M2 Image, Développement et Technologie 3D (ID3D)
UE Animation, Corps Articulés et Moteurs Physiques
Partie - Simulation par modèles physiques

Cours 3 - Dynamique des objets rigides

Florence Zara

LIRIS - équipe Origami
Université Claude Bernard Lyon 1

http://liris.cnrs.fr/florence.zara
E-mail: florence.zara@liris.cnrs.fr

Plan du cours

Concepts de la dynamique du solide

- Barycentre
- Différents repères : espace objet, espace monde
- Physique du solide rigide : vitesses, moment de la force, etc.

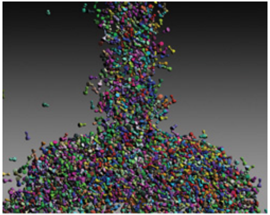
Dynamique des objets rigides

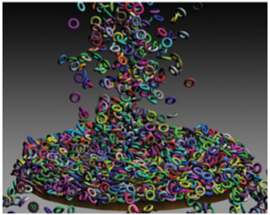
- Evolution de l'état de l'objet rigide pour étudier son mouvement

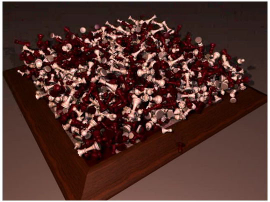
Point de vue animation 3D

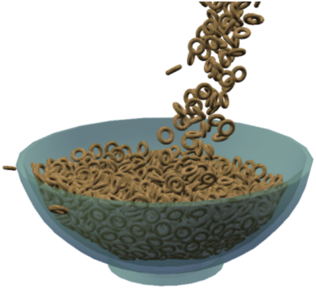
- Discrétisation de l'objet en n particules i
- Structure de données de l'objet rigide
- Algorithmes de simulation

Simulation d'objets rigides - Exemples









Concepts de la dynamique du solide

Point matériel

Il n'est pas orienté dans l'espace

Ce n'est pas une petite bille qui peut rouler, pivoter, tourner, etc.

Corps matériel

Extension de la matière dans les 3 directions qui doit donc être **orienté**

$\rightarrow$ Utilise le même concept que pour la dynamique des particules

MAIS besoin de plus d'information pour l'état du solide

Concepts de la dynamique du solide

Corps rigide - Etude du centre de masse

- Corps rigide = corps physique qui est **indéformable**
- Corps rigide a un certain volume
  Sa masse est répartie de façon plus ou moins uniforme dans celui-ci
- Il existe un point particulier dans le corps rigide où la masse est répartie également dans n'importe quelle direction = barycentre ou centre de masse

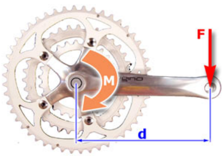
Concepts de la dynamique du solide

Dynamique Newtonienne : mouvement relatif à l'appplication d'une force

Application force non axée directement sur le centre de masse engendre deux effets :

- Un déplacement : 3 degrés de liberté
- Une rotation : 3 degrés de liberté

6 degrés de liberté au total



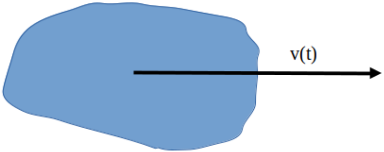
Force appliquée en axe avec le centre de masse (provoque un déplacement vers la droite)

Force appliquée de façon désaxée à l'axe principal. (provoque un déplacement vers la droite ET une rotation)

Image - O. Vaillancourt

Concepts de la dynamique du solide - Pour le déplacement

Un objet en mouvement linéaire possède une **vitesse** v(t)



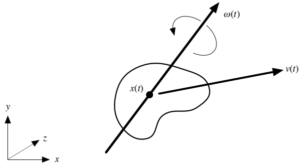
La force engendrant le déplacement est la **force linéaire** $= F(t)$
Elle induit une accélération = **variation de sa vitesse** = dv/dt

Concepts de la dynamique du solide - Pour la rotation

Un objet qui tourne sur lui-même possède une **vitesse de rotation** ou **vitesse angulaire** $\omega(t)$

Objet tourne sur lui-même

- Vecteur vitesse angulaire $\vec{\omega}(t)$ donne **axe** et **vitesse de la rotation**
- Vecteur vitesse angulaire est un pseudovecteur :
  - direction de l'axe autour duquel objet tourne
  - vecteur normal au plan de rotation
  - amplitude $||\omega(\vec{t})||$: angle rotation par rapport au temps



Concepts de la dynamique du solide - Pour la rotation

La force engendrant la rotation est appelée **moment** (*torque*) $= \tau(t)$
Elle induit une accélération angulaire $=$ **variation de sa vitesse de rotation**

L'application d'une **force non axée directement sur le centre de masse** engendre ainsi une **accélération au niveau de la rotation** (appelée accélération angulaire) d'un corps solide.

