Imagerie Numérique

Rappels de morphologie mathématique

S. Jehan-Besson (d’après le cours de M.Coster)

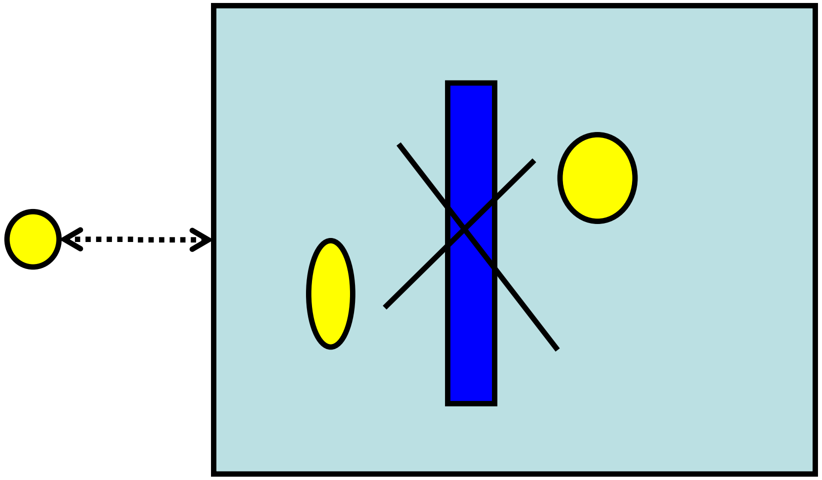
Chercheur CNRS, CREATIS

Plan

Chap. 1 : Introduction

Principe général : Analyse de structures spatiales

- <u>Morphologie</u> : analyse de la forme des objets
- <u>Mathématique</u> : basée sur la théorie des ensembles, cadre topologique



<u>Idée de base</u> : préserver ou altérer les structures de l'image en les comparant à un petit modèle (élément structurant)

Chap. 1 : Introduction

- Technique non linéaire (sup/inf)
- Initiée dans les années 60 à partir des travaux de G. Matheron et J. Serra à l'école des mines de Paris.
- Cadre axiomatique : approche ensembliste, cadre algébrique des treillis, addition et soustraction de Minkowski
- Corpus méthodologique important permettant de traiter diverses applications : image et sciences des matériaux, microscopie, imagerie médicale, indexation, segmentation en régions ...

Chap. 1 : Extraction des lignes de niveau

(a) (b) (c)

FIG. 4.6 – Chapeaux haut de forme couleur de l'image "CarteMexique2" : (a) image couleur initiale, $\mathbf{f}$, (b) chapeau haut de forme achromatique noir, $\rho_B^{A-}(\mathbf{f})$ et (c) chapeau haut de forme chromatique, $\rho_B^C(\mathbf{f})$. L'élément structurant B est toujours un carré de taille 3. Le contraste des images a été modifié en multipliant par une constante.

Chap. 1 : Segmentation

LPE : Ligne de Partage des Eaux (Watershed)

Thèse de J.Angulo Lopez

Chap. 1 : Squelettisation

❖Vaisseaux sanguins (Fouard RFIA 2004) :

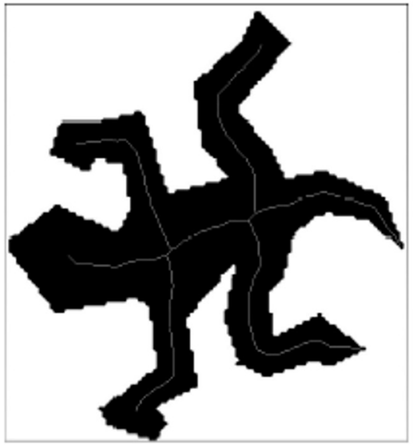
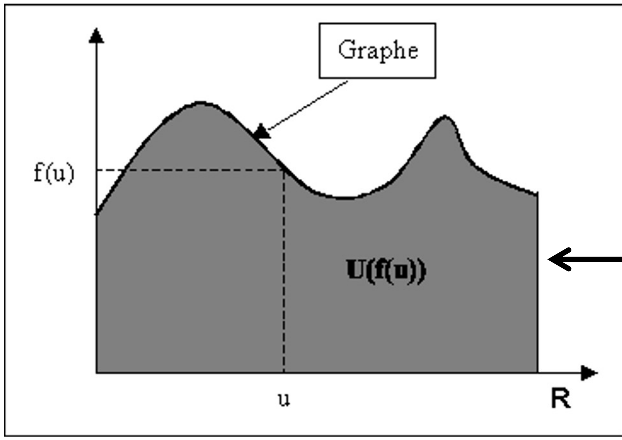
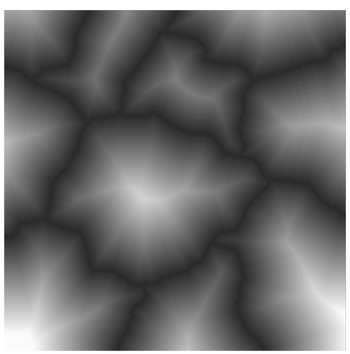


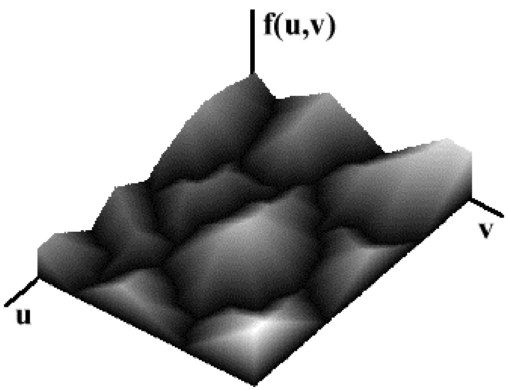
FIG. 1 – *squelette d'une image 2D.*

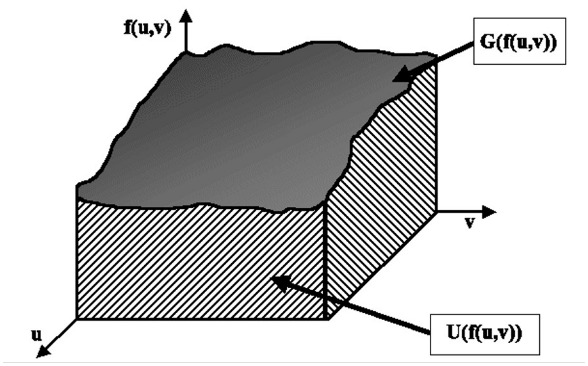
Interprétation ensembliste des images



Sous-graphe ou ombre







Chap 1 : Introduction

- **Des opérateurs**
  - Combinaison d’ opérations ensemblistes
    - Union, intersection, inclusion
  - non linéaires : basé sur des calculs sup/inf
  - Utilisation de treillis : relation d’ordre : $\subseteq$
  - non inversibles

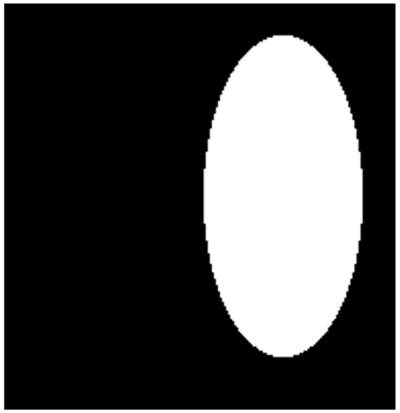
Théorie des ensembles

Cadre algébrique : Treillis

- **Des propriétés**
  - Algébriques
  - extensivité, croissance
  - Topologiques
  - continuité, relations de proximités ....

Plan

2.1 Notations et conventions



- Espace de référence : E
- Ensembles : **X**, **Y**, …
- Points : x,y,z ...

2.1. Egalité et inclusion

•Egalité

- Deux ensembles sont égaux si et seulement si ils sont formés des mêmes éléments.

•Inclusion

- X est inclus dans Y, si tous les éléments de l'ensemble X sont des éléments de l'ensemble Y

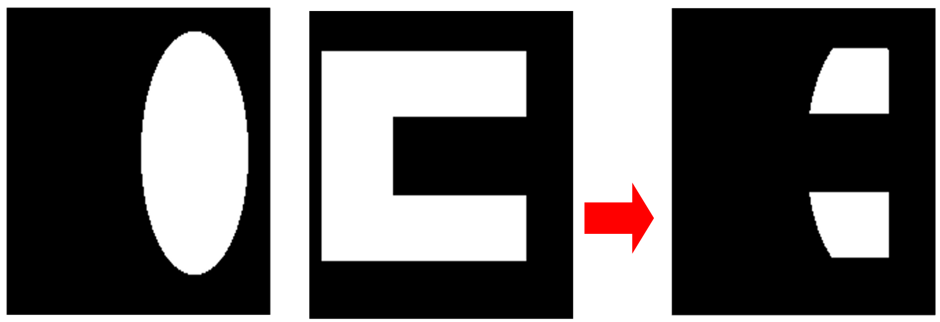
$$\mathbf{X} \subseteq \mathbf{Y} \text{ si et seulement si } \mathbf{x} \in \mathbf{X} \Rightarrow \mathbf{x} \in \mathbf{Y}$$

- Propriétés de l'inclusion :
- Réflexivité : $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{X}$
- Transitivité : $(\mathbf{X} \subseteq \mathbf{Y} \text{ et } \mathbf{Y} \subseteq \mathbf{Z}) \Rightarrow (\mathbf{X} \subseteq \mathbf{Z})$
- Antisymétrie : $(\mathbf{X} \subseteq \mathbf{Y} \text{ et } \mathbf{Y} \subseteq \mathbf{X}) \Rightarrow (\mathbf{X} = \mathbf{Y})$

2.2. Intersection et ses propriétés

- **Intersection**

$$Z = X \cap Y = \{x \,;\, x \in X \text{ et } x \in Y\}$$



Ensemble X Ensemble Y Ensemble $X \cap Y$

- **Propriétés**
- Commutative
- Associative
- Idempotente
- Autres propriétés :

$$X \cap \varnothing = \varnothing$$

$$(X \cap Y) \subseteq Y \quad \text{et} \quad (X \cap Y) \subseteq X$$

$$(X \subseteq Y) \Rightarrow (X \cap Y) = X$$

2.3. Union et ses propriétés

- **Union**

$$Z = X \cup Y = \{x \,;\, x \in X \text{ ou } x \in Y\}$$

Ensemble X — Ensemble Y — Ensemble $X \cup Y$

- **Propriétés**
- Commutative
- Associative
- Idempotente
- Autres propriétés :

$$(X \cup \emptyset) = X$$

$$Y \subseteq (X \cup Y) \quad \text{et} \quad X \subseteq (X \cup Y)$$

$$(X \subseteq Y) \Rightarrow (X \cup Y) = Y$$

2.4. Relations entre union et intersection

- Relations entre l'union et l'intersection

➢ **L'intersection distributive par rapport à l'union :**

$$\mathbf{X} \cap (\mathbf{Y} \cup \mathbf{Z}) = (\mathbf{X} \cap \mathbf{Y}) \cup (\mathbf{X} \cap \mathbf{Z})$$

➢ **La réunion est distributive par rapport à l'intersection :**

$$\mathbf{X} \cup (\mathbf{Y} \cap \mathbf{Z}) = (\mathbf{X} \cup \mathbf{Y}) \cap (\mathbf{X} \cup \mathbf{Z})$$

- Ensembles disjoints

$$(\forall (\mathbf{X} \neq \varnothing, \mathbf{Y} \neq \varnothing)) \quad \mathbf{X} \cap \mathbf{Y} = \varnothing$$

- Ensembles qui se rencontrent

$$(\forall (\mathbf{X} \neq \varnothing, \mathbf{Y} \neq \varnothing)) \quad \mathbf{X} \cap \mathbf{Y} \neq \varnothing \Longrightarrow (\mathbf{X} \Uparrow \mathbf{Y}) = (\mathbf{X} \cap \mathbf{Y} \neq \varnothing)$$

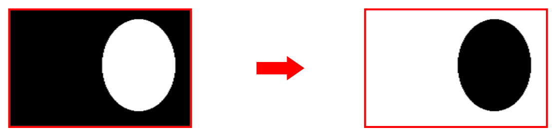
NOTATION

2.6. Complémentation et ses propriétés

• Complémentation

➢ **Définition**

$$C_E(X) = X^C = \bar{X} = \{x \,;\, x \in E \text{ et } x \notin X\}$$



➢ **Propriétés**

$$(X^C)^C = X \qquad X \cup X^C = E \qquad X \cap X^C = \emptyset$$

➢ **Formules de Morgan**

$$(X \cap Y)^C = (X^C) \cup (Y^C)$$

$$(X \cup Y)^C = (X^C) \cap (Y^C)$$

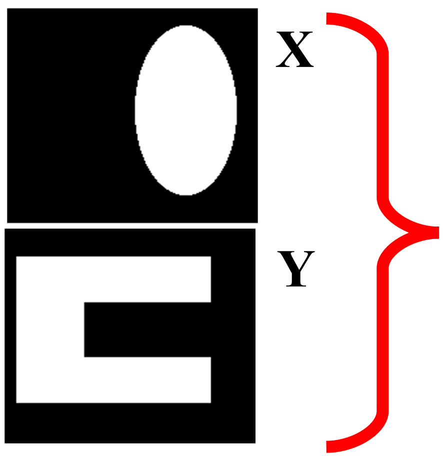
2.7. Différence

•Différence

➢ **Définition**

- ➢ La différence entre deux ensembles X et Y est l'ensemble des éléments de X qui n'appartiennent pas à Y

$$\mathbf{X - Y = \{x \,;\, x \in X \text{ et } x \notin Y\}}$$



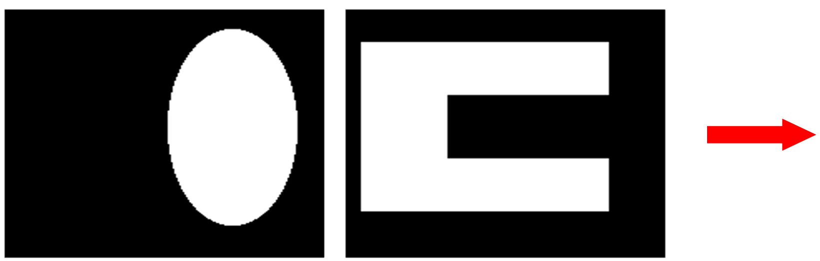
?

X - Y **Y - X**

2.8. Différence symétrique

- **Différence symétrique**
- **Définition**
- La différence symétrique entre deux ensembles X et Y est l'ensemble des éléments qui n'appartiennent qu'à X ou à Y.

$$\mathbf{X / Y = X \,\Delta\, Y = (X \cup Y) - (X \cap Y)}$$



?

X **Y** **X / Y**

Plan

Chap. 3 : Element structurant

❖Rappel :

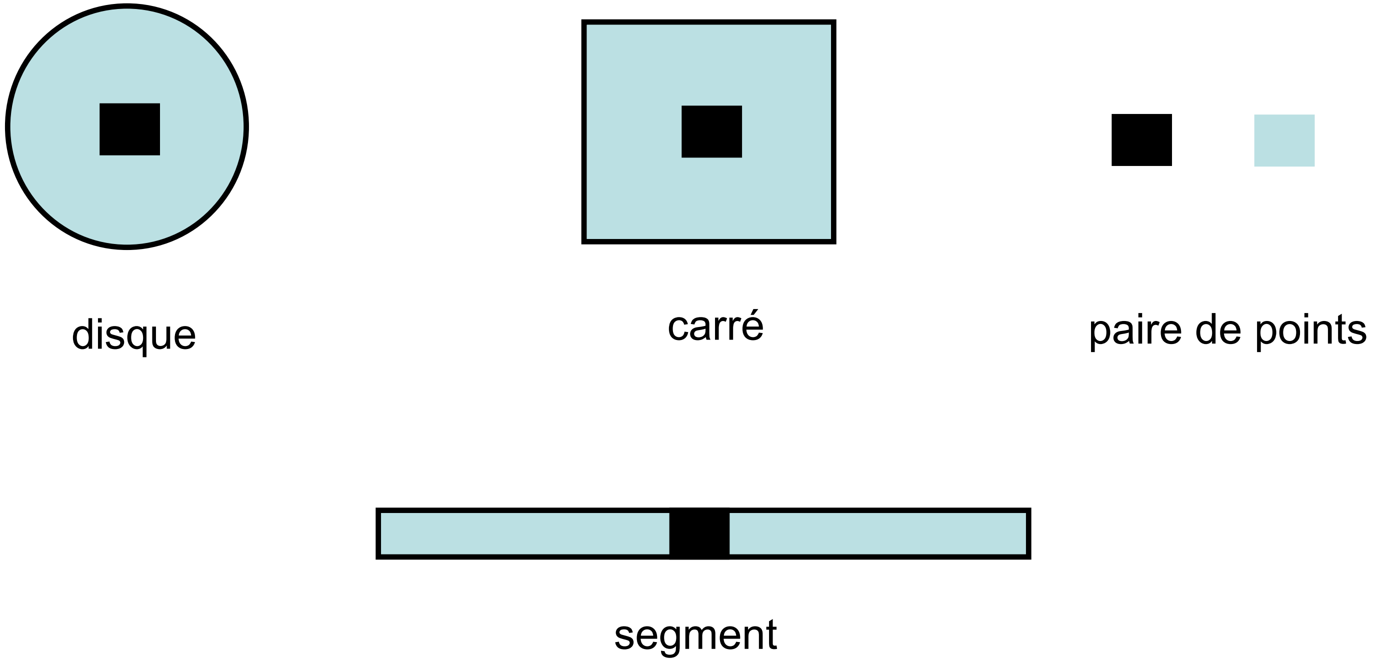
L'idée de base de la morphologie mathématique est de comparer l'ensemble à analyser avec un ensemble de géométrie connue appelé élément structurant.

