plane



Création d'un objet par extrusion ou révolution

Étape 1 :

- Dessin de la silhouette en 2D

Étape 2 :

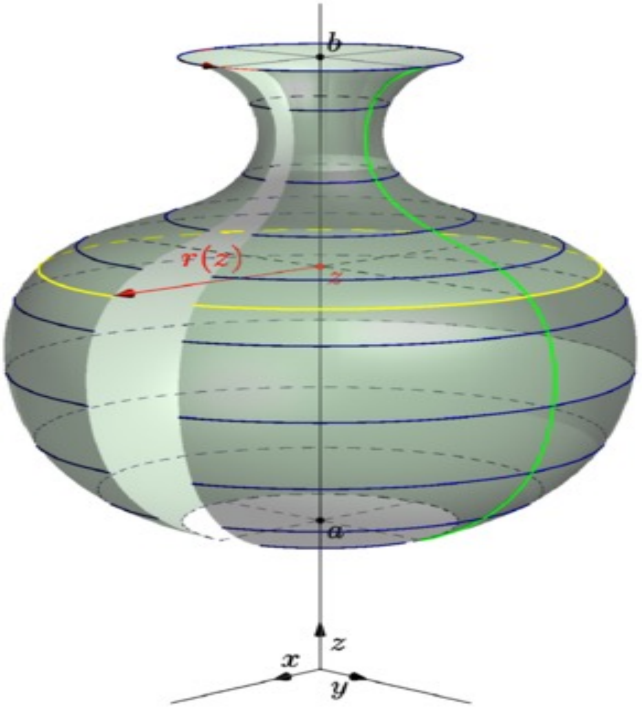
- Cas de l'extrusion : **translation** de la silhouette 2D en suivant la trajectoire
- Cas de la révolution : **rotation** de la silhouette 2D autour d'un axe

Étape 3 :

- Jonction des sommets pour créer les polygones

Exercice - Création d’un vase (en TD)

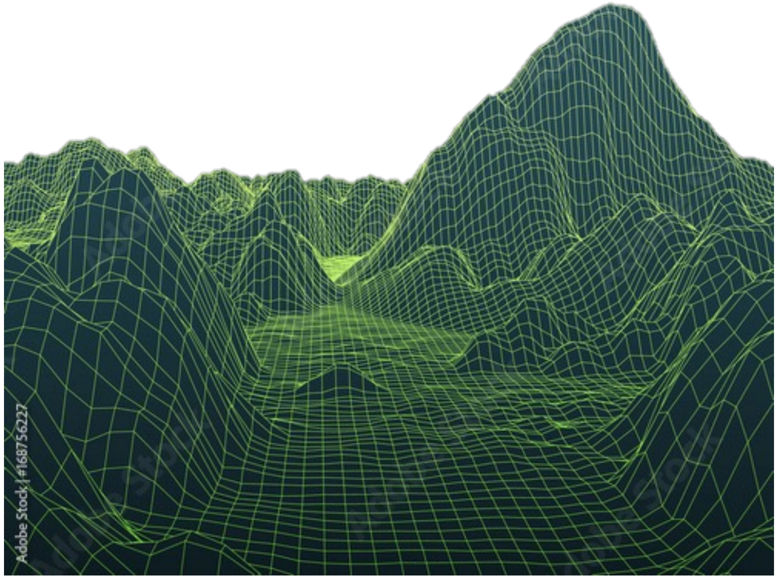
Comment créer un vase par révolution ?