Concepts de la dynamique du solide

Lois de Newton - force / mouvement

En plus du déplacement, il faut considérer :

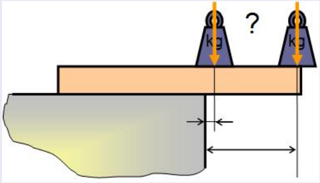
- l'orientation de l'objet
- le mouvement rotatif de l'objet soumis à une force

Pour cela, il faut étudier le **moment de la force**

Concepts de la dynamique du solide

Moment de la force (*torque*) par rapport à un point donné

- Moment de la force représente l'aptitude d'une force à faire tourner un système mécanique autour de ce point (pouvoir de basculement)



Concepts de la dynamique du solide

Pouvoir de basculement dépend

- de l'intensité de la force
- de la position relative du point d'application de la force
- et du point de rotation (pivot)

Définition du moment

- Moment de la force $\vec{F}$ s'exerçant au point P par rapport au pivot O :

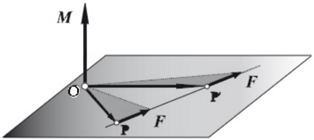
$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{\vec{F}/O} = \overrightarrow{OP} \times \vec{F} = (P - O) \times \vec{F}$$

Notation : $\times$ pour le produit vectoriel

Concepts de la dynamique du solide

Moment de la force : $\overrightarrow{\mathscr{M}}_{\vec{F}/O} = \overrightarrow{OP} \times \vec{F}$

- Le moment est le résultat d'un produit vectoriel
- Il est donc normal au plan dans lequel se déroule la rotation que peut provoquer la force
- Il est colinéaire à l'axe de cette rotation et son sens donne le sens de rotation
- Il ne varie pas quand le point d'application P varie le long de sa ligne d'action



Concepts de la dynamique du solide

En résumé - dynamique Newtonienne objet rigide

- Force non axée sur barycentre engendre déplacement et rotation de l'objet
  - Objet en mouvement linéaire possède une vitesse linéaire
  - Objet qui tourne possède une vitesse angulaire
- **Force** est reliée à la variation de la vitesse (donc à l'**accélération**)
- **Moment de la force** est reliée à l'**accélération angulaire**

Dynamique des objets rigides

Etude de l'état de l'objet rigide au cours du temps pour simuler son mouvement

Etat de l'objet rigide à l'instant t est ainsi défini par :

- une translation (comme pour les particules) : $x(t)$
- mais également une rotation: $R(t)$ = matrice 3×3
- matrice définie par rapport au **barycentre/centre de masse** du solide avec

$$R(t) = \begin{pmatrix} R_{xx} & R_{yx} & R_{zx} \\ R_{xy} & R_{yy} & R_{zy} \\ R_{xz} & R_{yz} & R_{zz} \end{pmatrix}$$

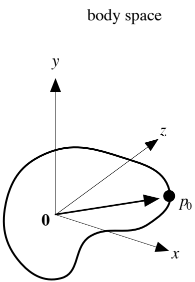
- Au final, état à l'instant t est défini par :

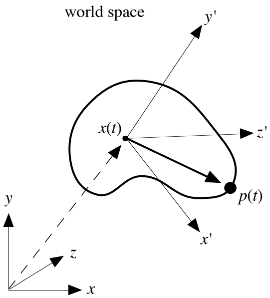
$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ R(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Position ou translation} \\ \text{Rotation ou orientation} \end{pmatrix}$$ mais pas que ...

Espaces objet et monde - Origines des repères

Pour définir la rotation, on va positionner un repère sur l'objet rigide

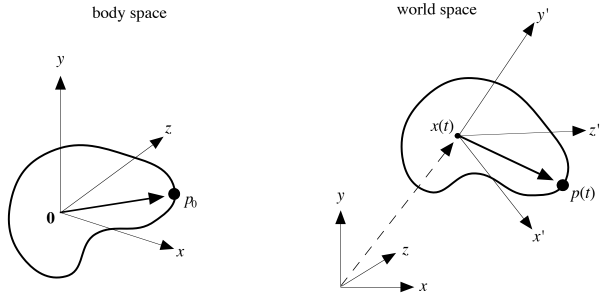
- **Origine** du repère de l'objet $= O =$ **centre de masse** (ou barycentre)
- **Origine** du repère de l'espace monde $= x(t) =$ position du centre de masse