3.1 Définition de l'élément structurant

- Soit B un élément structurant, il possède les caractéristiques suivantes :
  - sa forme est connue et de taille λ
  - Il est repéré par son origine O (ce point peut appartenir ou non à B)

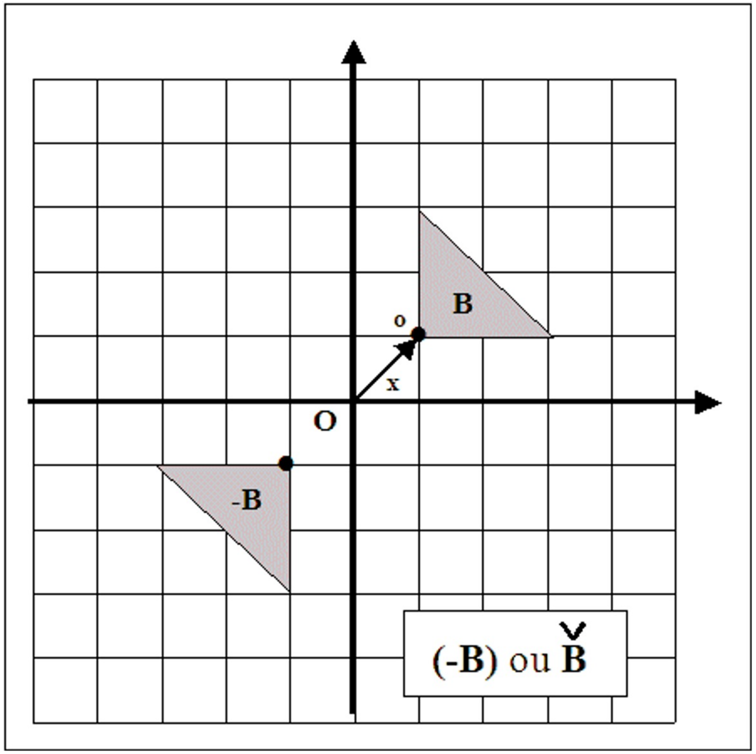
3.1. Exemples d'éléments structurants

❖Éléments structurants plats (flat)

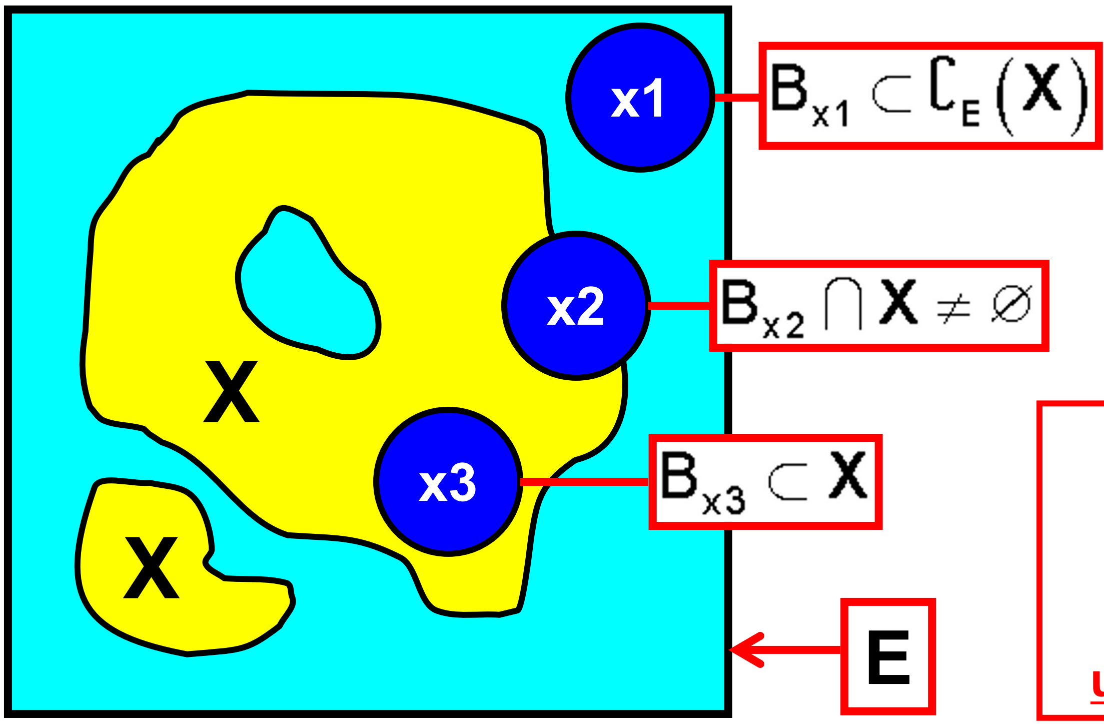


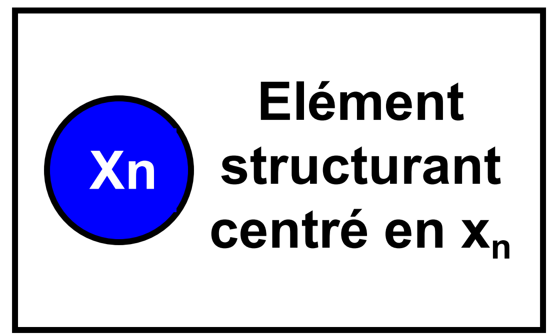
3.2. Opérations sur l'élément structurant

❖Elément structurant : translation et transposition



3.3 Tranformation en tout ou rien





Toutes les réponses positives à une question ensembliste donnée donnent
<u>un ensemble transformé</u>

Définition de la transformation en tout ou rien :

3.3 Tranformation en tout ou rien

- Les transformations morphologiques de base
  - L'érosion et la dilatation
- En associant érosion et dilatation on construit d'autres opérateurs :
  - L'ouverture et la fermeture
- Les résidus morphologiques
- Par différence symétrique entre une image et son transformé, on obtient un résidu morphologique
- Exemple : le gradient morphologique

Plan

Chapitre 1 : Introduction

Chapitre 2 : Opérateurs ensemblistes de base

Chapitre 3 : Element structurant

Chapitre 4 : Erosion et Dilatation ensemblistes

Chapitre 5 : Erosion et dilatation fonctionnelles

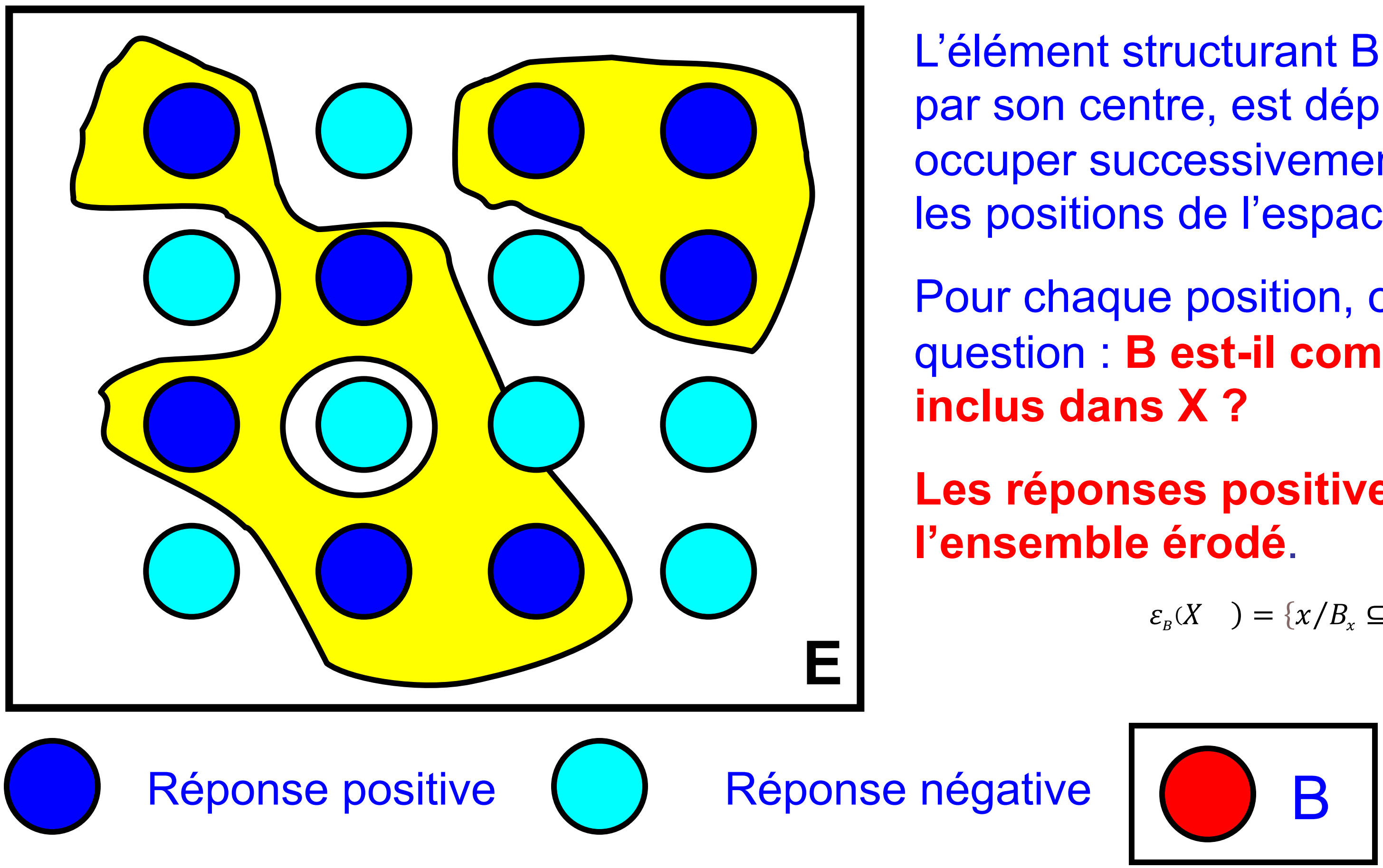
Chapitre 6 : Ouverture morphologique

Chapitre 7 : Fermeture morphologique

Chapitre 8 : Ouverture et fermeture algébriques

Chapitre 9 : Résidu morphologique

4.1.1 Définition de l'érosion morphologique sur les ensembles



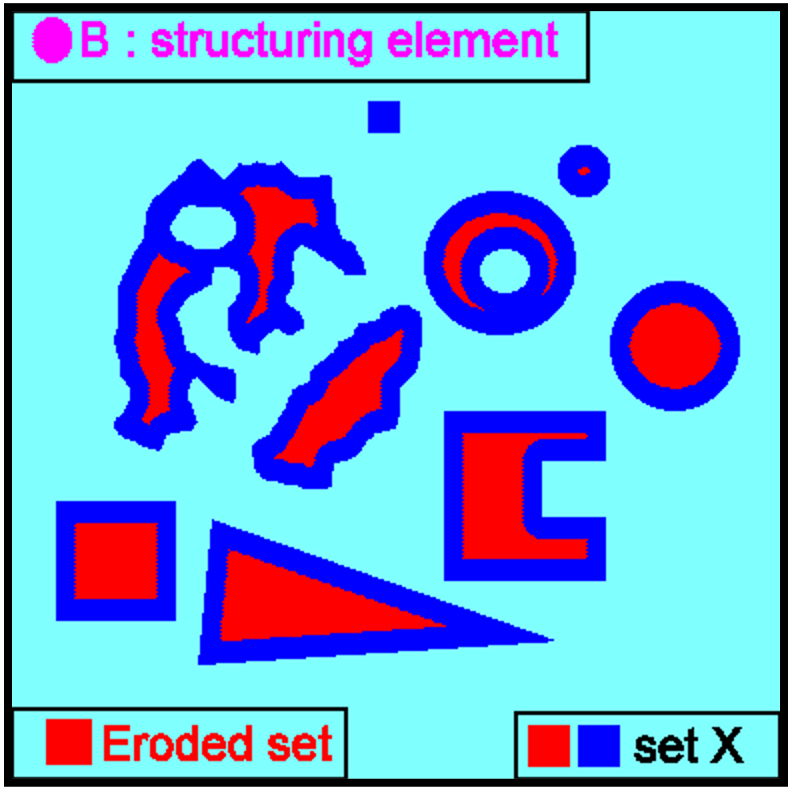
L'élément structurant B, repéré par son centre, est déplacé pour occuper successivement toutes les positions de l'espace E.

Pour chaque position, on pose la question : **B est-il complètement inclus dans X ?**

Les réponses positives forment l'ensemble érodé.

$$\varepsilon_B(X) = \{x / B_x \subseteq X\}$$

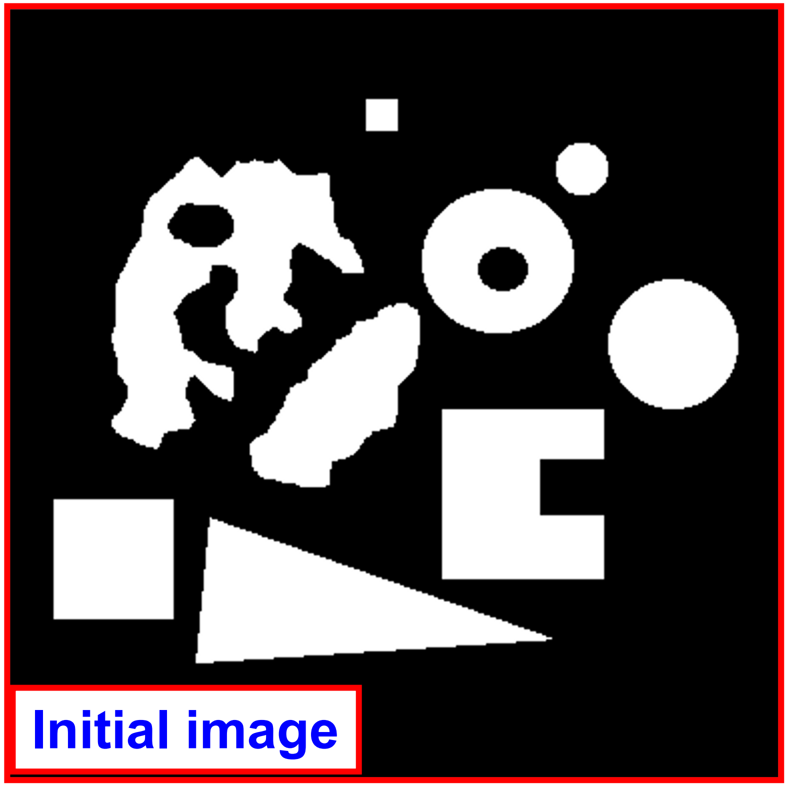
4.1.1 Exemple d'érosion

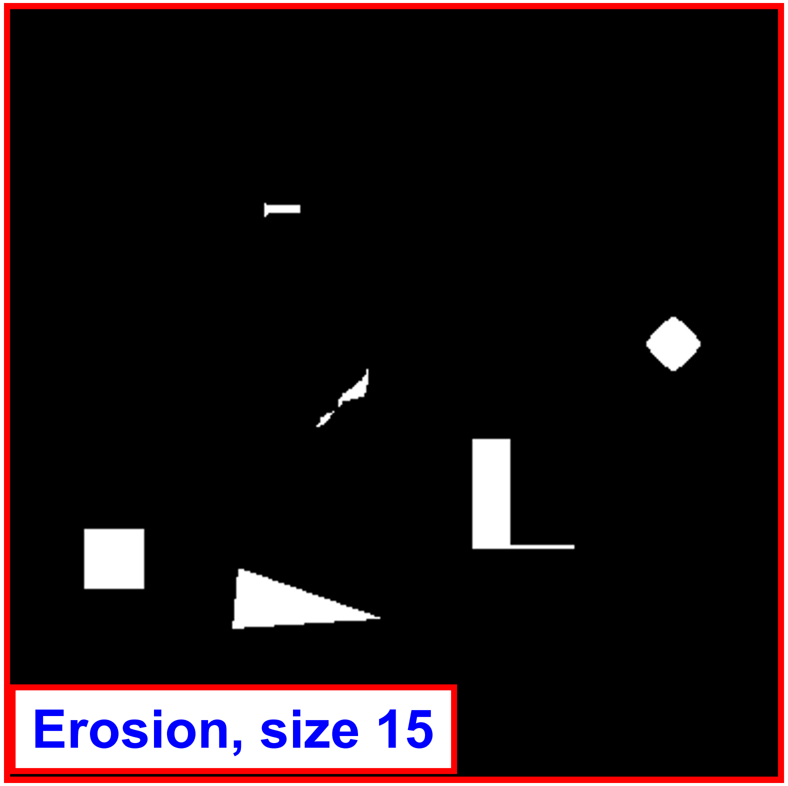


❖Propriétés qualitative avec un élément structurant circulaire

- La taille des objets décroît
- Un objet avec des concavités ou des trous peut être divisés en plusieurs
- Les petits objets et les détails disparaissent

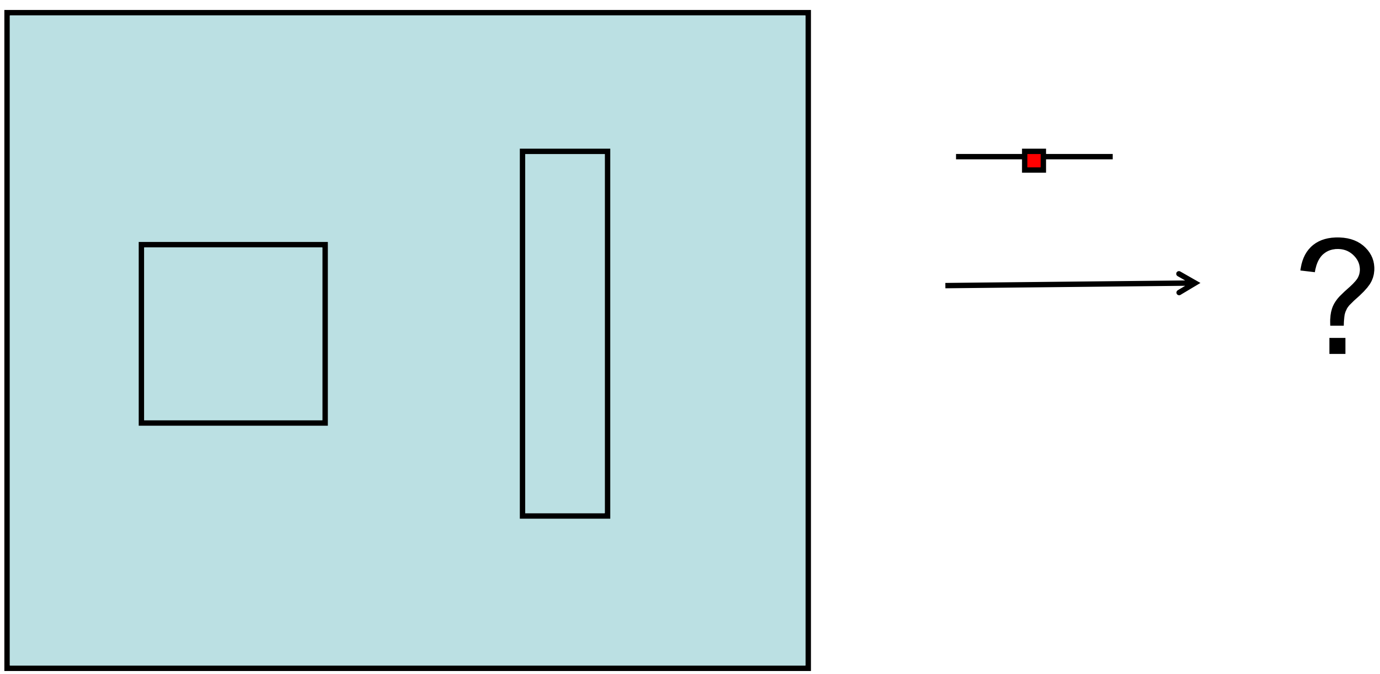
4.1.1 Erosion avec un élément structurant carré de taille croissante



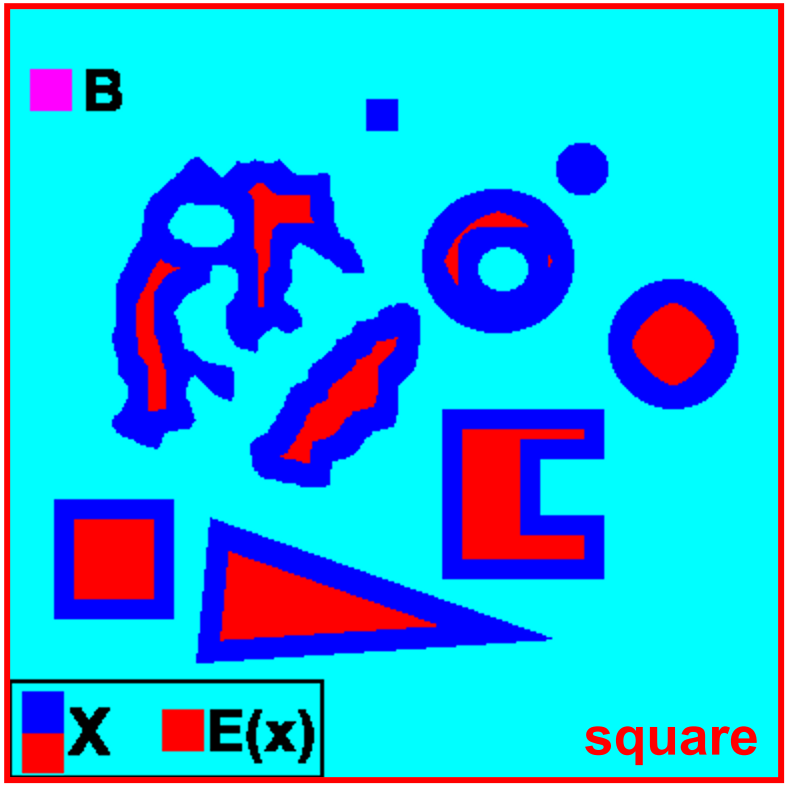


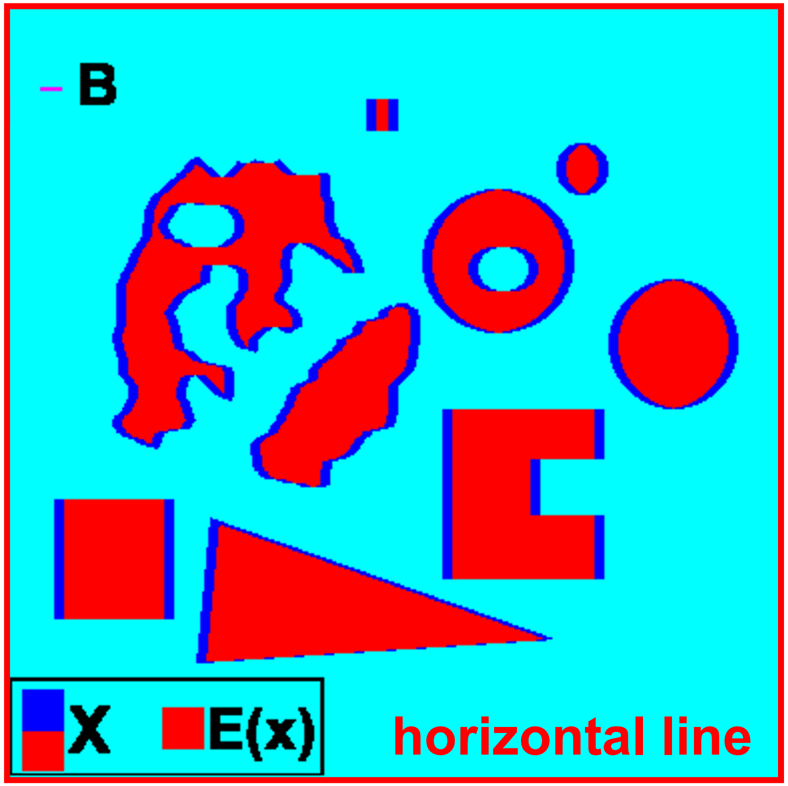
4.1.1 Erosion avec des éléments structurants de forme différente