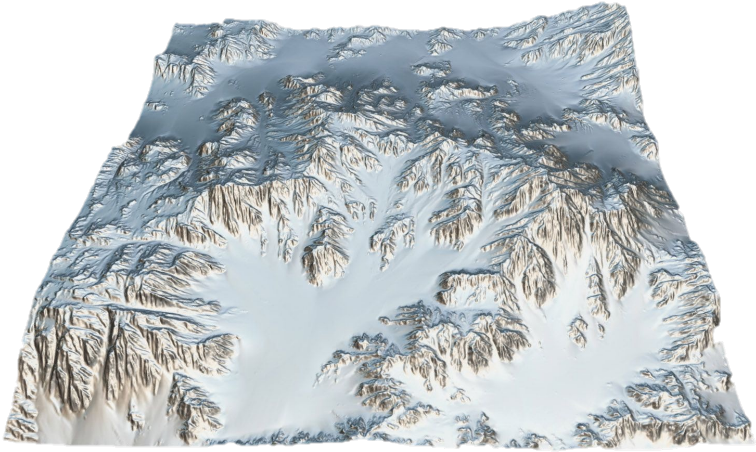


Création d’un terrain

Modèle numérique de terrains

- Représente l’altitude sur une carte 2D



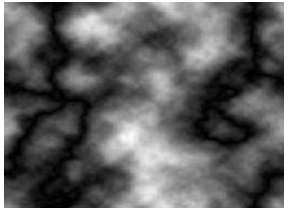


Représentation d'un terrain

Utilisation d'une carte de hauteur

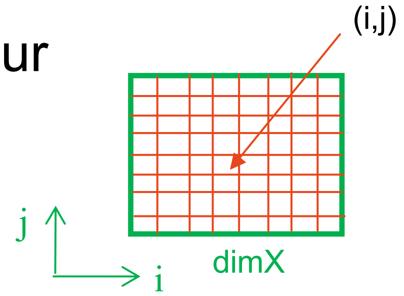
Image en niveau de gris donne le relief

- blanc = zones hautes ; noir = zones basses
- Carte de hauteur = image = grille 2D avec valeur



Création à partir de l'image d'un tableau contenant la hauteur (la couleur) de chaque point (i, j)

- Si valeurs stockées linéairement,
  valeur de (i,j) se trouve en [(j * dimX) + i]



A noter : une seule hauteur par point de la carte
(impossible de modéliser une grotte)

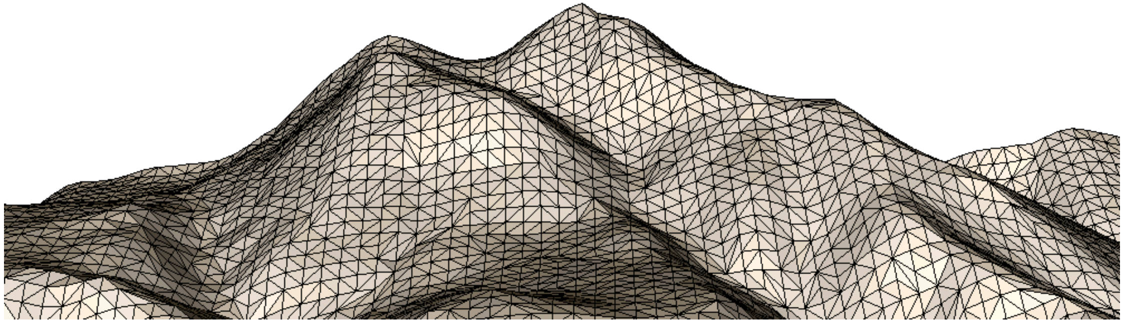
Représentation d’un terrain

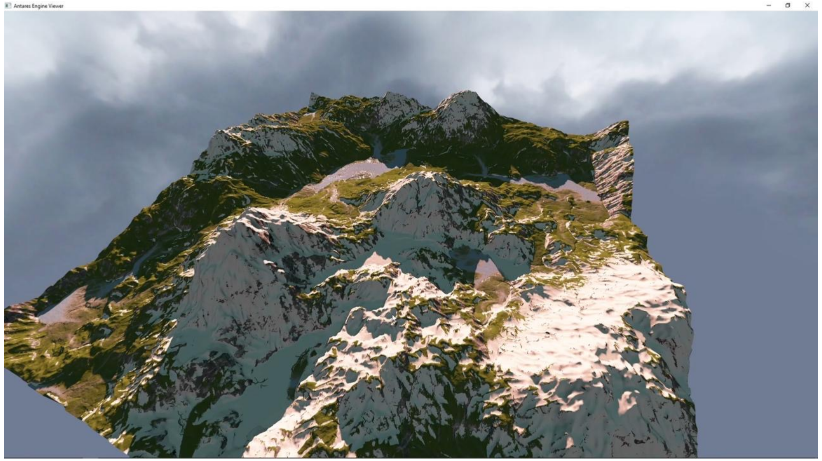
La hauteur est ainsi définie en chacun des points (i, j) de la grille du terrain

- hauteur (i, j) = y   cela définit une surface

Terrain = affichage du maillage créé à partir des points (i, valeur de la carte en (i,j), j)