Espaces objet et monde - Axes des repères

- Axes x, y, z de l'espace objet transformés dans l'espace monde en $x' = R(t)\,x$, $y' = R(t)\,y$ et $z' = R(t)\,z$



Espaces objet et monde - Matrice de rotation $R(t)$

Interprétation de la matrice de rotation $R(t)$

- Axe x de l'espace objet a comme direction au temps t :

$$R(t)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}R_{xx} & R_{yx} & R_{zx}\\R_{xy} & R_{yy} & R_{zy}\\R_{xz} & R_{yz} & R_{zz}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}R_{xx}\\R_{xy}\\R_{xz}\end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ Première colonne de R(t) donne la direction de l'axe x' dans l'espace monde

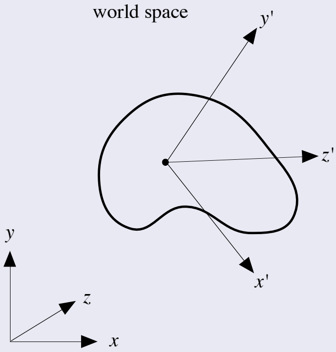
- Même raisonnement avec 2e et 3e colonne de $R(t)$ et axes y, z

$\rightarrow$ 2e, 3e colonnes donnent direction axes y', z' dans l'espace monde

Espaces objet et monde - Matrice de rotation $R(t)$

Interprétation de la matrice de rotation $R(t)$

$$R(t) = [\, x' \;\; y' \;\; z' \,]$$



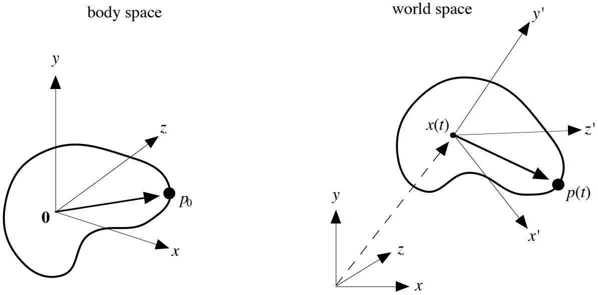
Orientation de l'objet en fonction de son barycentre

Espaces objet et monde - Point de l'objet rigide

Coordonnées d'un point à la surface ou à l'intérieur de l'objet rigide

- Point fixé p_0 de l'espace objet est transformé dans l'espace monde en

$$p(t) = R(t)\ p_0 + x(t)$$



Etat de l'objet rigide - Quantité de mouvement et moment cinétique

Corps rigide : masse répartie dans un volume + translation + rotation

Notion de quantité de mouvement (*linear momentum*)

- Quantité physique représentant la vitesse en fonction de la **masse**
- Elle est relative à la translation de l'objet

Notion de moment cinétique (*angular momentum*)

- Quantité physique représentant la vitesse angulaire en fonction de la **masse**
  $\Rightarrow$ dépend de la répartition du poids au sein du corps rigide
- Quantité physique analogue mais par rapport à la rotation du solide

Deux grandeurs physiques qui font partie de l'état de l'objet rigide

Etat de l'objet rigide - Quantité de mouvement

Quantité de mouvement à l'instant t - Exprimée en fonction du barycentre

$$P(t) = M\ v(t)$$

Relation qui en découle

$$v(t) = \frac{P(t)}{M}$$

Etat de l'objet rigide - Moment cinétique

Moment cinétique (*angular momentum*)

- Grandeur vectorielle qui est conservée
- Décrit l'état général de rotation d'un système physique
- Analogue à la quantité de mouvement pour la translation

Définition pour un solide

- Moment cinétique d'un solide : $L(t) = I(t)\,\omega(t)$
- $I(t)$: tenseur ou moment d'inertie (matrice 3×3)
  - décrit la répartition des masses dans l'objet par rapport à son barycentre
  - dépend de la rotation mais pas de la translation de l'objet
  - mesure la résistance d'un objet à sa mise en rotation

Etat de l'objet rigide et son évolution

Au final, état de l'objet rigide au temps t

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ R(t) \\ P(t) = M\ v(t) \\ L(t) = I(t)\ \omega(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Position ou translation} \\ \text{Rotation ou orientation} \\ \text{Quantité de mouvement} \\ \text{Moment cinétique} \end{pmatrix}$$

Etat de l'objet rigide et son évolution

Et toujours la même question :

Comment évolue cet état au cours du temps ?