❖ **Érosion avec un élément structurant horizontal :**



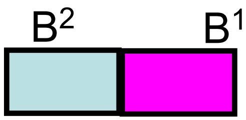
4.1.1 Erosion avec des éléments structurants de forme différente

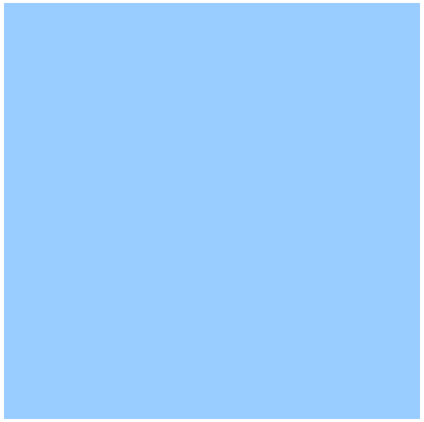




4.1.1 Erosion avec des éléments structurants de forme différente

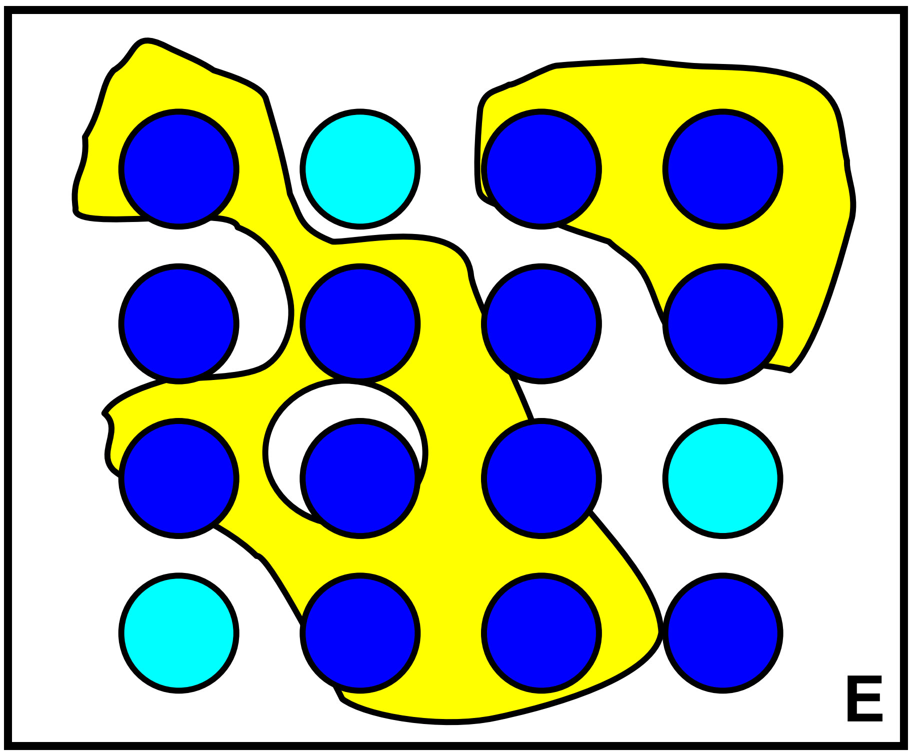
❖Utilisation d’un élément structurant en deux parties (Hit or Miss Transformation) = inclusion de B1 dans l'ensemble et de B2 dans le complémentaire de l'ensemble.





?

4.2.1 Définition de la dilatation morphologique pour les ensembles

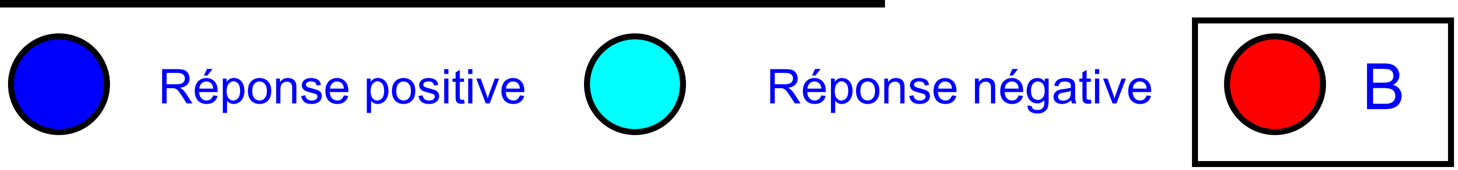


L'élément structurant B, repéré par son centre, est déplacé pour occuper successivement toutes les positions de l'espace E. Pour chaque position, on pose la question :

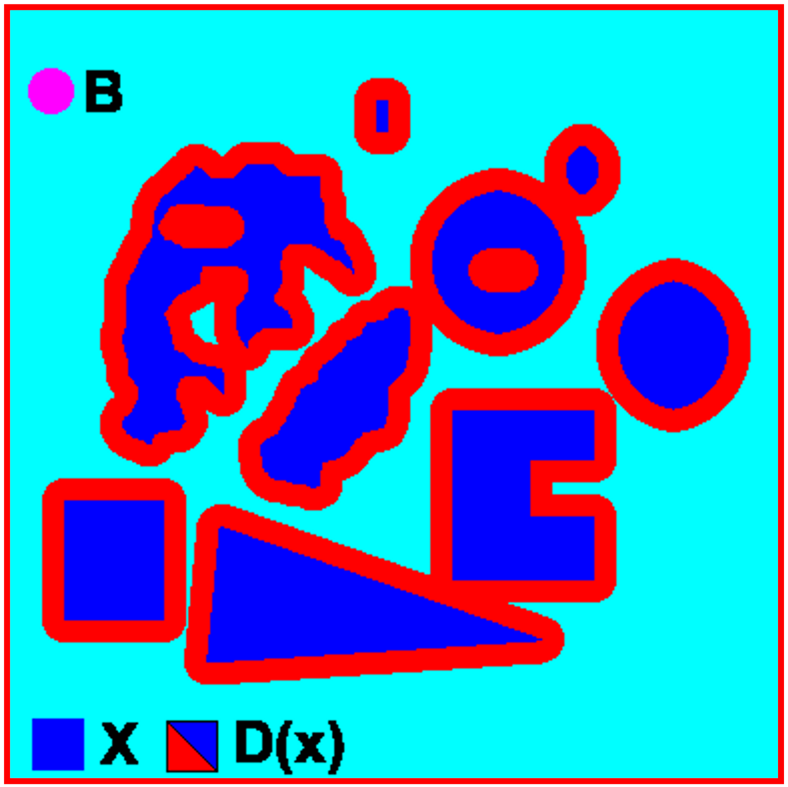
B intersecte-t-il X ?

Les positions positives forment un nouvel ensemble : **le dilaté de X par B.**

$$\delta_B(X) = \{x : B_x \cap X \neq \emptyset\}$$



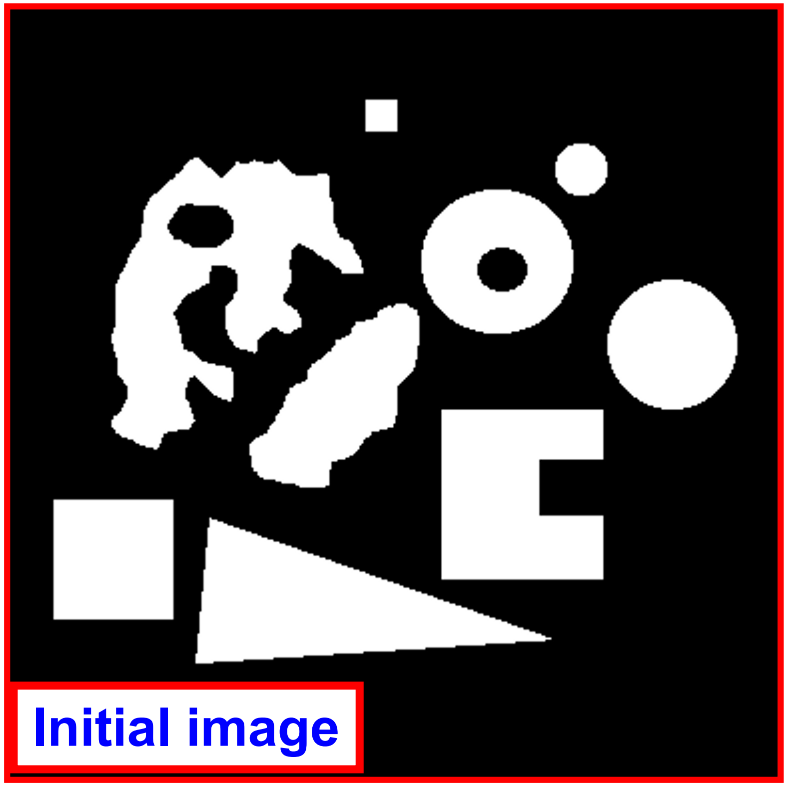
4.2.1. Exemple de dilatation

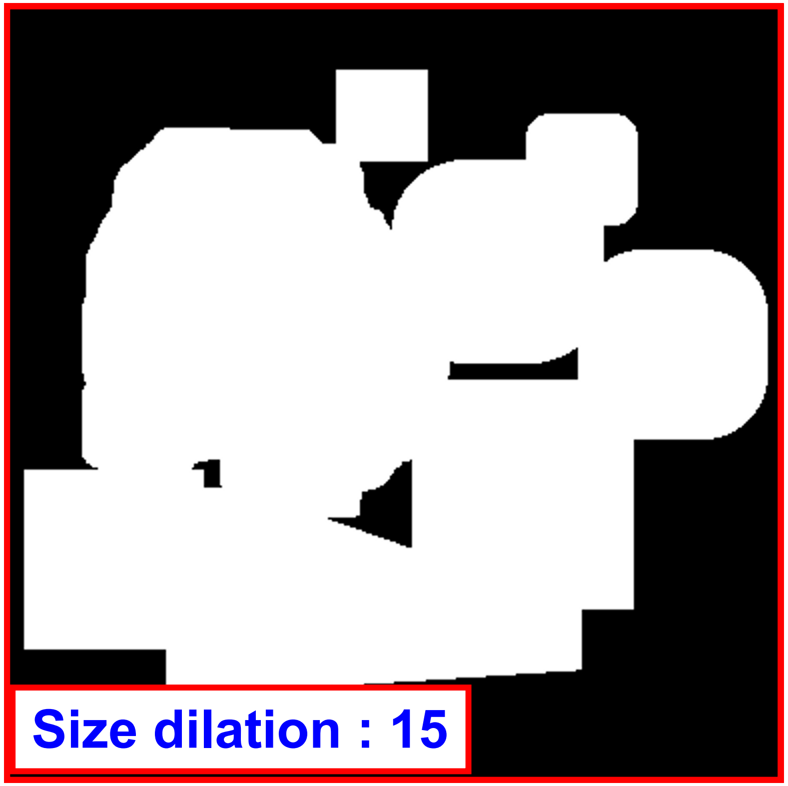


❖Propriétés qualitative avec un élément structurant circulaire

- La taille des objets augmente
- Les trous et les concavités peuvent être bouchés
- Les objets voisins peuvent se connecter
- Des petits détails disparaissent

4.2.1 Dilatation avec un élément structurant carré de taille croissante



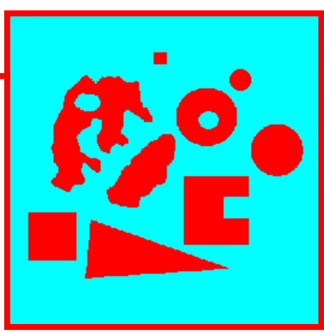


4.3.1 Relation entre l'érosion et la dilatation

Les 2 transformations ne sont pas indépendantes. On obtient le même résultat en érodant X ou en dilatant le complémentaire de X et en appliquant une complémentation.

L'érosion et la dilatation sont 2 opérations duales vis-à-vis de la complémentation :

$$\boxed{\varepsilon_B(X) = C_E\left(\delta_B\left(C_E(X)\right)\right)}$$

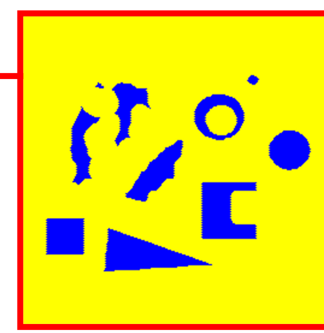


X

$C_E(X)$

$\delta_B\left(C_E(X)\right)$

$\varepsilon_B(X)$



4.3.2. Propriétés de la dilatation

Propriétés algébriques :

- Extensivité : $X \subseteq \delta_B(X)$
- Croissance : $X \subseteq Y \Rightarrow \delta_B(X) \subseteq \delta_B(Y)$
- non idempotente : $\delta_B(\delta_B(X)) \neq \delta_B(X)$

Propriétés topologiques :

- préserve la connexité
- opération non homotopique

4.3.2. Propriétés de l'érosion

Propriétés algébriques :

- Anti-extensivité : $\epsilon_B(X) \subseteq X$
- Croissance : $X \subseteq Y \Rightarrow \epsilon_B(X) \subseteq \epsilon_B(Y)$
- non idempotente : $\epsilon_B(\epsilon_B(X)) \neq \epsilon_B(X)$

Propriétés topologiques :

- ne préserve pas la connexité
- opération non homotopique
- semi-continuité (supérieurement)

Plan

Définition de l'érosion pour les fonctions

Ensembles

$\varepsilon_B(X) = \{x / B_x \subseteq X\}$

$$\epsilon_B(X) = X \ominus \check{B}$$

Fonctions

Érosion = Inf. des fonctions translatées de -b

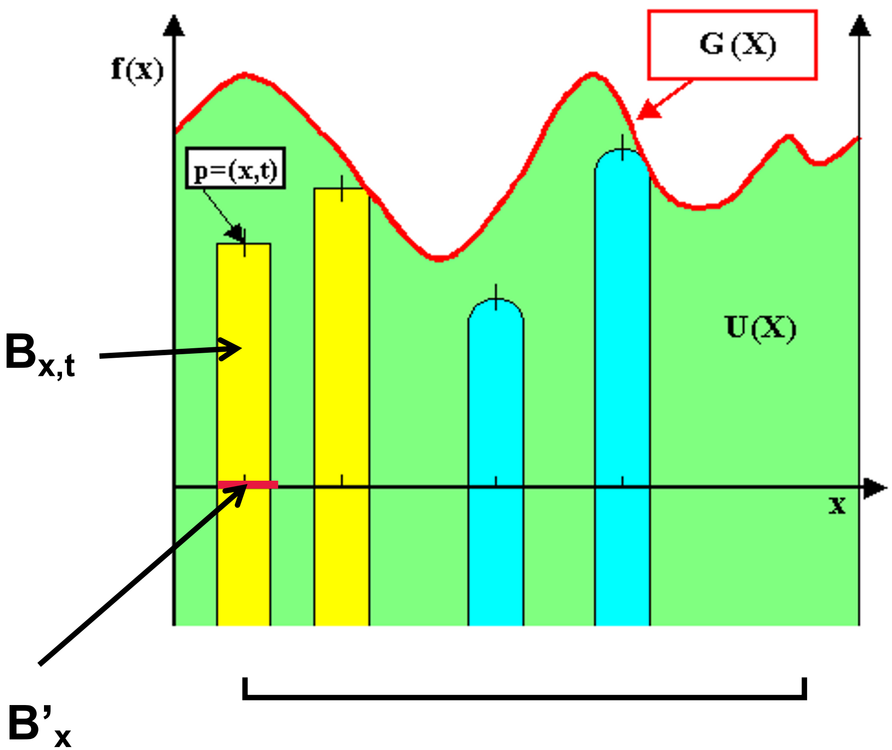
$$\epsilon_b(f) = \wedge_{b \in B'} f_{-b}$$

$$\epsilon_b(f(x)) = \inf_{b(x) \in B'} (f(x) - b(x))$$

Nature de l'élement structurant

Elément structurant B composé d'un élément géométrique B' et d'une fonction b tel que :

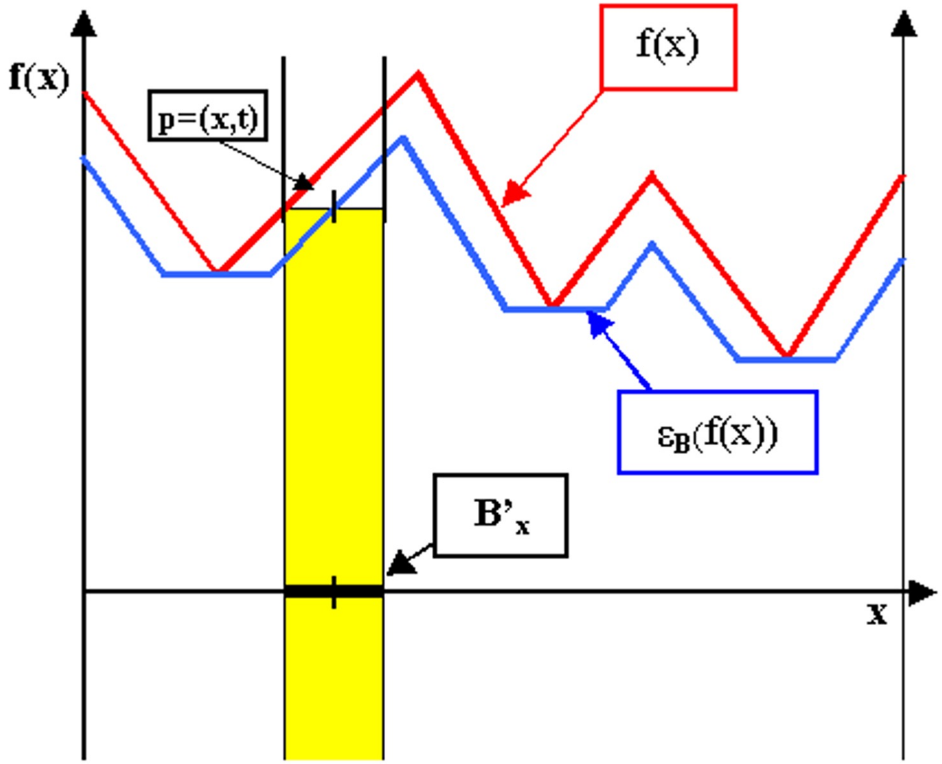
$$\mathrm{b}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{x} \in \mathbf{B'} \Rightarrow \mathrm{b}(\mathbf{x}) \neq -\infty \\ \mathbf{x} \notin \mathbf{B'} \Rightarrow \mathrm{b}(\mathbf{x}) = -\infty \end{cases}$$



