M2 Image, Développement et Technologie 3D (ID3D)
UE Animation, Corps Articulés et Moteurs Physiques
Partie - Simulation par modèles physiques
Cours 2 - Dynamique des particules

Florence Zara

LIRIS - équipe Origami
Université Claude Bernard Lyon 1

http://liris.cnrs.fr/florence.zara
E-mail: florence.zara@liris.cnrs.fr

Plan du cours

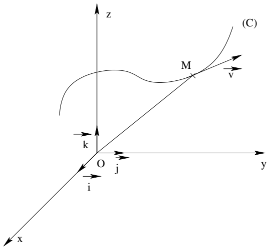
Mouvement des particules

- Problème initial
- Physique d'une particule
- EDO à résoudre
- Point de vue animation 3D

Problème initial - Mouvement d'une particule

Cinématique du point matériel

- Considérons une **particule unique** en n dimensions
- Etudions le modèle **cinématique** du mouvement de cette particule (par opposition à la dynamique qui implique des forces)



Exemple du mouvement d'une particule définie en 3D

Problème initial - Mouvement d'une particule

Physique d'une particule

- **Position** de la particule au temps t : $x = x(t) \in \mathbb{R}^n$
- **Vitesse** de la particule au temps t : $v = v(t) \in \mathbb{R}^n$
- **État de la particule** au temps t : $X = X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n}$

Problème initial - Mouvement d'une particule

Physique d'une particule

- **Relation différentielle** entre la vitesse et la position qui crée le mouvement :

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \dot{x}(t)$$

vitesse de la particule = dérivée de la position de cette particule en mouvement par rapport au temps

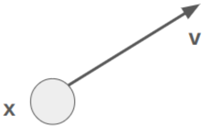
Dérivée d'une fonction - rappel du concept mathématique

- La dérivée d'une fonction d'une variable réelle mesure l'ampleur du changement de la valeur de la fonction (valeur de sortie) par rapport au petit changement de son argument (valeur d'entrée)
- La vitesse de la particule mesure l'ampleur du changement de la position de la particule par rapport au temps

Problème initial - Mouvement d'une particule

Exemple d'une balle en 2D

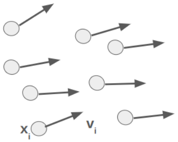
- $x(t) = \begin{pmatrix} x_x(t) \\ x_y(t) \end{pmatrix}$ et $v(t) = \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}_x(t) \\ \dot{x}_y(t) \end{pmatrix}$



Généralisation - système de particules

Cas d'un système composé de N particules en $\mathbb{R}^n$

- Valeurs des particules indexées :
  $x_i = x_i(t) \in \mathbb{R}^n$ pour $i = 1, ..., n$
  $v_i = v_i(t) \in \mathbb{R}^n$ pour $i = 1, ..., n$
- Formulation vectorielle : $v = \dot{x} \in \mathbb{R}^{nN}$ où : $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}, \; v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_i \\ \vdots \\ v_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_i \\ \vdots \\ \dot{x}_N \end{pmatrix}$



Equation Différentielle

Rappel du concept mathématique

- Equation différentielle = équation dont la ou les inconnues sont des fonctions
- Equation différentielle se présente sous la forme d'une relation entre ces fonctions inconnues et leurs dérivées

Deux types d'équations différentielles

- Equations Différentielles Ordinaires (EDO) = la ou les fonctions recherchées ne dépendent que d'une seule variable
- Equations aux dérivées partielles (EDP) = la ou les fonctions inconnues recherchées peuvent dépendre de plusieurs variables indépendantes

Mouvement d'une particule - Equation du premier ordre

Retour à notre problème

- Spécification de la vitesse $\dot{x}(t) = v(t)$ ne dépendant que du temps t
- Résolution de l'équation $\dot{x}(t) = v(t)$ pour obtenir la position de la particule

Résolution d'un système d'**Equations Différentielles Ordinaires (EDO)**

En pratique :