Utilisation méthode d'Euler pour calculer le nouvel état

$$X(t+dt) = X(t) + dt\,\frac{d}{dt}X(t)$$

Besoin de calculer : $\frac{d}{dt}X(t) = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x(t) \\ R(t) \\ P(t) = M\ v(t) \\ L(t) = I(t)\,\omega(t) \end{pmatrix}$

Etat de l'objet rigide - Vecteur vitesse linéaire

Dérivée de la position = Vitesse linéaire

- $\frac{d}{dt}x(t) = \dot{x}(t) = v(t)$ vitesse linéaire du centre de masse

Etat de l'objet rigide - Vecteur vitesse angulaire

Dérivée de la rotation - signification mathématique

- $\frac{d}{dt}R(t) = \dot{R}(t) = \ \ldots$ sans doute un lien avec $\omega(t)$
- Colonnes de $\dot{R}(t)$ doit décrire la vitesse à laquelle changent les axes x, y et z

Dérivée de la rotation : $\frac{d}{dt}R(t) = \dot{R}(t) = \vec{\omega}(t)^* R(t)$

- $\dot{R}(t) = \left(\vec{\omega}(t) \times \begin{pmatrix} R_{xx} \\ R_{xy} \\ R_{xz} \end{pmatrix} \ \vec{\omega}(t) \times \begin{pmatrix} R_{yx} \\ R_{yy} \\ R_{yz} \end{pmatrix} \ \vec{\omega}(t) \times \begin{pmatrix} R_{zx} \\ R_{zy} \\ R_{zz} \end{pmatrix} \right)$

$\rightarrow$ $\dot{R}(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -\omega_z(t) & \omega_y(t) \\ \omega_z(t) & 0 & -\omega_x(t) \\ -\omega_y(t) & \omega_x(t) & 0 \end{pmatrix}}_{\omega(t)*} R(t)$

(avec $\times$: produit vectoriel)

Etat de l'objet rigide et son évolution

Besoin de calculer $\frac{d}{dt}X(t)$ pour avoir le nouvel état $X(t+dt) = X(t) + dt\ \frac{d}{dt}X(t)$

$$\frac{d}{dt}X(t) = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x(t) \\ R(t) \\ P(t) \\ L(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Vitesse linéaire : } v(t) \\ \dot{R}(t) = \vec{\omega}(t)^* R(t) \\ ? \\ ? \end{pmatrix}$$

Etat de l'objet rigide et son évolution

Dérivée de la quantité de mouvement

$$\frac{d}{dt}P(t) = \dot{P}(t) = \frac{d}{dt}M\ v(t) = M\ \dot{v}(t) = F(t)$$

Relation qui en découle

$$\dot{v}(t) = \frac{\dot{P}(t)}{M} = \frac{F(t)}{M}$$

Dérivée du moment cinétique

- Egale au moment total des forces appliquées sur l'objet :

$$\frac{d}{dt}L(t) = \dot{L}(t) = \tau(t)$$

Etat de l'objet rigide et son évolution

Au final, la dérivée de l'état de l'objet rigide au temps t est définie par :

$$\frac{d}{dt}X(t) = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x(t) \\ R(t) \\ P(t) \\ L(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v(t) \\ \omega(t)^{*}R(t) \\ F(t) \\ \tau(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Vitesse} \\ \omega(t)^{*}R(t) \\ \text{Force totale} \\ \text{Moment total des forces} \end{pmatrix}$$

Etat de l'objet rigide et son évolution

Equation du mouvement de l'objet rigide

$$X(t+dt) = X(t) + dt\,\frac{d}{dt}X(t)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x(t+dt) \\ R(t+dt) \\ P(t+dt) \\ L(t+dt) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ R(t) \\ P(t) \\ L(t) \end{pmatrix} + dt \begin{pmatrix} v(t) \\ \omega(t)^{*}R(t) \\ F(t) \\ \tau(t) \end{pmatrix}$$

Etat de l'objet rigide - Conservation des quantités physiques

Conservation de la masse

- Lors d'une transformation, aucune matière n'est perdue et aucune matière n'est créée; la matière est transformée de son état initial vers un état final
- La masse se conserve au cours de toute expérience
- "Rien ne se perd, rien ne se crée, tout se transforme"

Etat de l'objet rigide - Conservation des quantités physiques

Conservation de la quantité de mouvement

- Selon seconde loi de Newton, si pas de forces appliquées sur le solide, nous avons : $F(t) = \mathbf{0} \Rightarrow \frac{d}{dt}P(t) = \frac{d}{dt}mv(t) = \mathbf{0}$
- Cela implique que $P(t) = mv(t)$ **est constant**

Conservation du moment cinétique

- De façon similaire, si le moment de la force est nul, on a : $\tau(t) = \mathbf{0} \Rightarrow \frac{d}{dt}L(t) = \mathbf{0}$
- Cela implique que $L(t)$ **est constant**