Elément structurant plat :

$$\mathrm{b}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{x} \in \mathbf{B'} \Rightarrow \mathrm{b}(\mathbf{x}) = 0 \\ \mathbf{x} \notin \mathbf{B'} \Rightarrow \mathrm{b}(\mathbf{x}) = -\infty \end{cases}$$

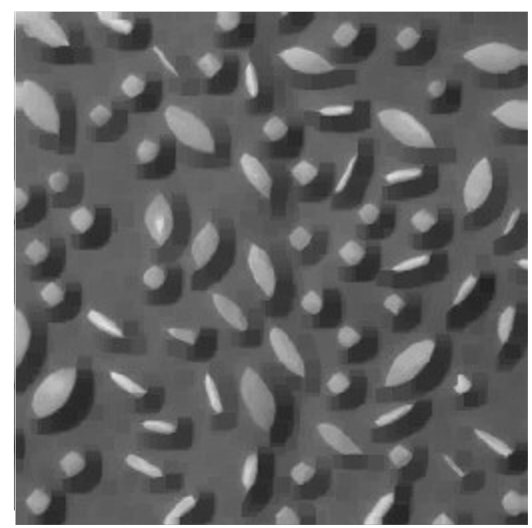
Erosion d'une fonction avec un élément structurant plat



Deux manières d'appréhender l'érosion :

$$\epsilon_b(f(x)) = \inf_{b(x)\in B'} (f(x) - b(x))$$

$$\epsilon_B(f) = \epsilon_B(U(f)) = \{(x,t) : B'_{x,t} \subseteq U(f(x))\}$$



Erosion de taille 3

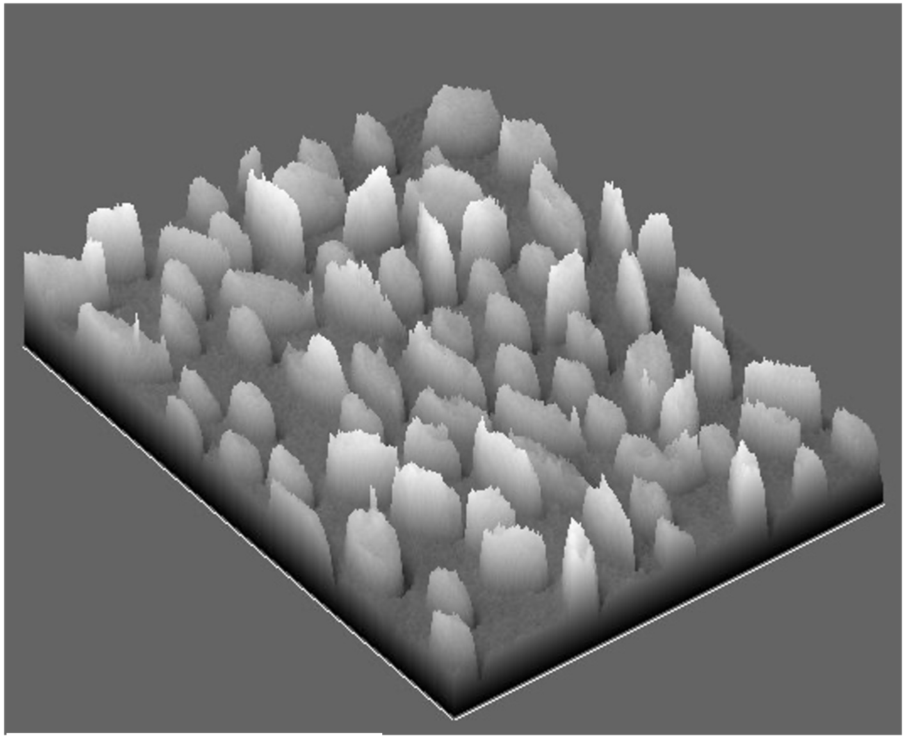
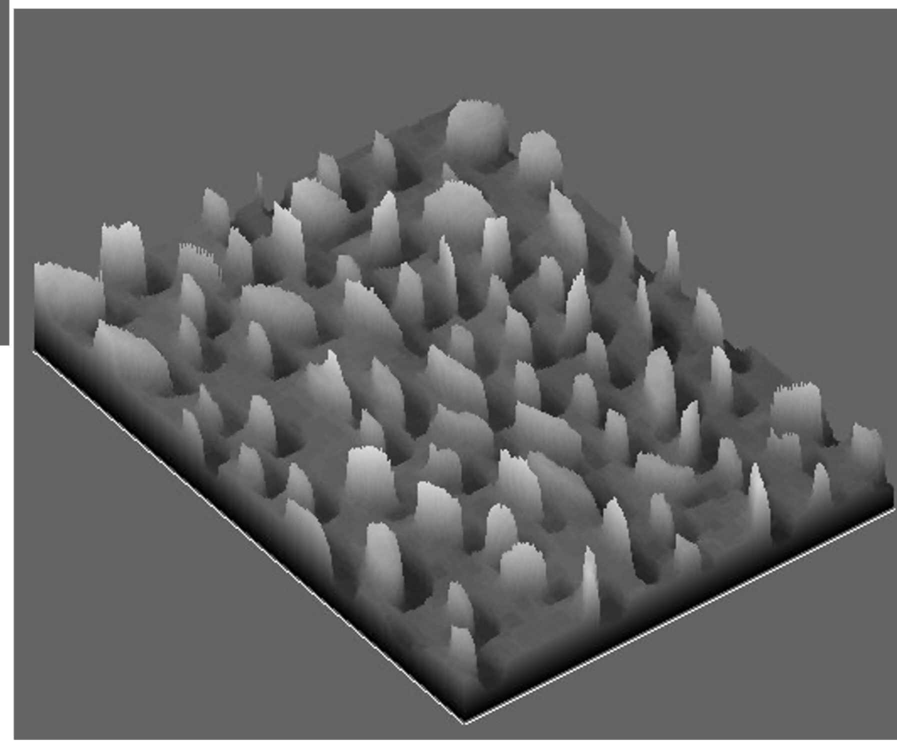


Image initiale

Erosion de taille 3



L’image érodée est plus foncée, les pics se rétrécissent ou bien disparaissent

Définition de la dilatation pour les fonctions

Ensembles

$\delta_B(X \quad) = \{x / B_x \Uparrow X\}$

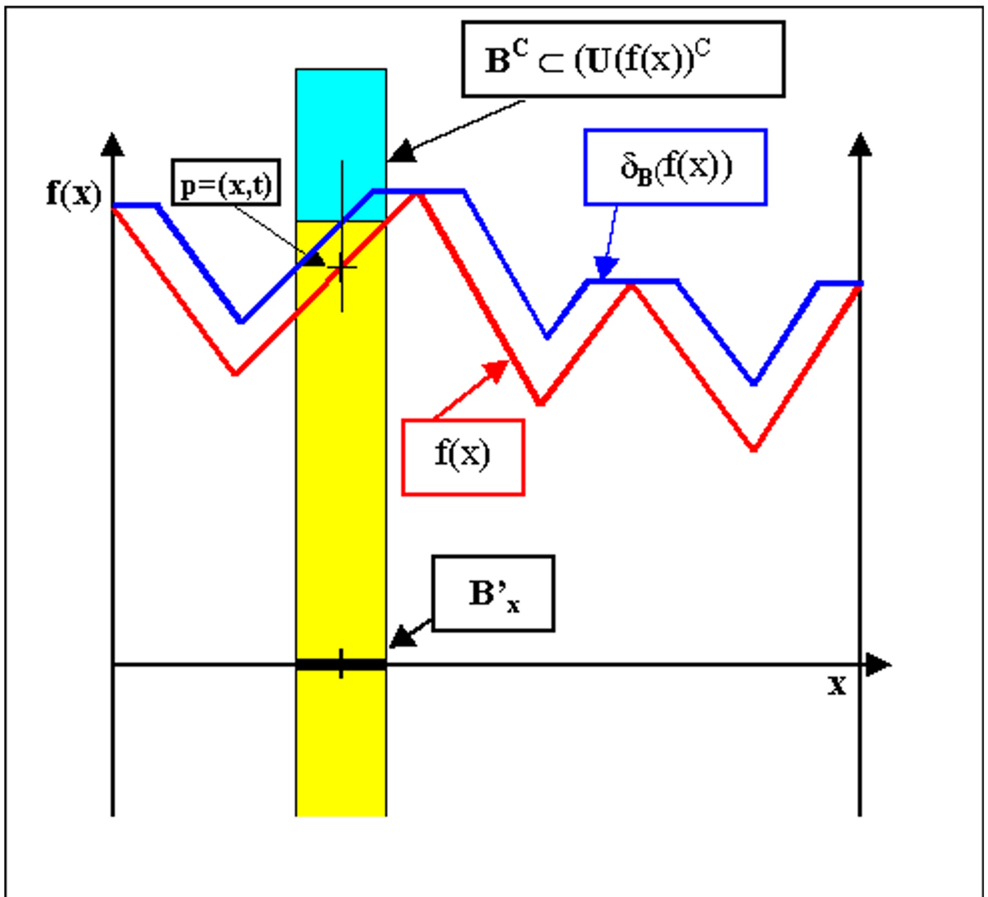
Fonctions

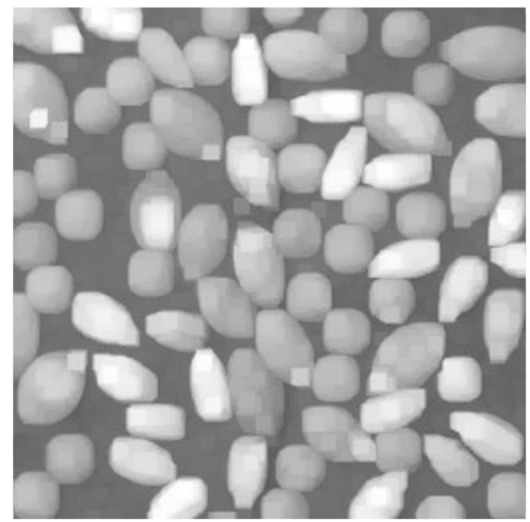
$$\delta_b(f) = \vee_{b \in B'} f_{-b}$$

$$\delta_b(f(x)) = \sup_{b(x) \in B'} (f(x) - b(x))$$

Dilatation avec un élément structurant plat

$$\delta_B(f) = \delta_B(U(f)) = \{(x,t) : B'_{x,t} \cap U(f(x)) \neq \emptyset\}$$





Dilatation taille 3

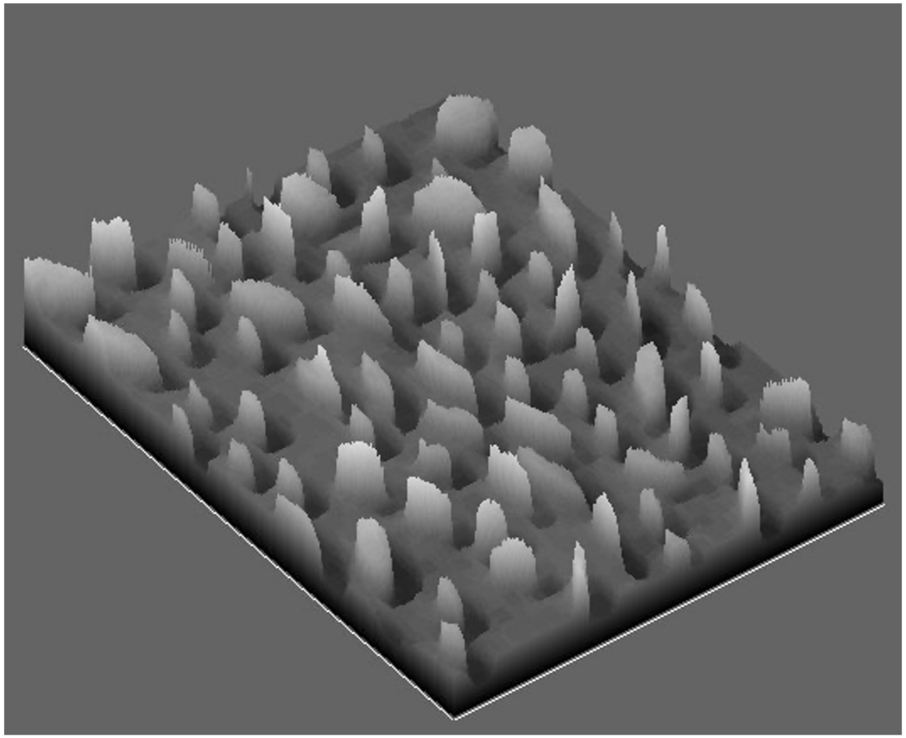
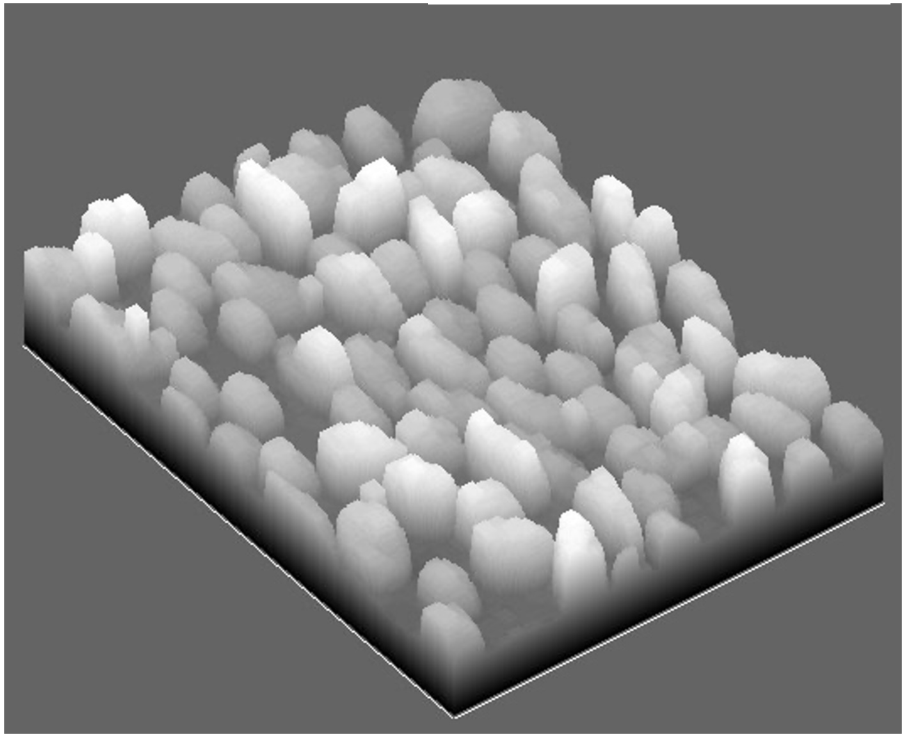


Image initiale

Dilatation taille 3



L'image dilatée est plus claire
Les vallées étroites
disparaissent

Érosion/Dilatation sur les fonctions

Érosion
(ES taille 5) (inf)

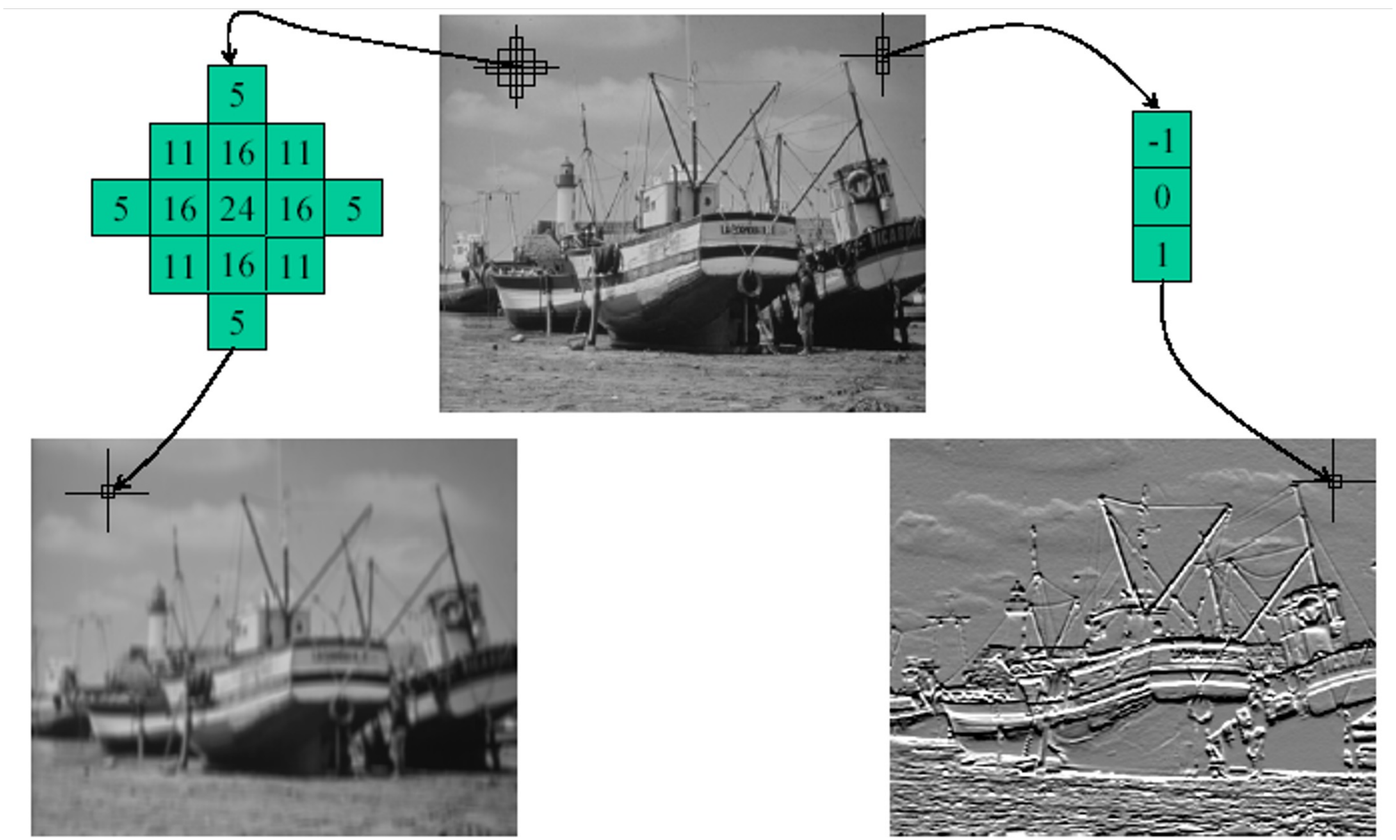
Dilatation
(ES taille 5) (sup)

ex. : 4-voisinage

Erosion : Minimum des intensités
(sur un voisinage défini par B)

Dilatation : Maximum des intensités
(sur un voisinage défini par B)

Traitement linéaire / non linéaire



Filtre passe-bas

Gradient vertical

Source : A. Manzanera, ensta

Plan

Résidus morphologiques

❖ Définition pour les ensembles:

- **Obtention d'un résidu morphologique par différence symétrique**
  - ✓ entre l'ensemble de départ X et son transformé $\Psi(X)$
  - ✓ entre deux ensembles transformés $\Psi_1(X)$ et $\Psi_2(X)$

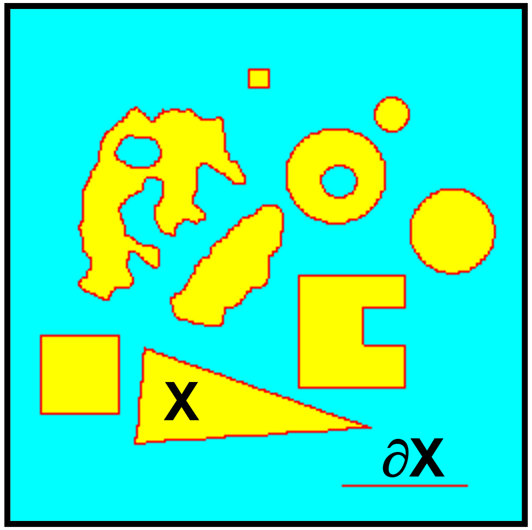
❖ Définition pour les fonctions:

- **Obtention d'un résidu morphologique par différence arithmétique**
  - ✓ entre l'ensemble de départ f(x) et $\Psi(f(x))$
  - ✓ entre $\Psi_1(f(x))$ et $\Psi_2(f(x))$

Résidus morphologiques

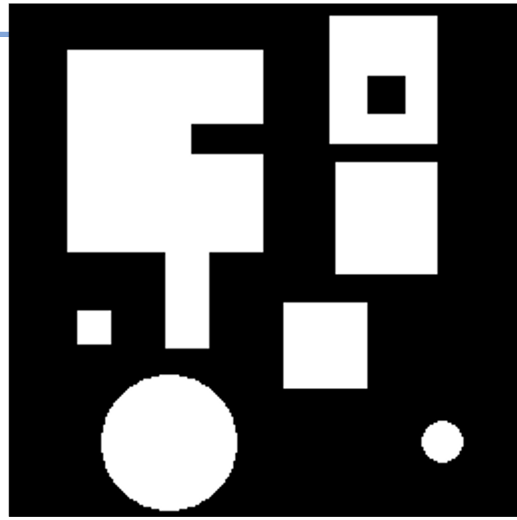
Exemple : Frontière de X

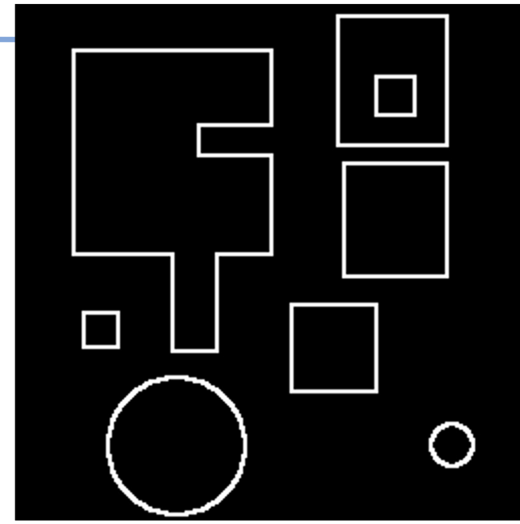
$$\boxed{\partial_{int} X = X / \varepsilon_{1B}(X)}$$



Élément structurant de taille unitaire

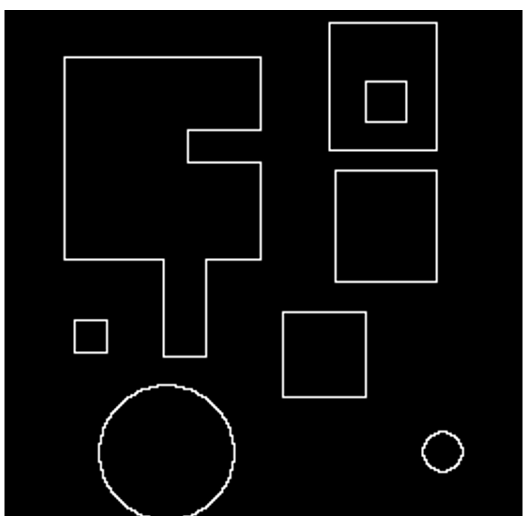
Gradient morphologique

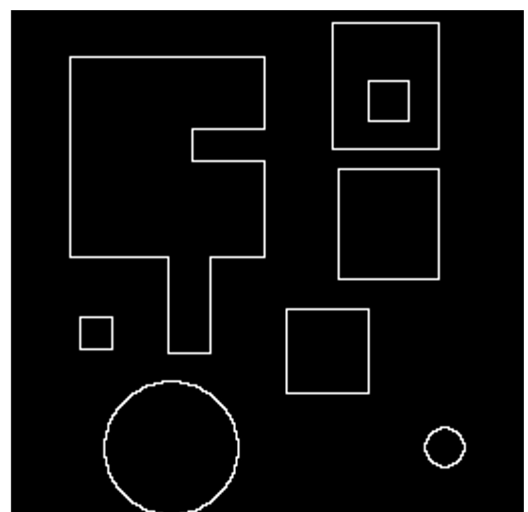




Gradient symétrique (2 pixels)

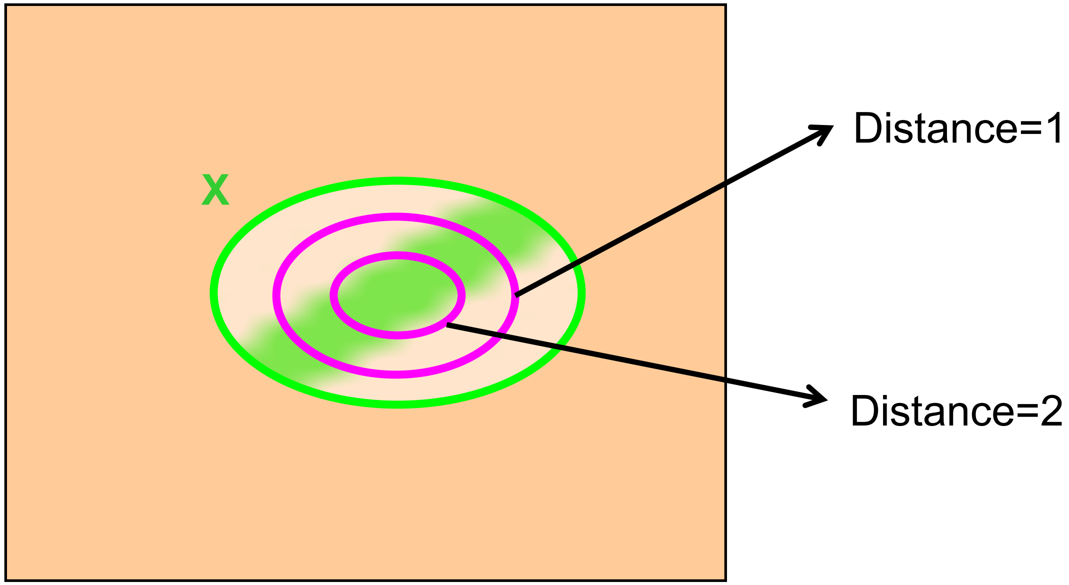
Gradient interne (1 pixel)





Gradient externe (1 pixel)

Distance



Distance

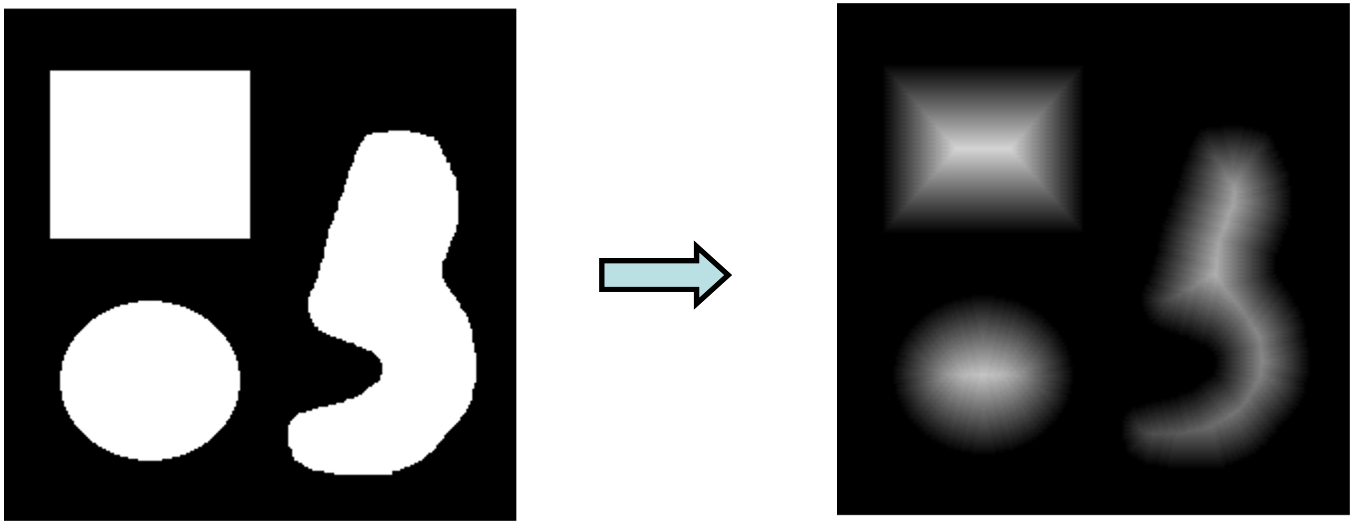
❖ Obtention de la distance interne à partir de l'érosion

▪ Algorithme :

```
        bin1=image de départ
•Création d'une image binaire vide grey0
•Recopie de bin1 dans grey0 (f(x)=1 si x∈X, 0 sinon)
•Tant que bin1 non vide faire
                bin1 ← ε1B(bin1)
                grey0 ← grey0 + bin
            Fin tant que
          grey0 = fonction distance + 1
```

→ Plus le pixel résiste à l'érosion, plus il est loin de la frontière

Distance



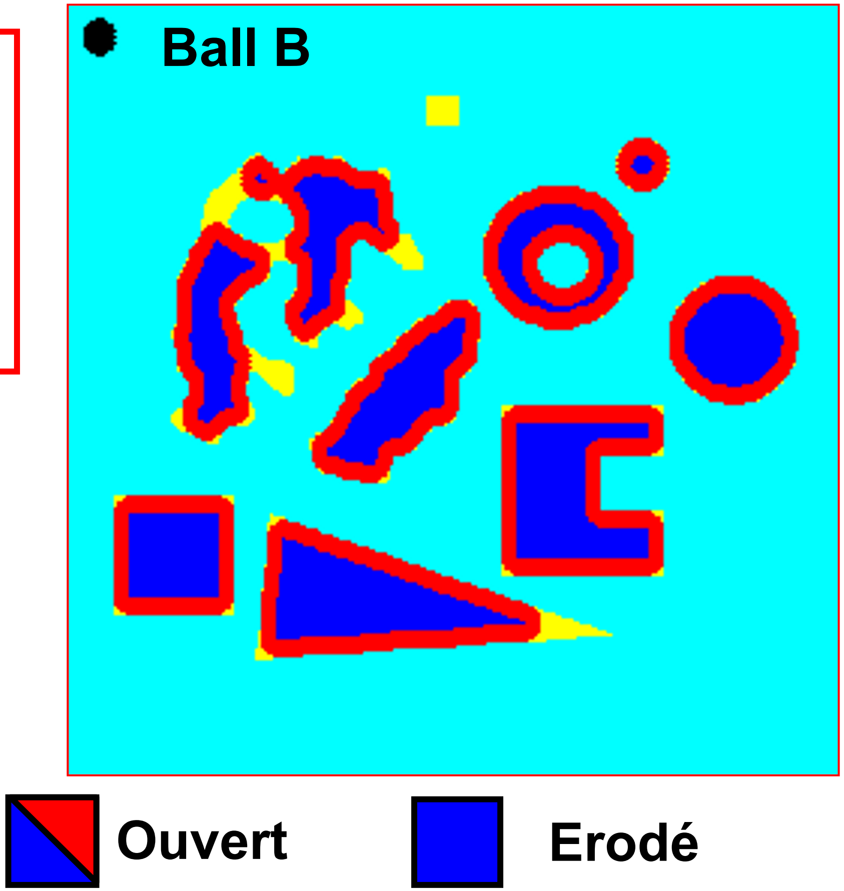
Plan

Définition de l'ouverture morphologique

<u>Ouverture par **B** :</u>

érosion par l'élément structurant **B** suivie par une dilatation avec l'élément transposé.

$$\gamma_B(X) = \delta_{\check{B}}(\epsilon_B(X))$$

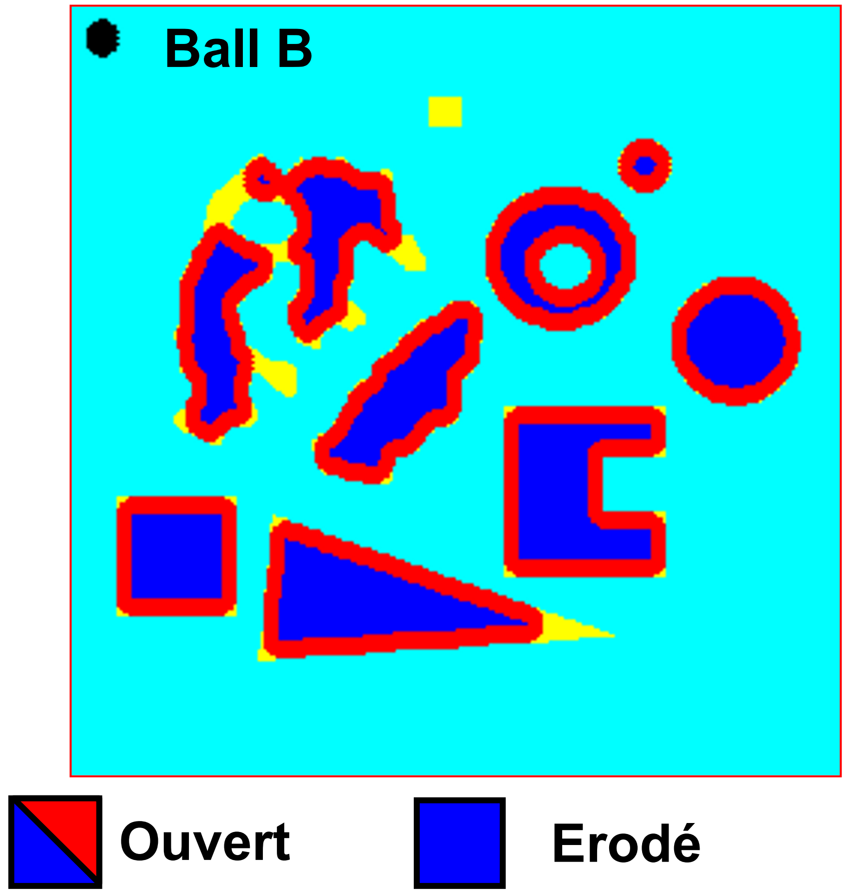


Définition de l'ouverture morphologique

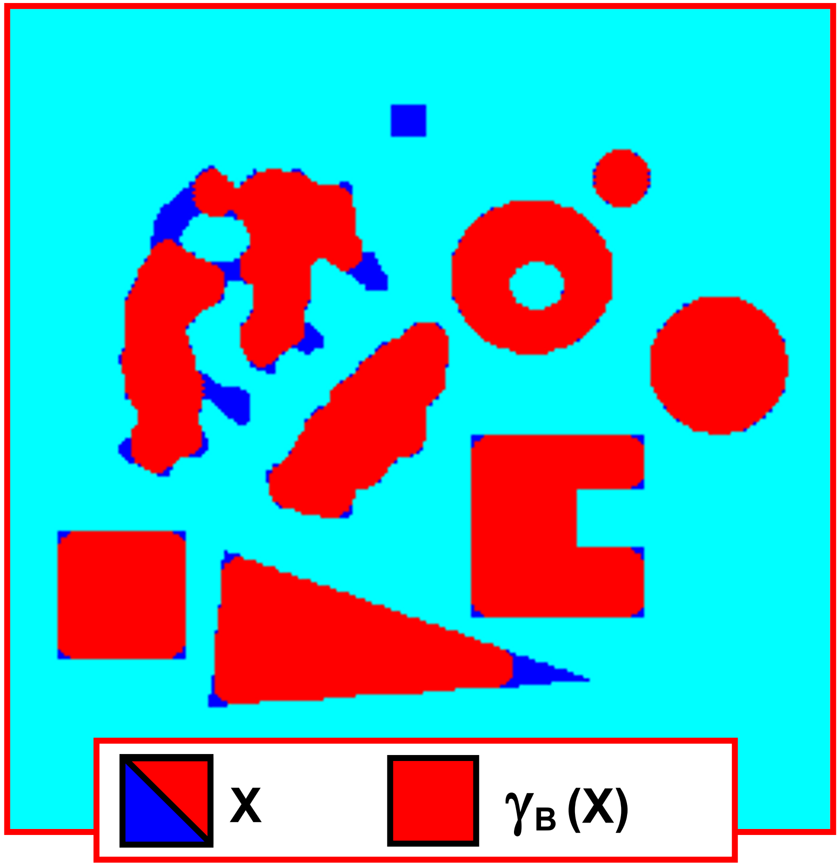
$$\gamma_B(X) = \cup_x \{B_x / B_x \subseteq X\}$$

<u>Question</u> : Est-ce que l'élément structurant est inclut dans l'ensemble ?

NB : On garde l'élément structurant et non plus seulement l'origine comme dans l'érosion.



Effets de l’ouverture morphologique



❖Avec des disques, l’ouverture :

•Supprime les petits objets et les zones étroites

•Peut diviser des objets

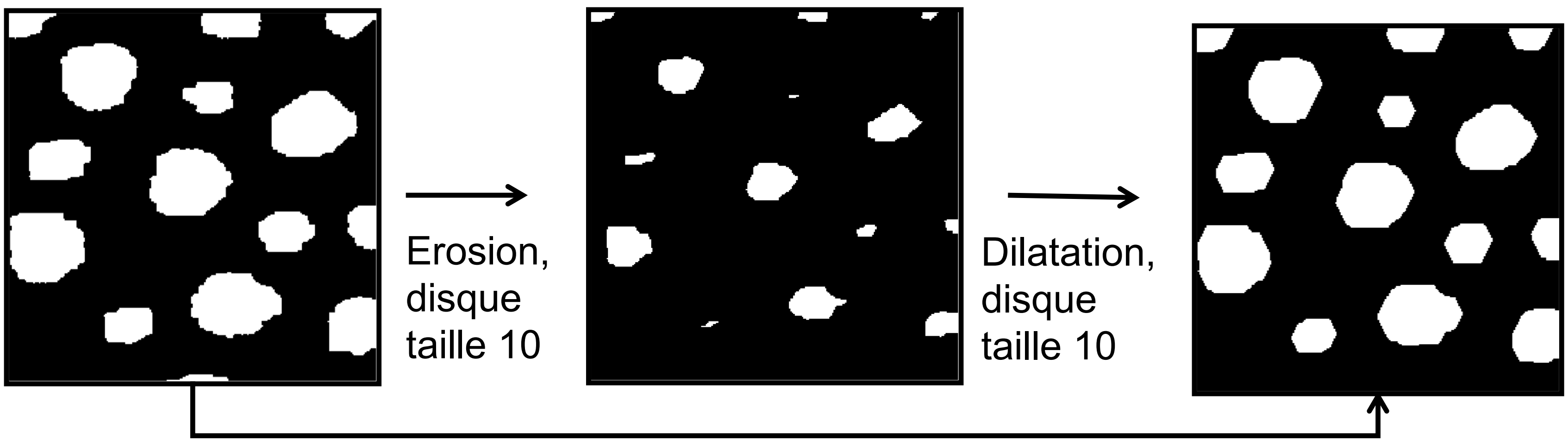
•Préserve la forme globale

•Arrondit les détails

•Ne modifie pas les concavités

Ouverture

❖Exemple sur une image binaire

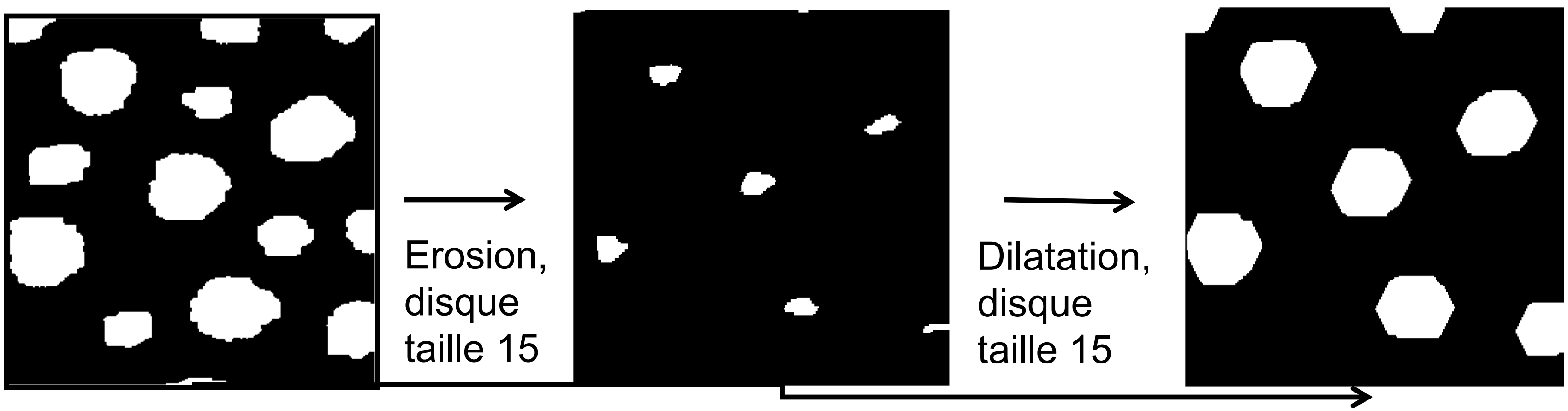


Ouverture

(effet de lissage sur les bords)