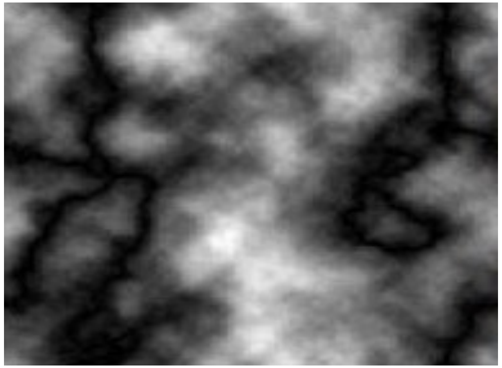
Ajout d’une texture pour la couleur (*après le cours sur les textures*)





Exemple de création de terrain

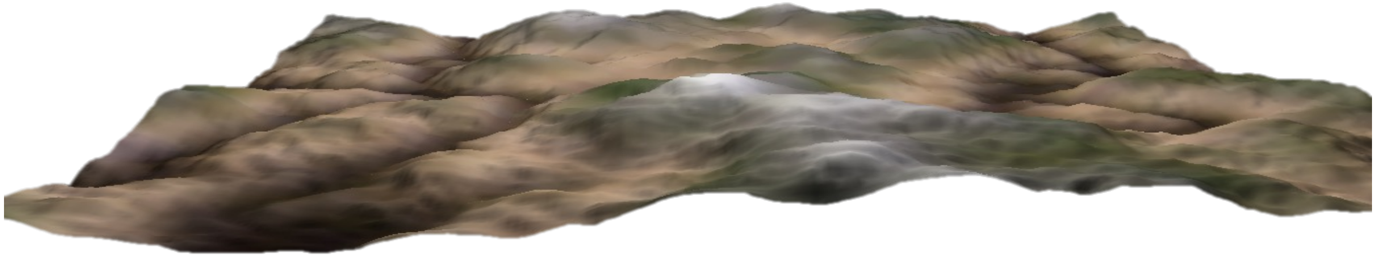
Carte
d'élévation
(niveau de gris)



+

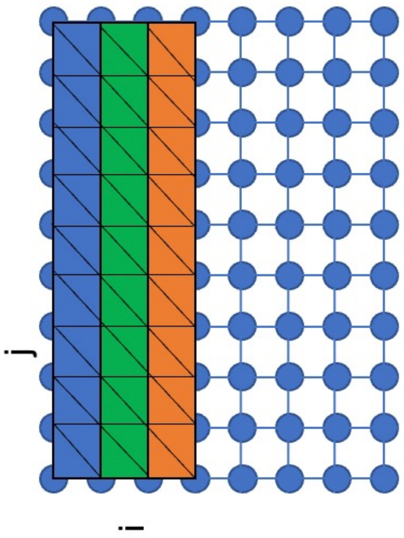
Texture

=



Création du terrain - Approche

Triangulation de la carte de hauteur pour afficher le terrain (création du Mesh avec GL_TRIANGLE_STRIP)



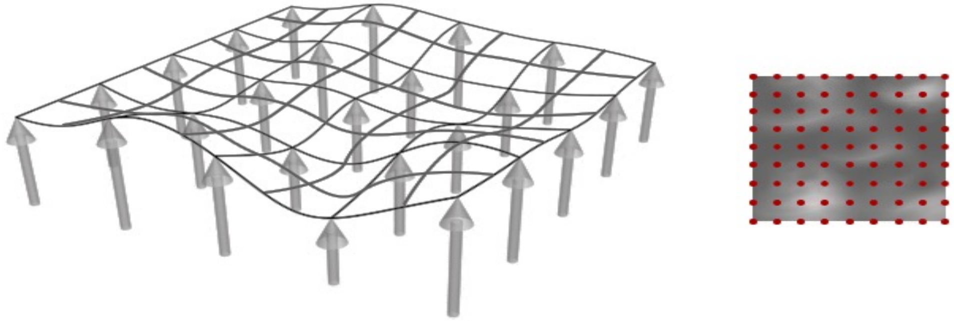
Taille image	Nb triangles
64x64	8,192
128x128	32,768
256x256	131,072
512x512	524,288
1024x1024	2,097,152