Dynamique du solide - analogie translation/rotation

	Translation	**Rotation**
Position	$x(t)$	$R(t)$
Vitesse	$\dot{x}(t)$	$\dot{R}(t), \omega(t)$
Accélération	$\ddot{x}(t)$	$\ddot{R}(t)$
Cause du mouvement	$\vec{F}(t)$	Moment de la force : $\mathscr{M}_{\vec{F}/O}, \tau(t)$
Grandeur d'inertie	M	Tenseur d'inertie : $I(t)$
Équation du mouvement	$M\ddot{x}(t) = \vec{F}$	$I(t)\ \ddot{R}(t) = \mathscr{M}_{\vec{F}/O}$
Conservation	Quantité de mouvement : $P(t)$	Moment cinétique : $L(t)$

Discrétisation de l'objet en n particules/sommets

Comment on fait la simulation concrétement ?

Discrétisation

- Objet discrétisé en n particules/sommets
  - de masses m_i,
  - de positions constantes r_{0_i} dans l'espace objet
- Position de la particule i dans l'espace monde :

$$r_i(t) = R(t)\ r_{0_i} + x(t)$$

Discrétisation - Barycentre

Masse de l'objet

- Masse totale de l'objet : $M = \sum_i m_i$

Centre de masse de l'objet

- Centre de masse : $\frac{1}{M}\sum_i m_i r_i(t) = \frac{\sum_i m_i r_i(t)}{\sum_i m_i}$

Discrétisation - Barycentre

Centre de masse de l'objet dans les deux repères

- Centre de masse est l'origine 0 du repère objet
  - particule de positions constantes r_{0_i} dans l'espace objet

$$\frac{1}{M}\sum_i m_i r_{0_i}(t) = \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Centre de masse correspond à l'origine $x(t)$ du repère monde
  - particule de positions $r_i(t) = R(t)\ r_{0_i} + x(t)$ dans monde

$$\frac{1}{M}\sum_i m_i r_i(t) = \frac{1}{M}\sum_i m_i\left(R(t)\ r_{0_i} + x(t)\right) = \frac{1}{M}\left(R(t)\sum_i m_i r_{0_i} + \sum_i m_i\ x(t)\right) = x(t)$$

Discrétisation - Vitesse

Vitesse d'une particule

- Vitesse de la particule i :

$$
\begin{aligned}
\dot{r}_i(t) &= \frac{d}{dt} r_i(t) = \frac{d}{dt}(R(t)\ r_{0_i} + x(t)) \\
&= \dot{R}(t)\ r_{0_i} + \dot{x}(t) \\
&= \omega(t)^* R(t)\ r_{0_i} + v(t) \\
&= \omega(t)^* (R(t)\ r_{0_i} + x(t) - x(t)) + v(t) \\
&= \omega(t)^* (r_i(t) - x(t)) + v(t) \\
&= \omega(t) \times (r_i(t) - x(t)) + v(t)
\end{aligned}
$$

avec $\omega(t)^* a = \omega(t) \times a$ pour tout vecteur a

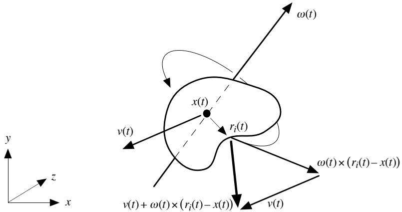
Discrétisation - Vitesse

Vitesse d'une particule

- Vitesse de la particule i :

$$\dot{r}_i(t) = \omega(t) \times (r_i(t) - x(t)) + v(t)$$

Décomposée en un terme angulaire et un terme linéaire



Discrétisation - Force

Forces appliquées sur l'objet

- $F_i(t)$: force appliquée à la particule i au temps t
- Force totale appliquée sur l'objet : $F(t) = \sum_i F_i(t)$

Rappel : Force engendre un **déplacement** et une **rotation**
Pour l'effet de rotation, il faut étudier le **moment de la force** (*torque*)

Discrétisation - Moment de la force

Moment de la force

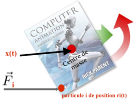
- Moment de la force F_i s'exerçant sur la particule i de position $r_i(t)$ par rapport au barycentre (qui sert de pivot) de position $x(t)$:

$$\tau_i(t) = (r_i(t) - x(t)) \times F_i(t)$$

- Moment total des forces appliquées sur l'objet :

