# M2 Image, Développement et Technologies 3D (ID3D)
# UE Animation, Corps Articulés et Moteurs physiques
# Partie - Simulation par modèles physiques
# Cours 5 - Position Based Dynamics (PBD)

Florence Zara

LIRIS - équipe Origami
Université Claude Bernard Lyon 1

http://liris.cnrs.fr/florence.zara
E-mail: florence.zara@liris.cnrs.fr

# Plan du cours

- Rappel de l'approche classique de la dynamique Newtonienne
- Présentation de l'approche *Position Based Dynamics* pour simuler des objets
- Application à la simulation d'objets déformables : contraintes de type ressorts
- Application à la simulation de fluides : contraintes adaptées aux fluides

# Dynamique Newtonienne - simulation de particules

## Initialisation

Position initiale $x_i(t_0)$ des particules

Vitesse initiale $v_i(t_0)$ des particules

Masse $m_i$ des particules

Pas de temps dt de la simulation

## Boucle de simulation

1. **Calcul des forces $F_i(t)$ appliquées sur les particules**

   Forces extérieures : gravité, vent, interaction, etc.

   Forces internes au modèle physique : forces dues à des ressorts (objets déformables)

2. **Calcul des accélérations**

   $a_i(t) = F_i(t) / m_i$ (seconde loi de Newton)

3. **Intégration pour obtenir les nouvelles vitesses et positions (méthode d'Euler symplectique)**

   $v_i(t+dt) = v_i(t) + dt\ a_i(t)$

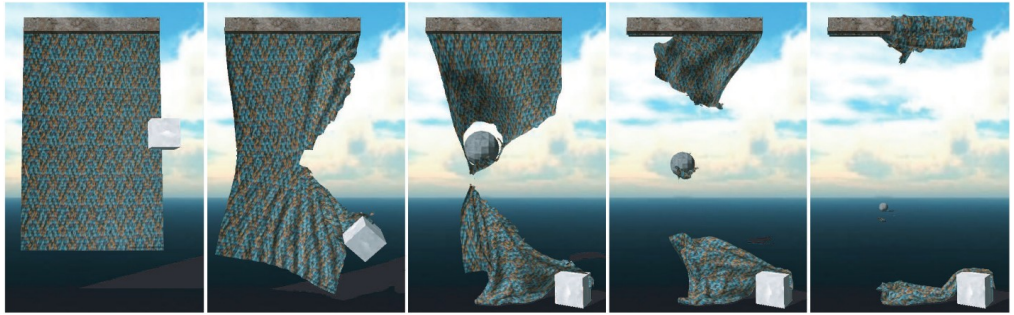
   $x_i(t+dt) = x_i(t) + dt\ v_i(t+dt)$

**Approche basée sur le calcul de l'ensemble des forces exercées sur les particules pour calculer les accélérations qui seront intégrées pour obtenir nouvelles vitesses et positions des particules**

# Approche Position Based Dynamics (PBD)

Alternative à l'approche classique de la dynamique Newtonienne
(qui a été présentée dans les cours précédents)

Premier papier en 2006 en Computer Graphics



*Matthias Müller, Bruno Heidelberger, Marcus Hennix, John Ratcliff,* Position Based Dynamics, 2006

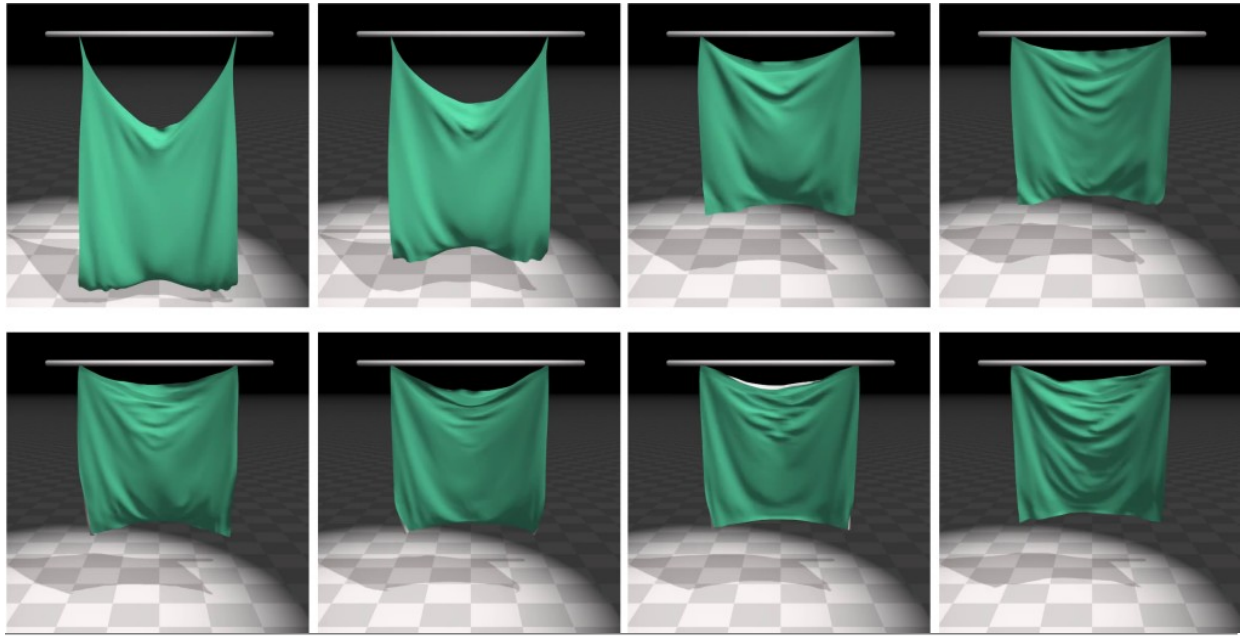
Et des extensions au fil des années

- Position Based Dynamics (2006)
- Hierarchical Position Based Dynamics (2008)
- XPBD: Position-Based Simulation of Compliant Constrained Dynamics (2016)
- A Constraint-based Formulation of Stable Neo-Hookean Materials (2021)