Intégration de $v(t)$ pour obtenir la nouvelle position de la particule

Mouvement d'une particule - Equation du premier ordre

Résolution de l'EDO - définition d'une condition/valeur initiale

- L'EDO $\dot{x}(t) = v(t)$ admet une infinité de solutions $x(t)$
- Parmi ces solutions, on cherche la solution $x(t)$ vérifant la condition initiale

$$x(0) = x_0$$

Il en existe alors une et une seule

Mouvement d'une particule - Equation du premier ordre

Résolution de l'EDO : utilisation de la méthode d'Euler

- Définition formelle de la dérivée :
$$\frac{d}{dt}x(t) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{x(t+\epsilon) - x(t)}{\epsilon}$$
- On remplace ϵ par $\to dt$ (un nombre petit mais pas nul)
- On obtient alors l'approximation : $\frac{d}{dt}x(t) \approx \frac{x(t+dt) - x(t)}{dt}$

Mouvement d'une particule - Equation du premier ordre

Résolution de l'EDO : utilisation de la méthode d'Euler

- On rajoute le fait que : $\frac{d}{dt}x(t) = v(t)$
- On obtient l'approximation : $\frac{x(t+dt)-x(t)}{dt} \approx v(t)$
- Ce qui permet d'obtenir la relation finale suivante :

$$\mathbf{x(t+dt) \approx x(t) + dt\ v(t)}$$

Cette formulation permet de mettre à jour
la position de la particule en fonction du temps
Vidéo - advection de particules

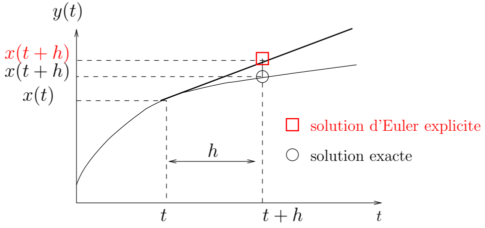
Mouvement d'une particule - Equation du premier ordre

Résolution de l'EDO : utilisation de la méthode d'Euler

$$\mathbf{x(t+dt) \approx x(t) + dt\ v(t)}$$

Compromis à ajuster au niveau numérique :

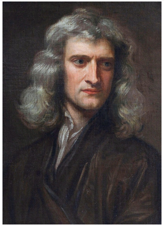
- Si *dt* (le **pas de temps**, noté aussi *h*) décroit, l'approximation est meilleure
- Mais le coût en calculs est plus important



Lois de Newton

Notions de masse et de force

- Mouvement d'un objet caractérisé par sa position, vitesse et **accélération**
- Objet également caractérisé par sa **masse** (en Kg) et par sa **force** (en N)
- Accélération de l'objet proportionnelle à l'intensité de la force
- Force d'un Newton = intensité de la force requise pour donner une accélération d'un mètre par seconde au carré à une masse d'un kilogramme



Lois de Newton

Enoncé des 3 lois de Newton

1. En l'absence de toute force, un corps matériel,
   - si il est au repos, reste au repos
   - si il est en mouvement, conserve un mouvement rectiligne et uniforme
2. L'application d'une **force** F au corps de masse m se traduit par la **variation de sa vitesse au cours du temps** qui induit un déplacement
   $$a = \frac{dv}{dt} = \text{accélération de la particule}$$
3. Entre deux corps, il ne peut y avoir d'action que mutuelle :
   - c'est-à-dire qu'il y a toujours lieu d'apparier deux forces
   - même direction, égales en valeur absolues et de sens opposées

Mouvement d'une particule - Equation du second ordre

Dans le monde réel

- Equation du mouvement : $F = m\ a$
  en considérant l'ensemble des forces F appliquées sur la particule de masse m

Autre problème à résoudre ayant une nouvelle condition initiale

- **Position initiale** : $x(0) = x_0$
- **Equation du mouvement** : $\frac{d^2\ x(t)}{dt^2} = \frac{f(x,t)}{m}$

  dérivée seconde par rapport au temps = accélération de la particule

$\Rightarrow$ **EDO du second ordre à résoudre**

pour obtenir la nouvelle position de la particule à partir de son accélération

Equation du second ordre vers le premier ordre

Introduction d'une seconde condition initiale

- $x(0) = x_0$ **position initiale**
- $v(0) = v_0$ **vitesse initiale**
- $\frac{d}{dt}x(t) = v(t)$ **dérivée de la position par rapport au temps**
- $\frac{d}{dt}v(t) = \frac{d^2\, x(t)}{dt^2} = \frac{f(x,t)}{m}$ **dérivée de la vitesse par rapport au temps**