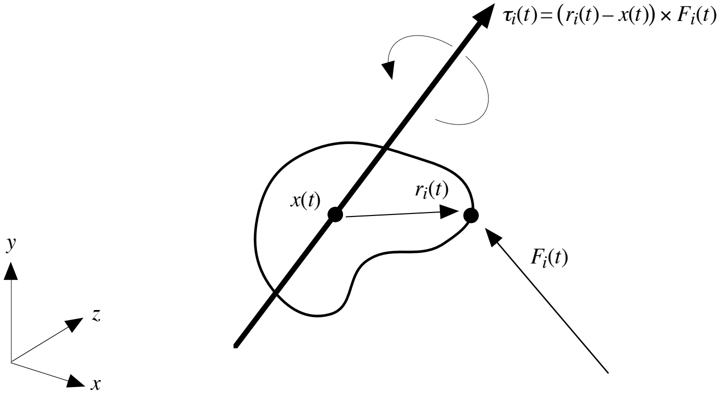
$$\tau = \sum_i \tau_i(t) = \sum_i (r_i(t) - x(t)) \times F_i(t)$$

Notation : $\times$ pour le produit vectoriel



Discrétisation - Moment de la force

Moment de la force $\tau_i(t)$ engendré par la force $F_i(t)$ agissant en $r_i(t)$ de l'objet



Discrétisation - Force et moment de la force

Différence entre force et moment de la force

- Force appliquée à la particule i indépendant de sa position
- Aucune info dans $F(t)$ sur l'endroit où les forces sont appliquées

- Moment de la force appliqué à la particule i dépend de la localisation relative $r_i(t)$ de la particule par rapport au centre de masse (pivot)
- τ comporte information sur la distribution des forces $F_i(t)$ sur l'objet

Discrétisation - Quantité de mouvement

Quantité de mouvement (*linear momentum*)

- Quantité de mouvement particule de masse m et de vitesse v :

$$\vec{p} = m\,\vec{v}$$

- Quantité de mouvement particule i de masse m_i et de vitesse $\dot{r}_i(t)$:

$$p_i = m_i \dot{r}_i(t)$$

Discrétisation - Quantité de mouvement

Quantité de mouvement

- Quantité de mouvement totale pour l'objet :

$$\begin{aligned}
P(t) &= \sum_i m_i \dot{r}_i(t) \\
&= \sum_i m_i \left(\omega(t) \times (r_i(t) - x(t)) + v(t)\right) \\
&= \sum_i m_i \, \omega(t) \times (r_i(t) - x(t)) + \sum_i m_i \, v(t) \\
&= \omega(t) \times \sum_i m_i \, (r_i(t) - x(t)) + \sum_i m_i \, v(t)
\end{aligned}$$

Discrétisation - Quantité de mouvement

Or on a :

$$\begin{aligned}\sum_i m_i\,(r_i(t) - x(t)) &= \sum_i m_i\,(R(t)\,r_{0_i} + x(t) - x(t)) \\ &= R(t)\sum_i m_i\,r_{0_i} = \mathbf{0}\end{aligned}$$

Quantité de mouvement

- Quantité de mouvement totale pour l'objet :

$$\Rightarrow P(t) = \sum_i m_i\,v(t) = M\,v(t)$$

$\rightarrow$ exprimée en fonction du barycentre

Discrétisation - Moment cinétique en un point

Corps rigide : masse est repartie dans le volume qui subit une rotation
Engendre notion de moment cinétique représentant la vitesse angulaire en fonction de la masse

Définition pour un point matériel

- Moment cinétique au point O d'un point matériel M de masse m = moment en ce point O de sa quantité de mouvement : $\overrightarrow{L_O}(t) = \overrightarrow{OM} \times \overrightarrow{P}(t)$
- Système de n points matériels M_i de masse m_i par rapport au point O

$$\overrightarrow{L_O}(t) = \sum_i \overrightarrow{OM_i} \times m_i \overrightarrow{v}(M_i)$$

Discrétisation - Dérivée du moment cinétique du solide

On vérifie :

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\overrightarrow{L_O}(t) &= \frac{d}{dt}\left(\sum_i \overrightarrow{OM_i} \times m_i \overrightarrow{v}(M_i)\right) \\
&= \frac{d}{dt}\left(\sum_i \overrightarrow{OM_i}\right) \times m_i \overrightarrow{v}(M_i) + \sum_i \overrightarrow{OM_i} \times \frac{d}{dt}\left(\sum_i m_i \overrightarrow{v}(M_i)\right) \\
&= \overrightarrow{v}(M_i) \times m_i \overrightarrow{v}(M_i) + \sum_i \overrightarrow{OM_i} \times \frac{d}{dt}\left(\sum_i m_i \overrightarrow{v}(M_i)\right) \\
&= \sum_i \overrightarrow{OM_i} \times \frac{d}{dt}\left(\sum_i m_i \overrightarrow{v}(M_i)\right) = \sum_i \overrightarrow{OM_i} \times \sum_i \frac{d}{dt}\left(m_i \overrightarrow{v}(M_i)\right) \\
&= \sum_i \overrightarrow{OM_i} \times \sum_i F_i(t) = \sum_i (\overrightarrow{OM_i} \times F_i(t)) \\
&= \sum_i (r_i(t) - x(t)) \times F_i(t)) = \sum_i \tau_i(t) = \tau(t)
\end{aligned}
$$