Ouverture

❖Exemple sur une image binaire



Ouverture

(disparition des éléments de taille inférieure à l'élément structurant)

Ouverture

❖Propriétés algébriques

- **Opérateur anti-extensif**
  - On supprime les parties qui ne peuvent pas inclure l'élément structurant

$$\gamma_B(X) \subseteq X$$

- **Opérateur croissant**
  - Produit de deux opérateurs croissants

$$X \subseteq Y \Rightarrow \gamma_B(X) \subseteq \gamma_B(Y)$$

Ouverture

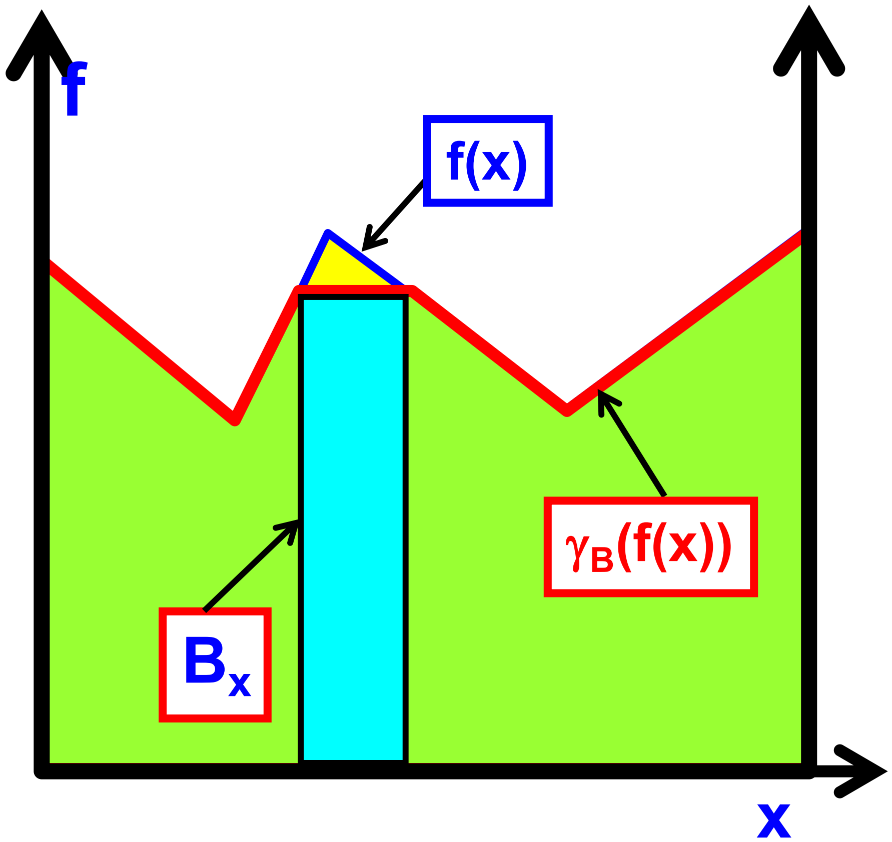
❖ **Propriétés algébriques**

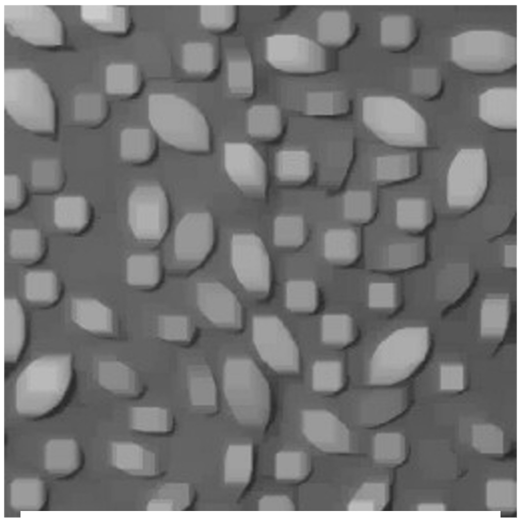
- **Opérateur idempotent**

$$\gamma_B(\gamma_B(X)) = \gamma_B(X)$$

Ouverture avec un élément structurant plat

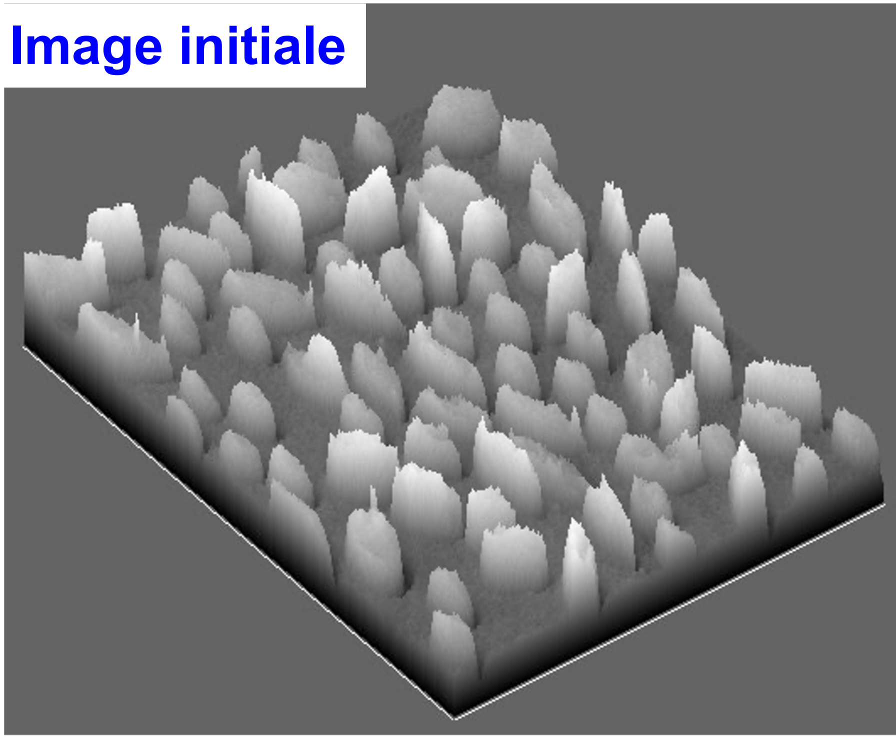
$$\gamma_B(f) = \delta_{\breve{B}}(\varepsilon_B(f))$$

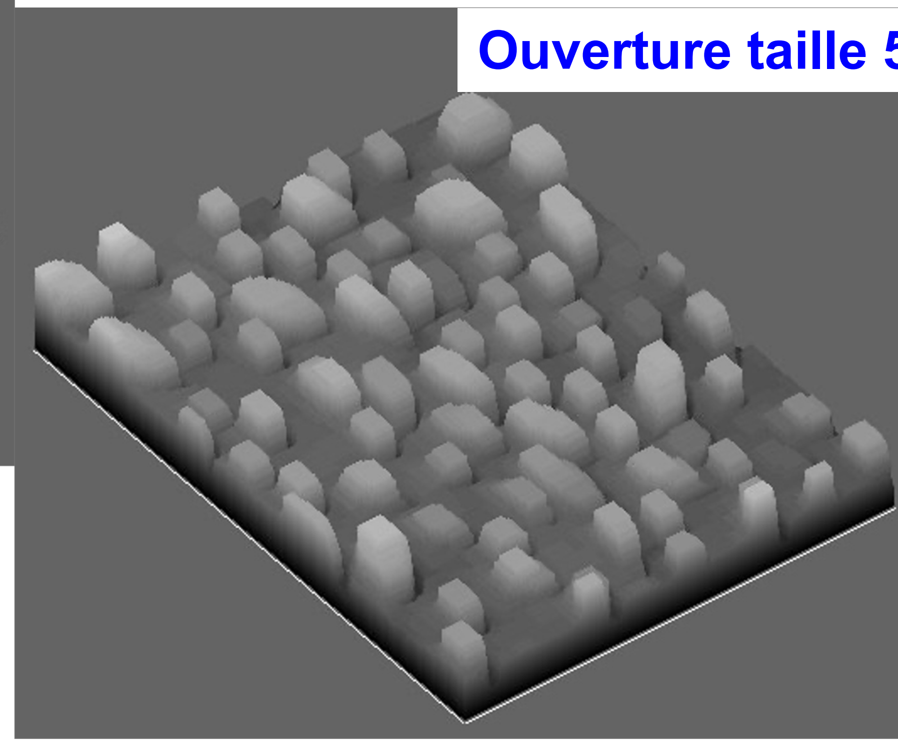




Ouverture taille 5

Les pics étroits sont arasés, les vallées ne sont pas modifiées

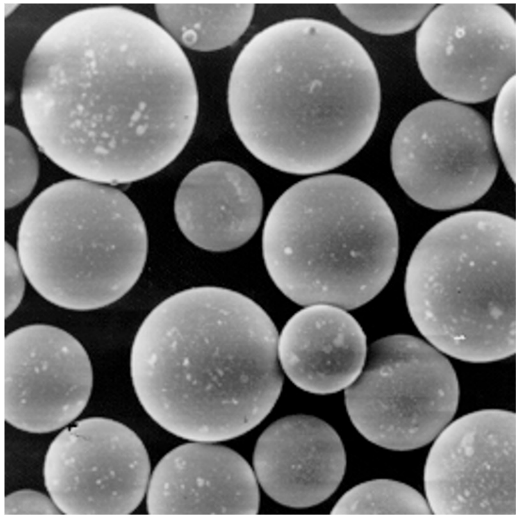




Une image ouverte est localement plus sombre.
Les pics étroits disparaissent.

Ouverture

❖ Élimination des éléments de taille inférieure à l'élément structurant



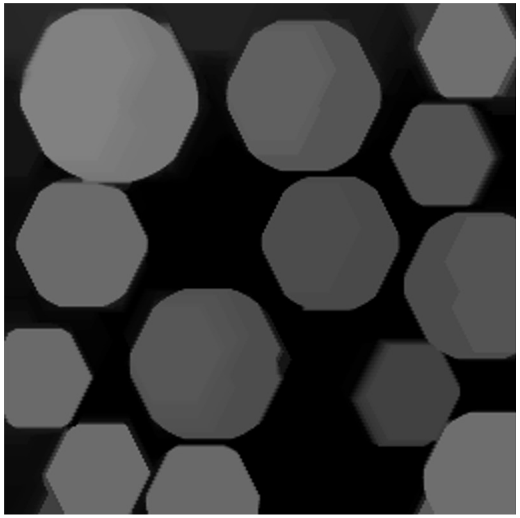
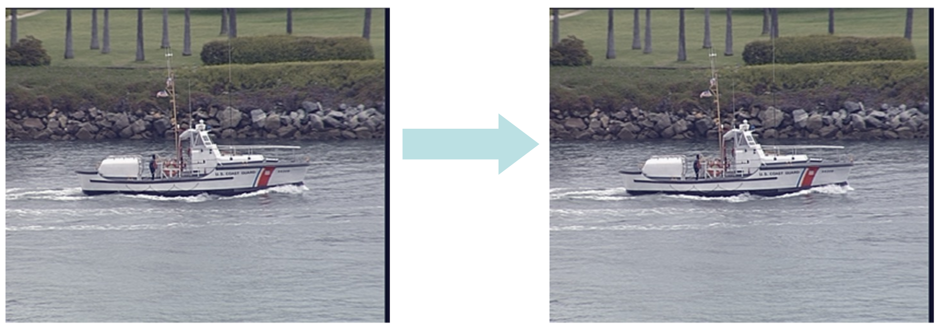
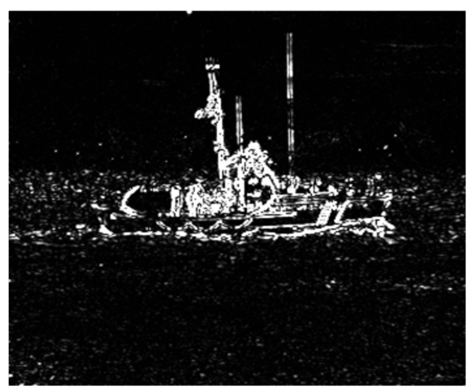


Image ouverte par un élément structurant plat hexagonal de taille 22

Ouverture

❖ **Exemple : application à la détection des objets en mouvement**



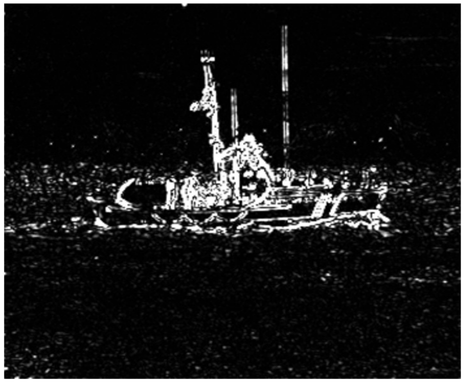


FD (Frame Difference)

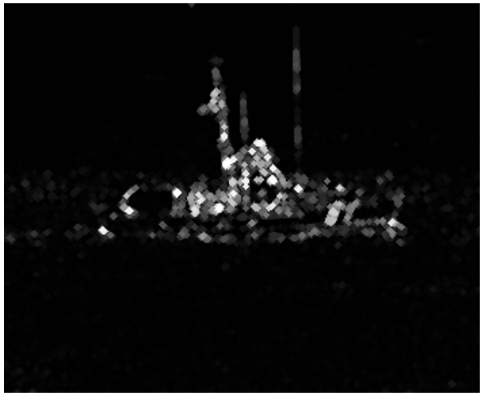
Ouverture

❖ Exemple : application à la détection des objets en mouvement

•enlever les pics isolés dus au bruit



FD (Frame Difference)



Ouverture de taille 2

Ouverture

❖ Exemple : application à la détection des objets en mouvement

- enlever les pics isolés dus au bruit

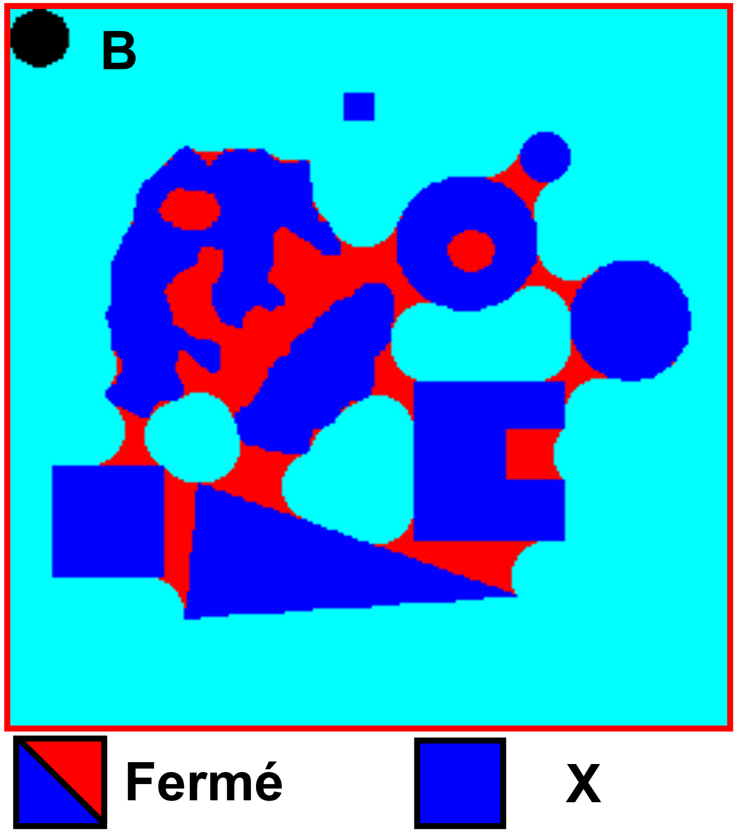
Plan

Définition de la fermeture morphologique

Fermeture par B :

Dilatation par l'élément structurant B, suivie par une érosion par l'élément transposé.

$$\varphi_B(X) = \epsilon_{\breve{B}}(\delta_B(X))$$

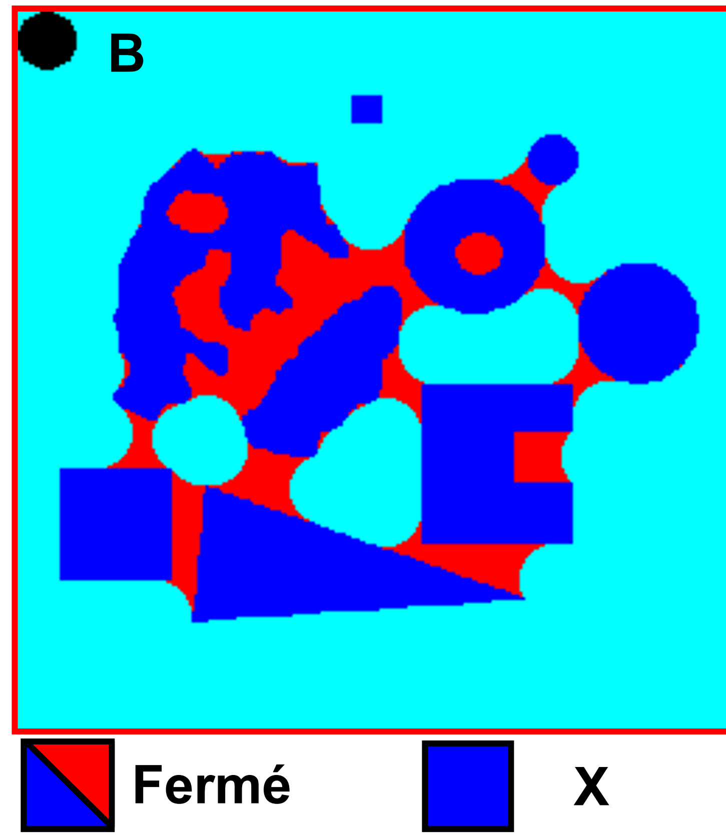


Définition de la fermeture morphologique

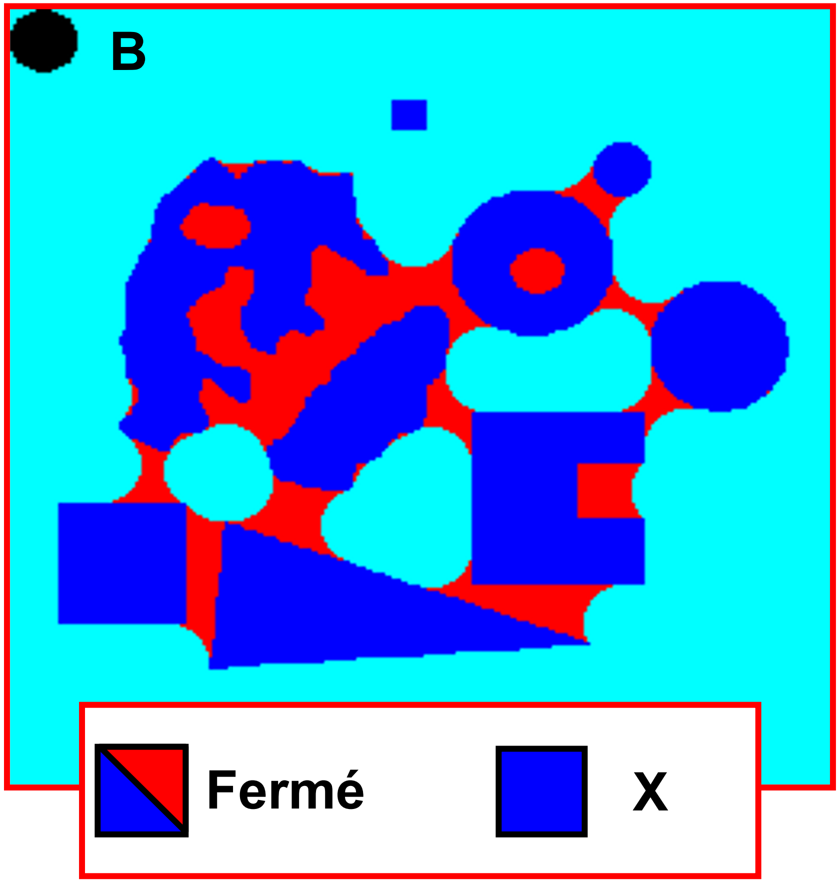
$$\varphi_B(X) = \left[\bigcup_x \{ B_x \,/\, B_x \subseteq X^c \} \right]^c$$

<u>Question</u> : Est-ce que l'élément structurant est inclut dans l'ensemble complémentaire ?