$\Rightarrow$ **EDO couplées du premier ordre à résoudre**

Equation du second ordre vers le premier ordre

Résolution des EDO : utilisation de la méthode d'Euler

- $\mathbf{v}(\mathbf{t}+\mathbf{dt}) \approx \mathbf{v}(\mathbf{t}) + \mathbf{dt}\,\frac{\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{t})}{\mathbf{m}}$ mise à jour des vitesses
- $\mathbf{x}(\mathbf{t}+\mathbf{dt}) \approx \mathbf{x}(\mathbf{t}) + \mathbf{dt}\,\mathbf{v}(\mathbf{t})$ mise à jour des positions

En pratique : méthode d'Euler symplectique

- $\mathbf{v}(\mathbf{t}+\mathbf{dt}) \approx \mathbf{v}(\mathbf{t}) + \mathbf{dt}\,\frac{\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{t})}{\mathbf{m}}$ mise à jour des vitesses
- $\mathbf{x}(\mathbf{t}+\mathbf{dt}) \approx \mathbf{x}(\mathbf{t}) + \mathbf{dt}\,\mathbf{v}(\mathbf{t}+\mathbf{dt})$ mise à jour des positions via nouvelle vitesse

Dynamique Newtonienne en résumé

Physique d'une particule

- **Etat de la particule au temps t** :

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$$

- **Dérivée de l'état par rapport au temps t** :

$$\frac{d}{dt}X(t) = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v(t) \\ F(t)/m \end{pmatrix}$$

en utilisant l'équation du mouvement : $F = m\,a = m\,\frac{d}{dt}\,v$

en considérant l'ensemble des forces F appliquées sur la particule de masse m

Dynamique Newtonienne en résumé

Et si on considère N particules de masses m_i (pour i=1, ..., N)

Système de particules

- **Etat au temps t du système de particules** :

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ v_1(t) \\ \vdots \\ x_N(t) \\ v_N(t) \end{pmatrix}$$

Dynamique Newtonienne en résumé

Système de particules

- **Dérivée de l'état du système par rapport au temps** :

$$\frac{d}{dt}X(t) = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ v_1(t) \\ \vdots \\ x_N(t) \\ v_N(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ F_1(t)/m_1 \\ \vdots \\ v_N(t) \\ F_N(t)/m_N \end{pmatrix}$$

- Valeurs à l'état initial t_0 à définir

Boucle de simulation pour obtenir le nouvel état à chaque pas de temps avec méthode d'intégration d'Euler (par exemple)

Dynamique Newtonienne - Calcul des forces

Du coup, il faut savoir calculer les forces appliquées aux particules

Quelles forces ?

- Gravitation : $f_{ij} = \frac{G\ m_i\ m_j}{d^2}$ avec $G = 6.67 \times 10^{-11} N.m^2.kg^{-2}$
- Constante de gravité : $f_i = m\ \mathbf{g}$ avec $\mathbf{g} = (0, -9.81, 0)$
- Ressort (pratique pour modéliser objet déformable)

Dynamique Newtonienne - Calcul des forces des ressorts

Force d'un ressort reliant deux particules

- Force appliquée à la masse i par le ressort reliant les masses i et j est définie par :
$$\vec{f}^e_{i,j}(t) = k_{ij} \left(\|x_i(t) - x_j(t)\| - l_{ij} \right) \; \vec{u}_{i,j}$$
- Force appliquée à la masse j à partir du même ressort est définie par :
$$\vec{f}^e_{j,i}(t) = -\vec{f}^e_{i,j}(t)$$
- $\|x_i(t) - x_j(t)\|$ la disance actuelle entre les 2 masses
- l_{ij} la longueur au repos du ressort et k_{ij} sa raideur
- $\vec{u}_{i,j}$ le vecteur normalisé allant de i vers j défini par $\vec{u}_{i,j} = \frac{x_j(t)-x_i(t)}{\|x_j(t)-x_i(t)\|}$