Discrétisation - Tenseur ou moment d'inertie

Tenseur ou moment d'inertie

- Déplacement de la particule i par rapport à $x(t)$: $r'_i = r_i(t) - x(t)$
- Tenseur d'inertie (matrice symétrique) :

$$I(t) = \sum \begin{pmatrix} m_i(r'^2_{iy} + r'^2_{iz}) & -m_i r'_{ix} r'_{iy} & -m_i r'_{ix} r'_{iz} \\ -m_i r'_{iy} r'_{ix} & m_i(r'^2_{ix} + r'^2_{iz}) & -m_i r'_{iy} r'_{iz} \\ -m_i r'_{iz} r'_{ix} & -m_i r'_{iz} r'_{iy} & m_i(r'^2_{ix} + r'^2_{iy}) \end{pmatrix}$$

Discrétisation - Tenseur d'inertie

Or $\quad {r'_i}^T r'_i = r'^2_{ix} + r'^2_{iy} + r'^2_{iz}, \qquad r'_i \otimes {r'_i}^T = \begin{pmatrix} r'^2_{ix} & r'_{ix}r'_{iy} & r'_{ix}r'_{iz} \\ r'_{iy}r'_{ix} & r'^2_{iy} & r'_{iy}r'_{iz} \\ r'_{iz}r'_{ix} & r'_{iz}r'_{iy} & r'^2_{iz} \end{pmatrix}.$

On en déduit : $I(t) = \sum m_i {r'_i}^T r'_i \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} m_i r'^2_{ix} & m_i r'_{ix}r'_{iy} & m_i r'_{ix}r'_{iz} \\ m_i r'_{iy}r'_{ix} & m_i r'^2_{iy} & m_i r'_{iy}r'_{iz} \\ m_i r'_{iz}r'_{ix} & m_i r'_{iz}r'_{iy} & m_i r'^2_{iz} \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow I(t) = \sum m_i \left(({r'_i}^T r'_i)\mathbf{1} - r'_i {r'_i}^T \right)$$

Discrétisation - Tenseur d'inertie

Or $r_i(t) = R(t){r_0}_i + x(t) \Rightarrow r'_i(t) = R(t){r_0}_i$ et $R(t)R(t)^T = \mathbf{1}$

$$\begin{aligned}
I(t) &= \sum m_i \left(({r'_i}^T r'_i)\mathbf{1} - r'_i {r'_i}^T \right) \\
&= \sum m_i \left((R(t){r_0}_i)^T (R(t){r_0}_i)\mathbf{1} - (R(t){r_0}_i)(R(t){r_0}_i)^T \right) \\
&= \sum m_i \left({{r_0}_i}^T R(t)^T R(t){r_0}_i\mathbf{1} - R(t){r_0}_i{{r_0}_i}^T R(t)^T \right) \\
&= \sum m_i \left({{r_0}_i}^T {r_0}_i\mathbf{1} - R(t){r_0}_i{{r_0}_i}^T R(t)^T \right) \\
&= \sum m_i \left(R(t)({{r_0}_i}^T {r_0}_i)R(t)^T\mathbf{1} - R(t){r_0}_i{{r_0}_i}^T R(t)^T \right) \\
&= R(t) \left(\sum m_i (({{r_0}_i}^T {r_0}_i)\mathbf{1} - {r_0}_i{{r_0}_i}^T) \right) R(t)^T
\end{aligned}$$

Discrétisation - Tenseur d'inertie

Tenseur d'inertie - partie constante : I_{body}

- $I_{body} = \sum m_i \left((r_{0_i}^T r_{0_i})\mathbf{1} - r_{0_i} r_{0_i}^T \right)$ spécifié dans l'espace de l'objet (donc constant pendant la simulation, donc pré-calculé)

$$\sum m_i \left((r_{0ix}^2 + r_{0iy}^2 + r_{0iz}^2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} r_{0ix}^2 & r_{0ix} r_{0iy} & r_{0ix} r_{0iz} \\ r_{0iy} r_{0ix} & r_{0iy}'^2 & r_{0iy} r_{0iz} \\ r_{0iz} r_{0ix} & r_{0iz}' r_{0iy} & r_{0iz}^2 \end{pmatrix} \right)$$