On garde l'élément structurant dans sa totalité, puis on prend le complémentaire du résultat obtenu après union.



Effet de la fermeture morphologique

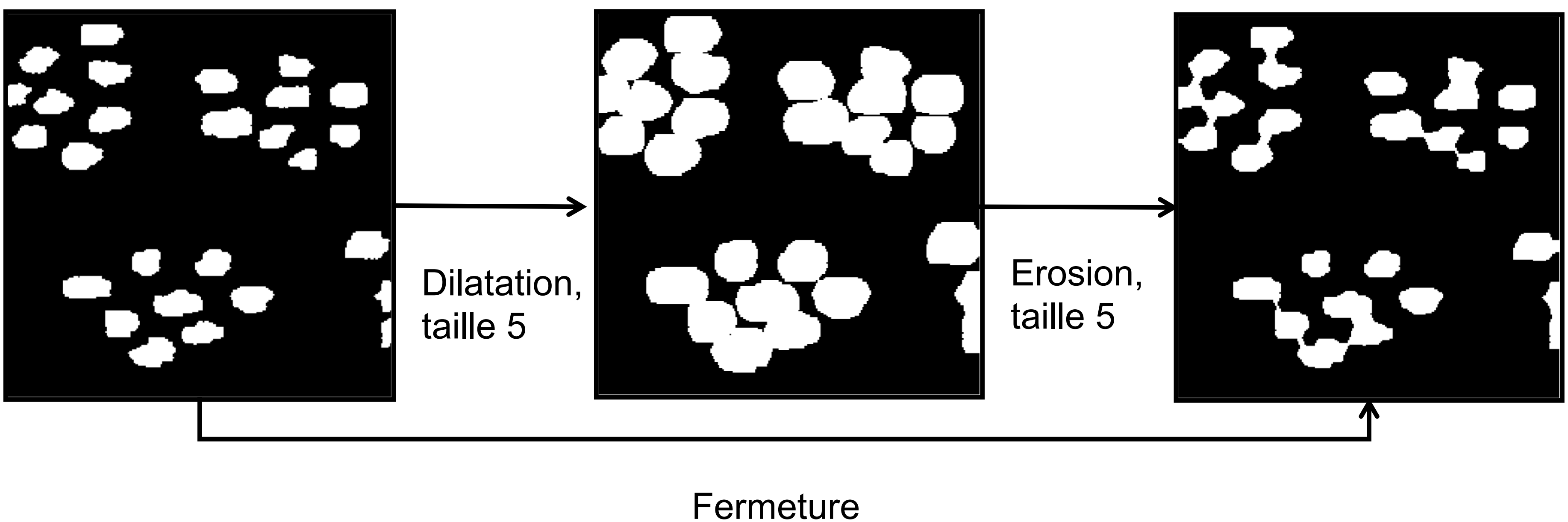


❖Avec un disque, la fermeture :

- Bouche les trous
- Arrondit les détails dans les concavités
- Bouche partiellement les concavités
- Relie des objets voisins
- Ne modifie pas les convexités

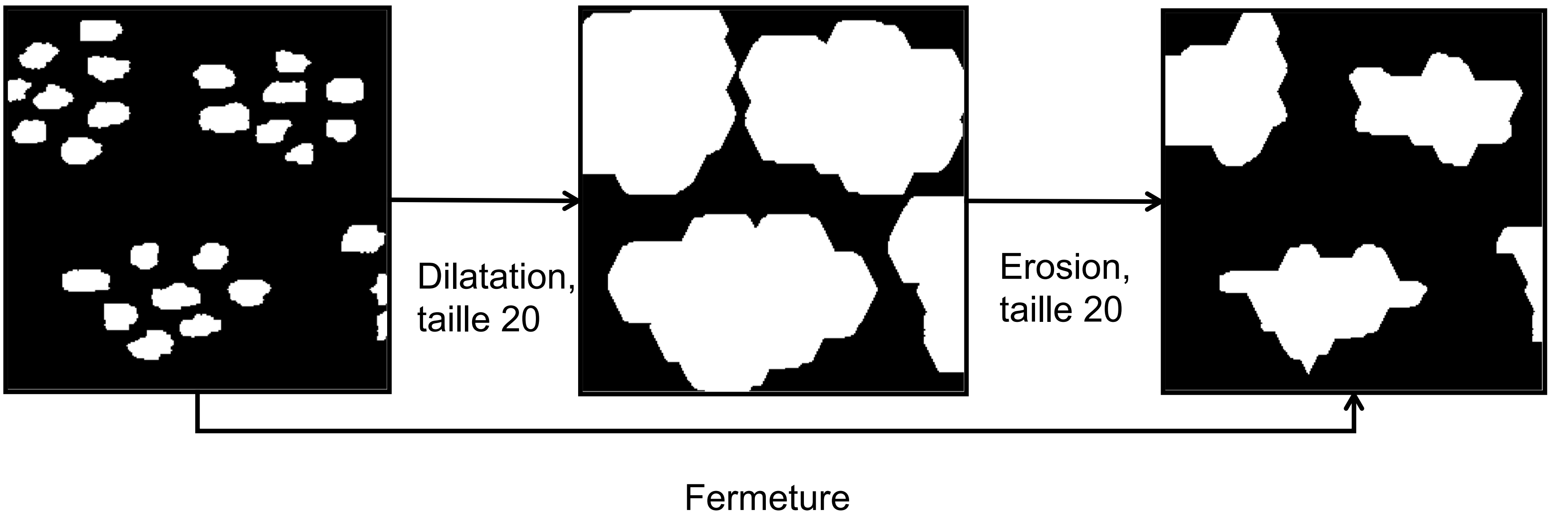
Fermeture

❖ **exemple binaire**



Fermeture

❖ **exemple binaire**



Fermeture

❖Propriétés algébriques

- Opérateur extensif

$$X \subseteq \varphi_B(X)$$

- Opérateur croissant
  - Produit de deux opérateurs croissants

$$X \subseteq Y \Rightarrow \varphi_B(X) \subseteq \varphi_B(Y)$$

Fermeture

❖Propriétés algébriques

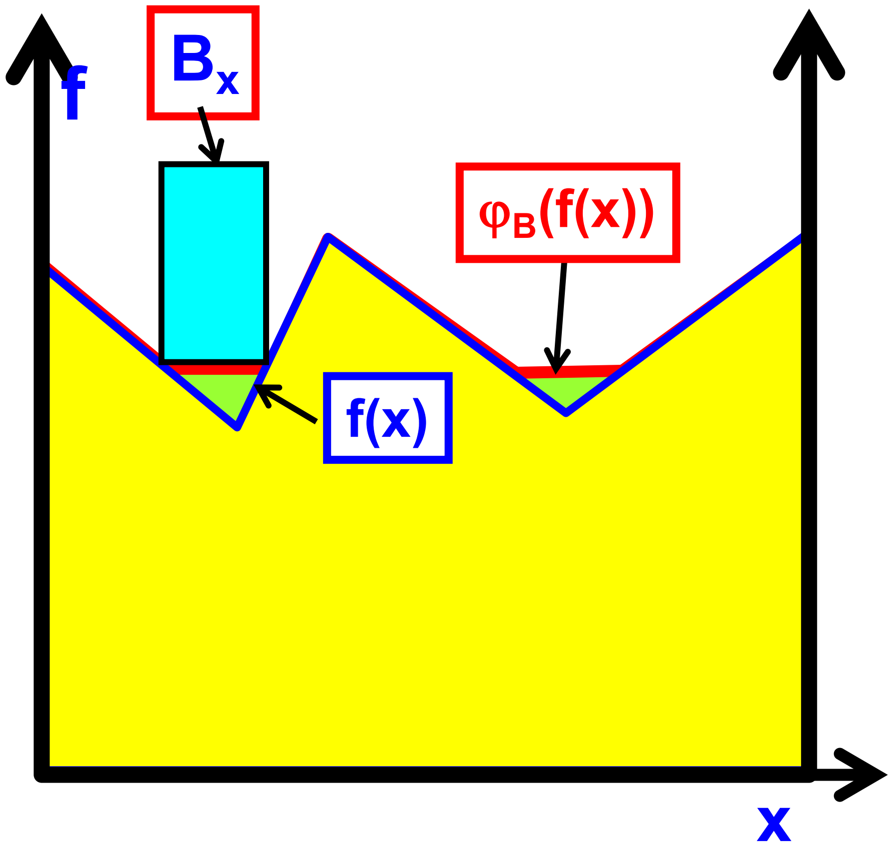
- Opérateur idempotent

$$\varphi_B(\varphi_B(X)) = \varphi_B(X)$$

❖Dualité avec l'ouverture

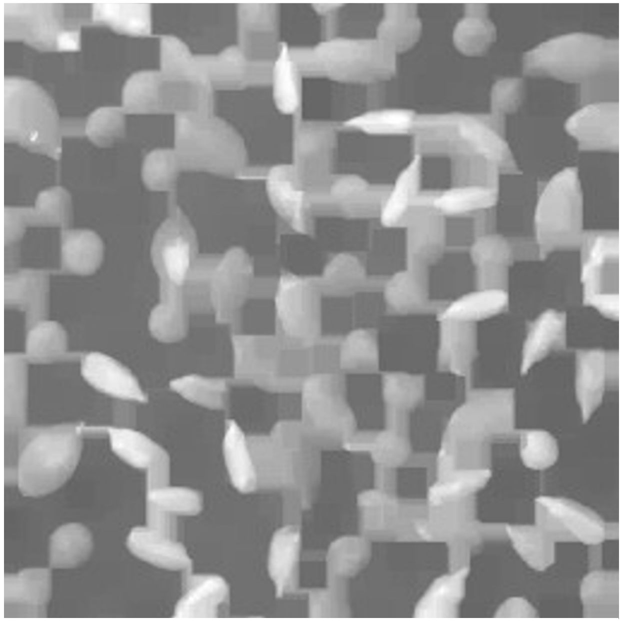
$$\varphi_B(X) = (\gamma_B(X^c))^c$$

Fermeture avec un élément structurant plat



Définition

$$\varphi_B(f) = \epsilon_{\breve{B}}(\delta_B(f))$$



Fermeture taille 5

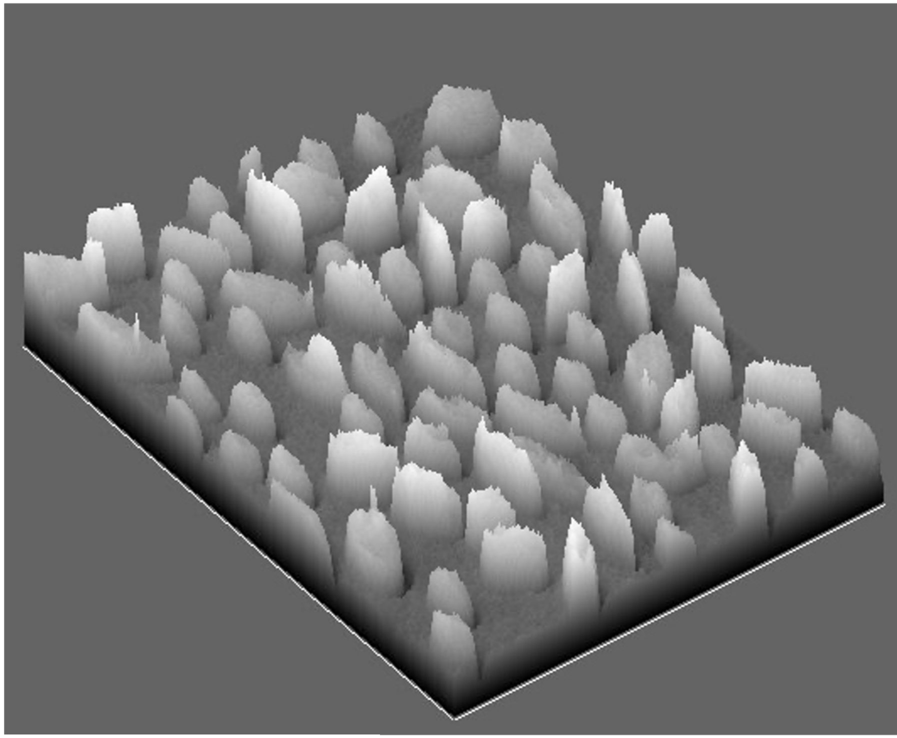
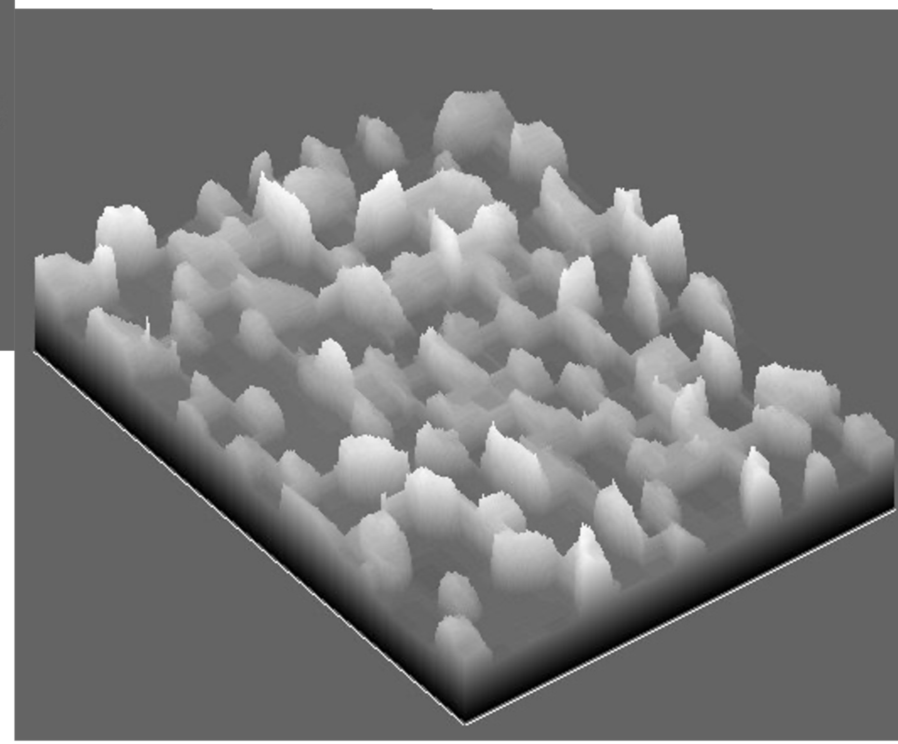


Image initiale

Fermeture taille 5



L’image fermée est
localement plus claire.
Les vallées étroites
disparaissent.

Plan

Ouverture et fermeture algébriques

❖Définition

•Ouverture morphologique :

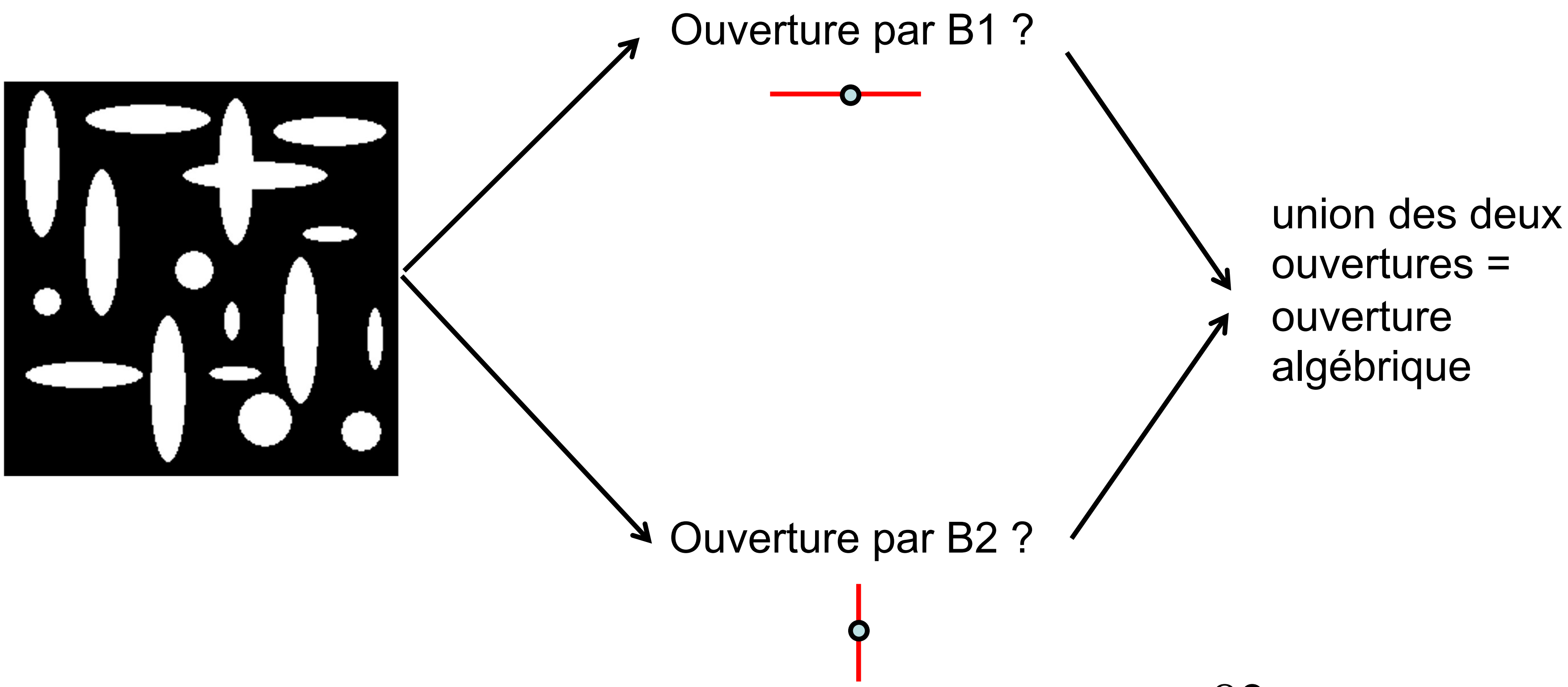
•Opérateur croissant, anti-extensif et idempotent qui peut être défini par une érosion par B suivie d’une dilatation par –B.