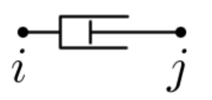
Dynamique Newtonienne - Calcul des forces des ressorts

Cas d'un ressort amorti

- Considérons le cas d'un ressort amorti avec l'ajout d'un amortisseur
- Amortisseur applique une force inverse à la vitesse qui est appliquée pour le compresser
- La force appliquée à la masse i par l'amortisseur reliant les masses i et j est ainsi défnie par :

$$\vec{f}^{\,v}_{i,j}(t) = \left(-\nu_{ij}\left(\dot{x}_j(t) - \dot{x}_i(t)\right) \cdot \vec{u}_{i,j}\right) \vec{u}_{i,j}$$

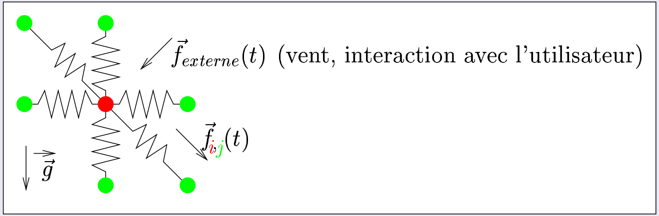
- avec ν_{ij} la constante d'amortissement du ressort



Dynamique Newtonienne - Calcul des forces des ressorts

Système masses-ressorts constitué de plusieurs masses et ressorts amortis

- La force exercée sur chaque particule i est définie par :
  - $\vec{f}_i(t) = \sum_{j|j \text{ voisin de } i} \left[\vec{f}^{\,e}_{i,j}(t) + \vec{f}^{\,v}_{i,j}(t)\right] + \text{gravité} + \text{interactions}$



$$\begin{cases} \vec{f}^{\,e}_{i,j}(t) & = & k_{ij}\left(\|x_i(t) - x_j(t)\| - l_{ij}\right)\ \vec{u}_{i,j} & \text{élasticité} \\ \vec{f}^{\,v}_{i,j}(t) & = & \left(-\nu_{ij}\left(\dot{x}_j(t) - \dot{x}_i(t)\right)\cdot \vec{u}_{i,j}\right)\vec{u}_{i,j} & \text{amortissement} \end{cases}$$

Point de vue animation 3D

Données initiales en pratique

Position au temps t_0 : $x(t_0)$ — chargement du maillage de l'objet
Vitesse au temps t_0 : $v(t_0)$ — vitesses mises à zéro
Masse (cste) des particules : m_i — répartiton de la masse de l'objet sur les N particules

Définir le **pas de temps** dt de la simulation — compromis temps/précision

Début des calculs de la boucle d'animation

Forces appliquées au temps t_0 : $f(t_0, x(t_0), v(t_0))$ — prise en compte de la gravité
Accélération au temps t_0 : $a(t_0) = M^{-1} f(t_0, x(t_0), v(t_0))$ — forces divisées par la masse

Passage au temps suivant $t_1 = t_0 + dt$

Résolution de l'EDO pour obtenir les nouvelles vitesses et positions

Point de vue animation 3D

Au final, voici les calculs effectués à chaque pas de temps de la boucle d'animation

1. **Calcul des forces** appliquées sur les particules au temps t
2. **Calcul des accélérations** au temps t des particules
   via principe fondamental de la dynamique : $\dot{v}(t) = M^{-1} f(t, x(t), v(t))$
3. **Calcul des nouvelles vitesses au temps** $t + dt$
   par intégration des accélérations : $v(t + dt) = v(t) + dt\ \dot{v}(t)$
4. **Calcul des nouvelles positions au temps** $t + dt$
   par intégration des nouvelles vitesses : $x(t + dt) = x(t) + dt\ v(t + h)$

En conclusion

Ce cours rappelle les notions de base de la simulation par modèle physique :

- l'équation du mouvement d'une particule
- les lois de Newton dont le principe fondamental de la dynamique est : $f = ma$
- l'enchaînement des calculs à faire dans la boucle de simulation pour calculer le mouvement d'une particule au cours du temps