Discrétisation - Tenseur d'inertie

Tenseur d'inertie

- $I_{body} = \sum m_i \left((r_{0_i}^T r_{0_i})\mathbf{1} - r_{0_i} r_{0_i}^T \right)$
- $I(t) = R(t) I_{body} R(t)^T$
- Inverse du tenseur : $I^{-1}(t) = R(t) I_{body}^{-1} R(t)^T$

On récapitule

Etat de l'objet rigide au temps t :

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ R(t) \\ P(t) \\ L(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Position} \\ \text{Orientation (ou rotation)} \\ \text{Quantité de mouvement} \\ \text{Moment cinétique} \end{pmatrix}$$

- $P(t) = M\ v(t) \Rightarrow v(t) = \frac{P(t)}{M}$
- $I(t) = R(t) I_{body} R(t)^T$
- $L(t) = I(t)\,\omega(t) \Rightarrow \omega(t) = I(t)^{-1} L(t)$

Point de vue animation 3D

Comment on implémente cela ?

Structure de données de l'objet rigide

Algorithm 1 Structure de données du solide

```
struct RigidBody {
/* Constant quantities */
double mass;
matrix Ibody, Ibodyinv;
/* State variables */
triple x, P, L;
matrix R;
/* Derived matrix */
matrix Iinv;
triple v, omega;
/* Computed quantities */
triple force, torque;
}
```

Initialisation des objets solides

Etape 1 : Spécification de l'état de l'objet rigide $X(t)$

- Pour tous les solides de la scène :
  - Spécification de la masse : `mass`
  - Calcul de `IBody` et `IBodyinv`
  - Spécification de l'état $X(t)$: `x, R, P, L`

Algorithm 2 Initialisation des objets solides

1: RigidBody Bodies[NBodies];
2: #define StateSize 18

Calcul de $\frac{d}{dt}X(t)$

Etape 2 : Calcul de la dérivée de l'état $\frac{d}{dt}X(t)$

- Pour tous les solides de la scène :
  - Calcul des vitesses : $v(t) = P(t)/M$ (`v`)
  - Calcul de $I^{-1}(t) = R(t)I_{body}^{-1}R(t)^T$ (`Iinv`)
  - Calcul de $\omega(t) = I^{-1}(t)L(t)$ (`omega`)
  - Calcul de $\dot{R}(t) = \omega(t)^* R(t)$
  - Calcul de $F(t)$ (`force`) et de leurs moments $\tau(t)$ (`torque`)
    - Tient compte de toutes les forces : gravité, vent, interaction avec autres objets, etc.

Algorithm 3 Initialisation et calculs

```
RigidBody Bodies[NBodies];
#define StateSize 18
void ComputeForceAndTorque(double t, RigidBody *rb);
void DdtStateToArray(RigidBody *rb, double *xdot);
```

Calcul de $\frac{d}{dt}X(t)$

Algorithm 4 Calcul de $\frac{d}{dt}X(t)$

void Dxdt(double t, double x[], double xdot[]) {
/* Remplissage des variables de l'état du solide (x, R, P, L)
et calcul de $v, I^{-1}, \omega(t)$ */
ArrayToBodies(x);
for i = 0 to *NBodies* **do**
    ComputeForceAndTorque(t, &Bodies[i]);
    /* Remplissage de xdot ($v = \dot{x}, \dot{R}, F = \dot{P}, \tau = \dot{L}$)
    DdtStateToArray(&Bodies[i], &xdot[i * StateSize]);
end for
}

Calcul de $X(t+dt)$

Etape 3 : Calcul du nouvel état de l'objet rigide : $X(t+dt)$

- Solveur `solve` :
  - Allocation mémoire des structures employées (`xdot`, etc.)
  - Calcul de $\frac{d}{dt}X(t)$ en appelant `Dxdt`
  - Schéma d'intégration pour obtenir $X(t+dt)$:

$\rightarrow$ Schéma d'Euler explicite : $X(t+dt) = X(t) + dt\ \frac{d}{dt}X(t)$

Boucle de simulation

Algorithm 5 Boucle de simulation

```
void RunSimulation() {
double x0[StateSize * NBodies], xFinal[StateSize * NBodies];
InitStates();
BodiesToArray(xFinal);
for t = 0 to 10 do
    /* copy xFinal back to x0 */
    for i = 0 to StateSize * NBodies do
        x0[i] = xFinal[i];
        solve(x0, xFinal, StateSize * NBodies, t, t + 1./24., Dxdt);
        /* copy dX(t + 1/24 ) into state variables */
        ArrayToBodies(xFinal);
        DisplayBodies();
    end for
end for
}
```

Référence initiale

- Course notes SIGGRAPH 2001 - David Baraff - Physically Based Modeling - Rigid Body Simulation