•Ouverture algébrique

•Opérateur croissant, anti-extensif et idempotent

Ouverture et Fermeture algébriques

❖ **Exemple**



Ouvertures et fermetures algébriques

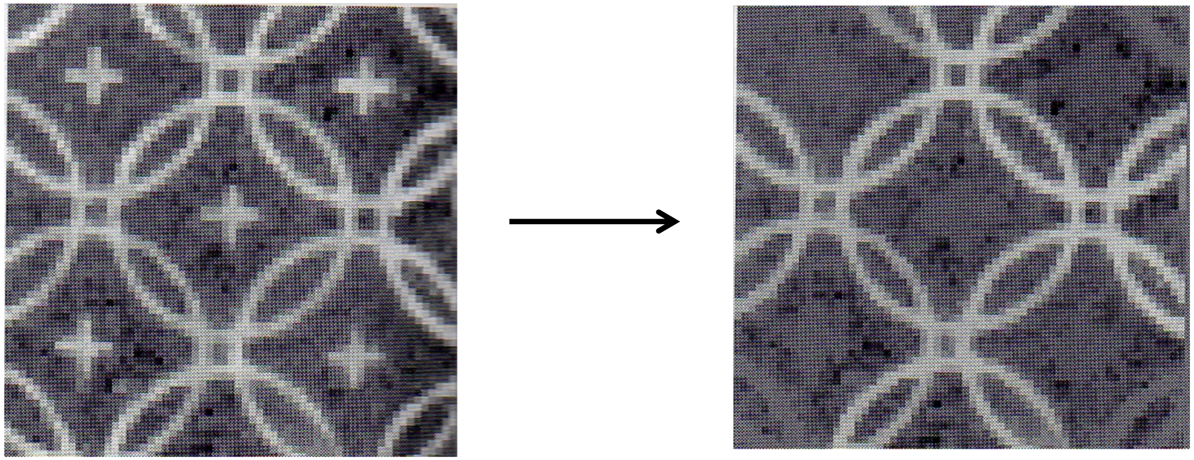
❖ Applications

- Area opening
- Principe : enlever tous les composantes connexes dont l'aire en nombre de pixels est inférieure à λ
- Notation : γ_λ
- Théorème :

$$\gamma_\lambda = \vee_i \{\gamma_{B_i} / B_i \text{ connexe et } |B_i| = \lambda\}$$

Area opening

❖Exemple

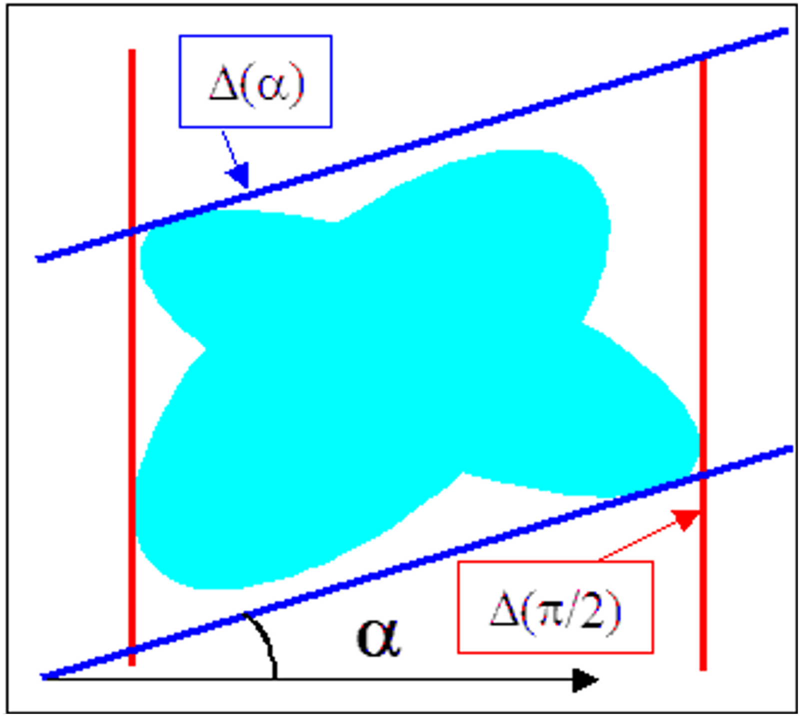


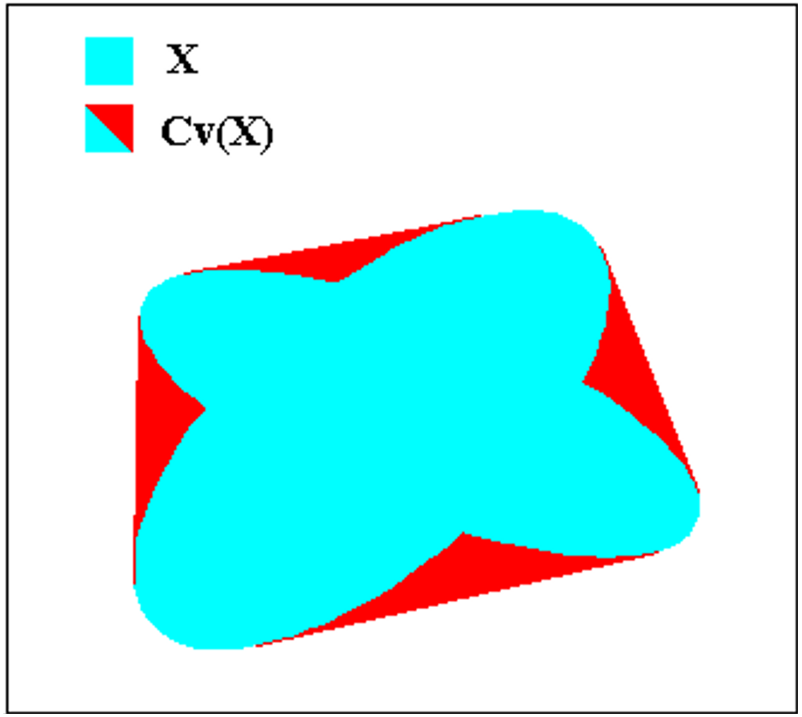
Source : P. Soille

Fermeture et enveloppe convexe

Rappel : L'enveloppe convexe dans R^2

- A chaque ensemble X, on peut associer un ensemble convexe dans lequel il est totalement inclus. Le plus petit est appelé *enveloppe convexe* et notée $C_V(\mathrm{X})$.
- Si X est défini dans R^2, l'enveloppe convexe est l'intersection de tous les demi-plans qui contiennent l'ensemble X.



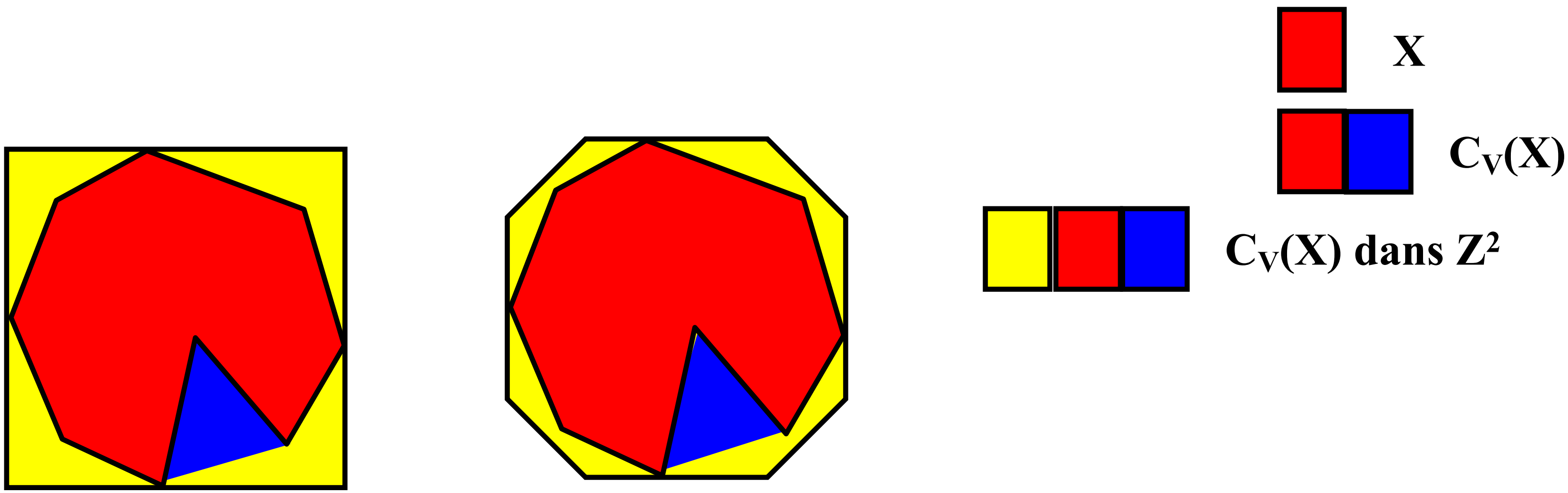


Fermeture et enveloppe convexe

❑ L'enveloppe convexe

❑Enveloppe convexe d'ordre 0 (Directions 0°, 90°)

❑Enveloppe convexe d'ordre 1 (Directions 0°, 90°, -45° et +45°)



Enveloppe convexe

(a) Original set

(b) Convex hull using 2 directions

(c) Convex hull using 4 directions

(d) Convex hull using 8 directions

(e) Convex hull using 48 directions

(f) Arith. diff. between (e) and (a)

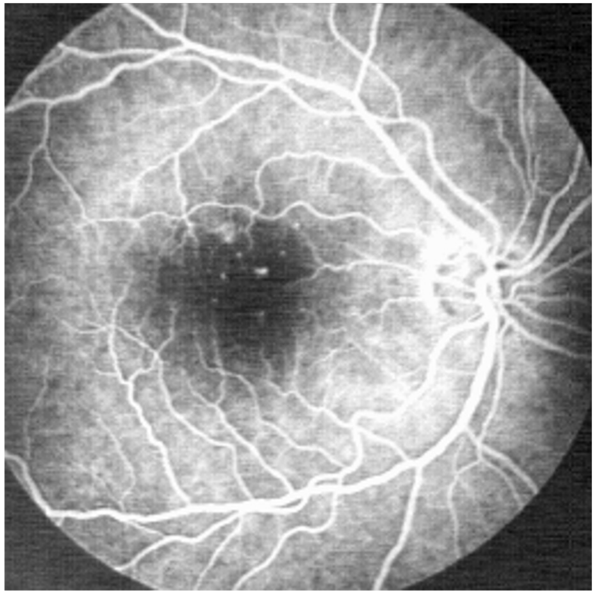
Fig. 2. Convex hull of binary shape using an increasing number of directions for the half-planes used in the closing operations.

P.Soille Proceedings of ISMM'98, H. Heijmans and J. Roerdink, eds©Kluwer Academic Publishers 1998

Plan

Top-hats

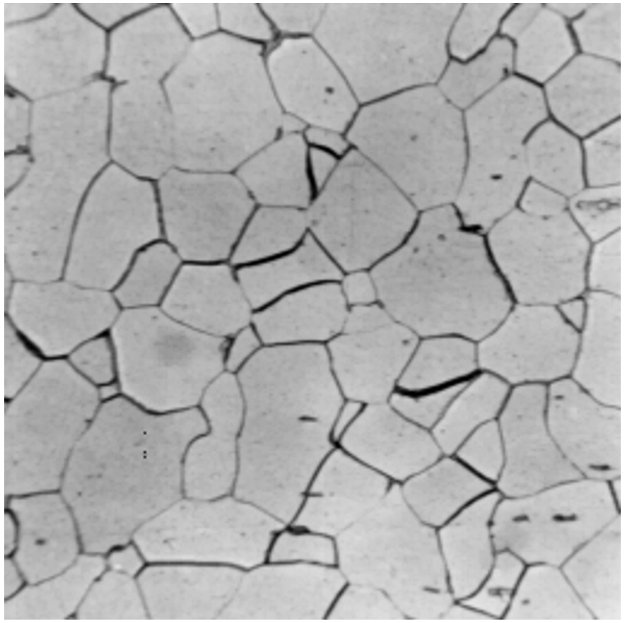
• **White top hat, exemple :**



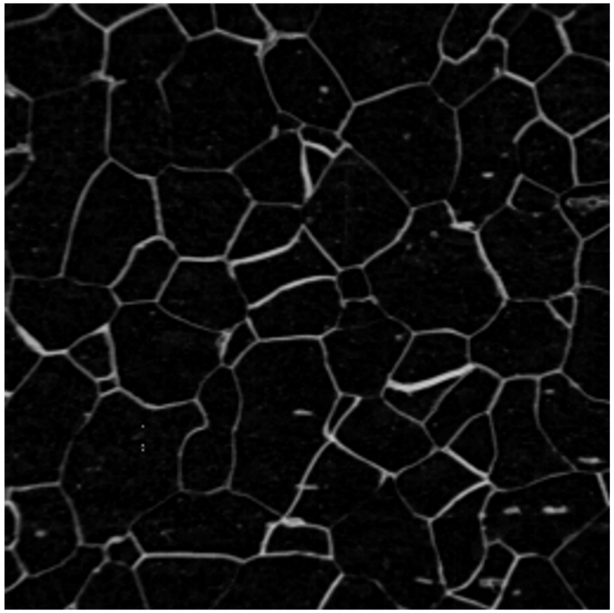
Taille 5

Top-hats

- **Black top-hat, exemple :**



Taille 5

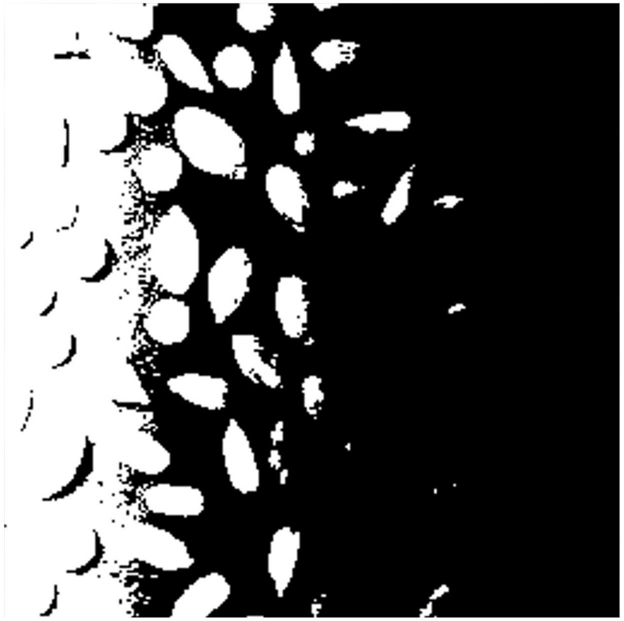


Top-hats

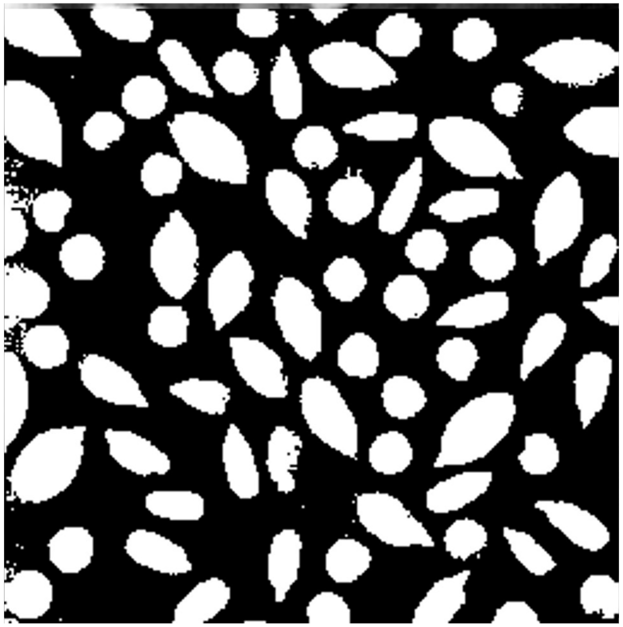
❖ Applications

- Correction d'une illumination non uniforme
- WTH : fonds sombres
- BTH : fonds clairs

Top-hats : illumination non uniforme

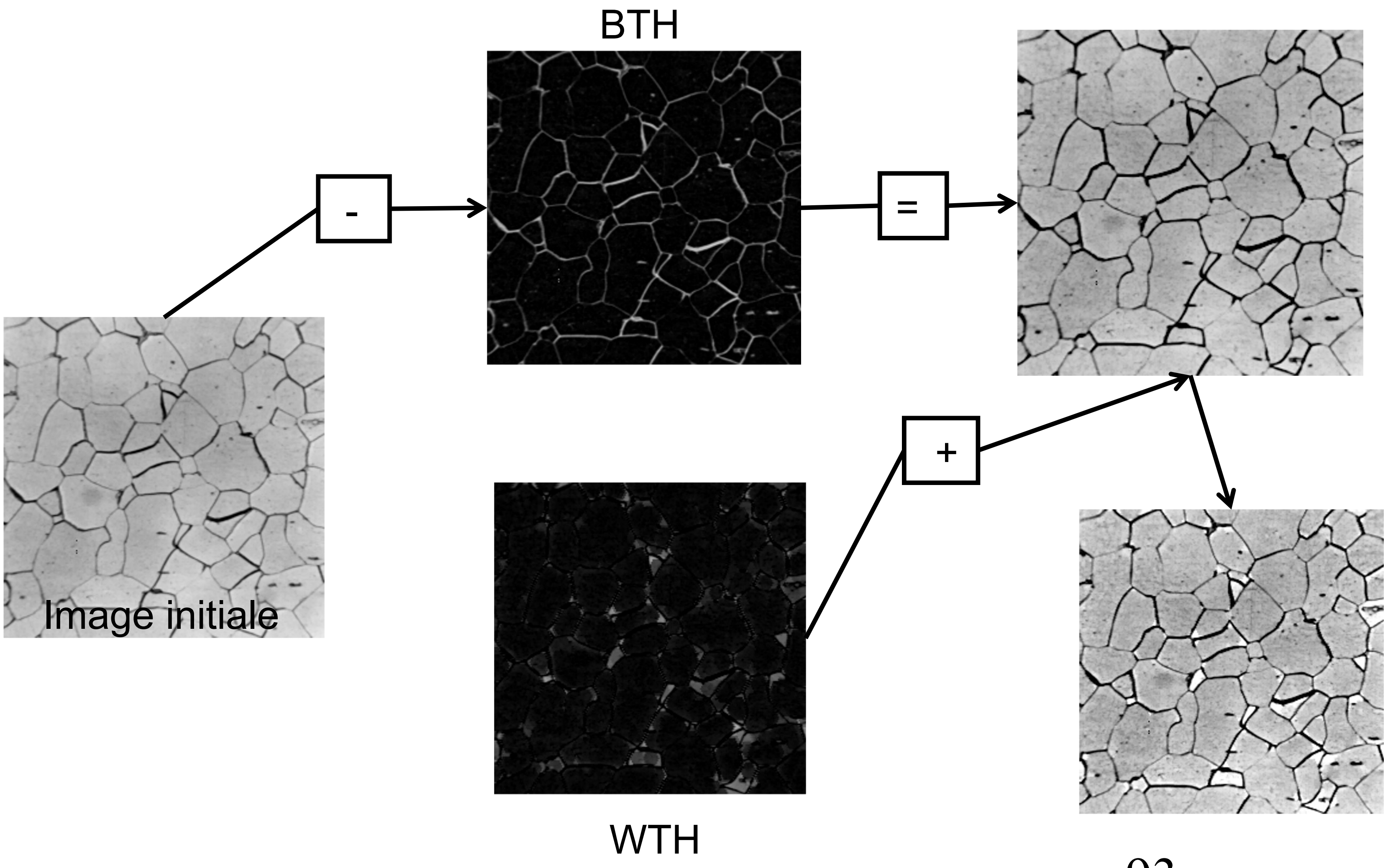


Seuillage sur l'image initiale



Seuillage après « Top Hat »

Top-hats : réhaussement de contraste



Top-hats : réhaussement de contraste