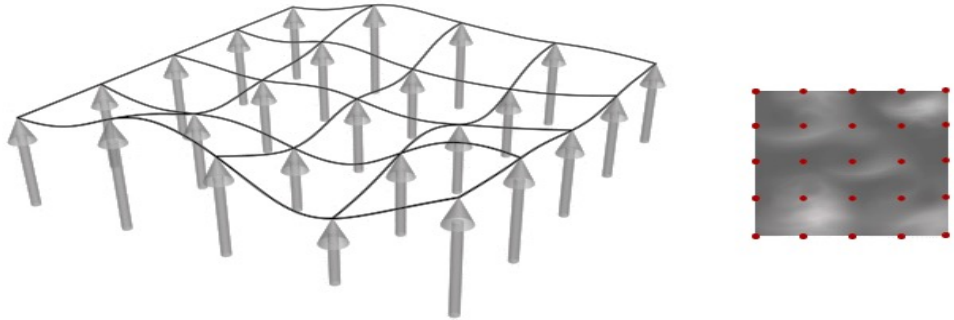
Attention : rapidement beaucoup de triangles

Exploitation de la carte de hauteur

On n’est pas obligé d’assigner à chacun des pixels de l’image une hauteur

- Réduction de la précision en sautant plusieurs points



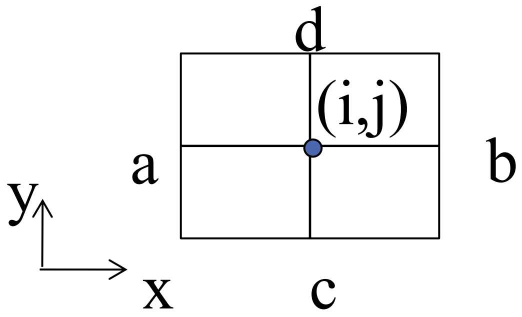


Création du terrain - Calcul des normales

Calcul de la normale à la surface qui définit le terrain

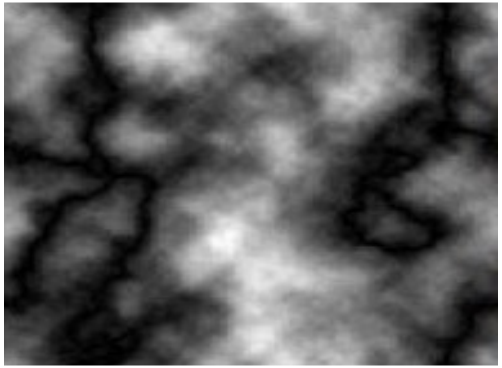
- Nécessaire pour le rendu / affichage du terrain

- Considère le point (i,j)
  - Calcul des dérivées partielles en x et y
    df/dx = **AB** ; df/dy = **CD**
  - Normale = produit vectoriel de df/dx et df/dy = **AB ∧ CD**



Exercice (en TD et TP) - Création du terrain

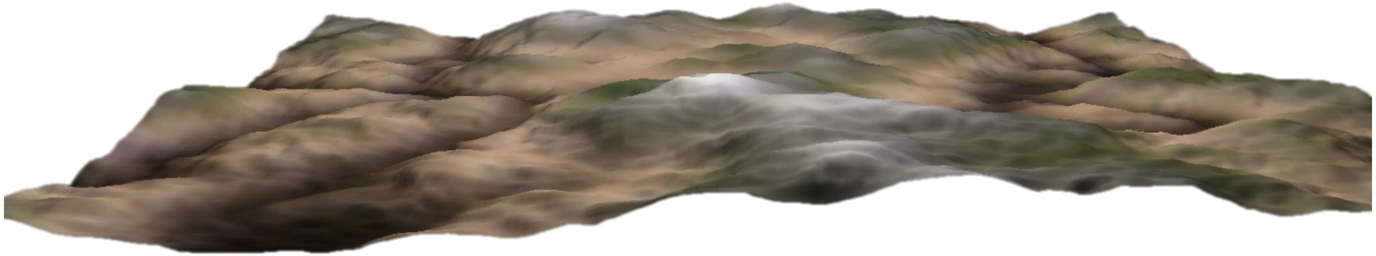
Carte d'élévation (niveau de gris)



+

Texture

=



Ce qu’il faut retenir du cours

Plusieurs modèles géométriques en fonction de l’objet à représenter / des calculs à effectuer sur cet objet

Modèle surfacique : surface implicite, quadrique

Modélisation d’un objet par extrusion / par révolution

Utilisation carte de hauteur pour modéliser un terrain