# Simulation d'objets déformables, fluides, solides

**Extended Position Based Dynamics**

*Miles Macklin, Matthias Muller, Nuttapong Chentanez* (2016)

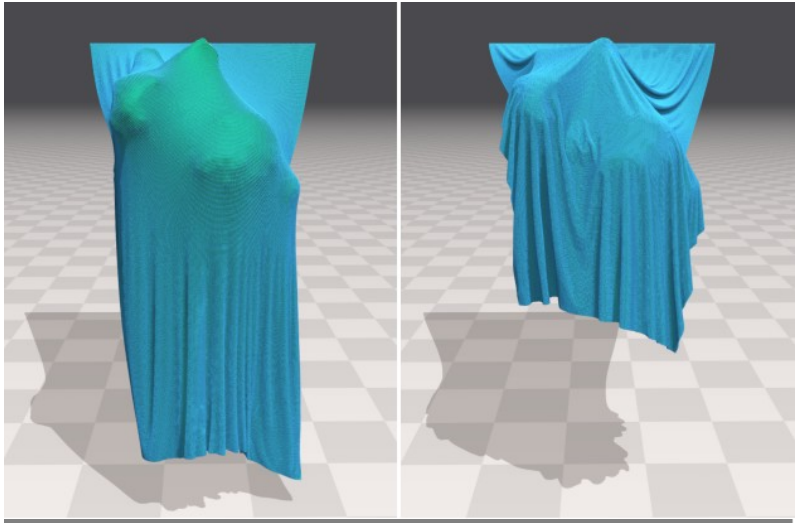


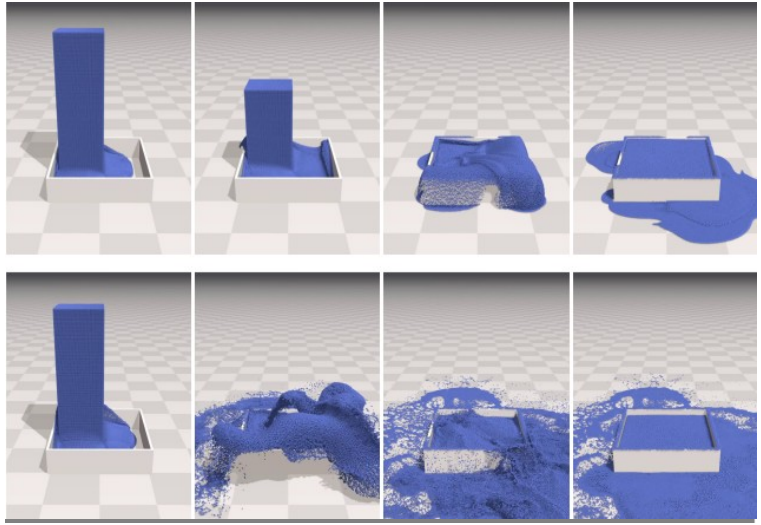
Simulation de textiles (surfaces déformables)

# Simulation d'objets déformables, fluides, solides

**Small Steps in Physics Simulation**

*Miles Macklin, Kier Storey, Michelle Lu, Pierre Terdiman, Nuttapong Chentanez, Stefan Jeschke, Matthias Müller* (2019)



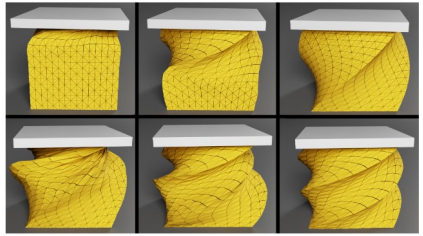


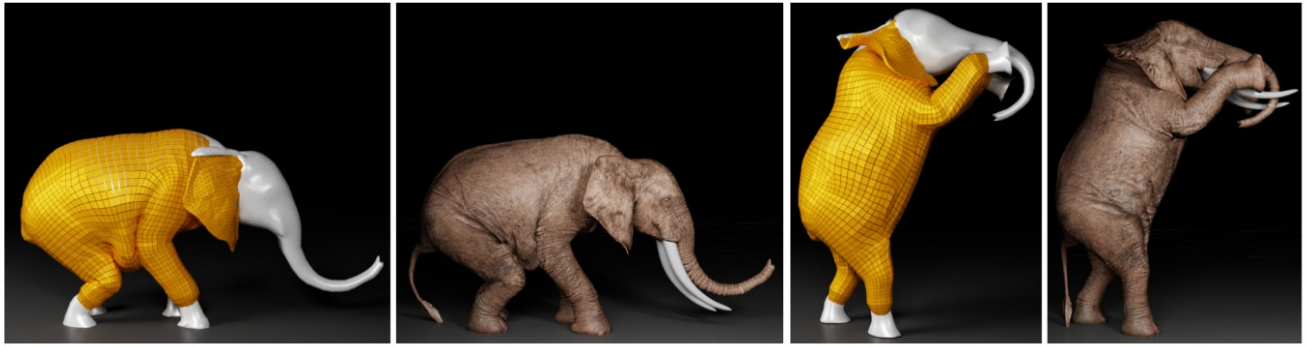
Simulation de textiles et fluides
Intérêt de pouvoir utiliser des petits pas de simulation

# Simulation d’objets déformables, fluides, solides

**A Constraint-based Formulation of Stable Neo-Hookean Materials**

*Miles Macklin, Matthias Müller* (2021)



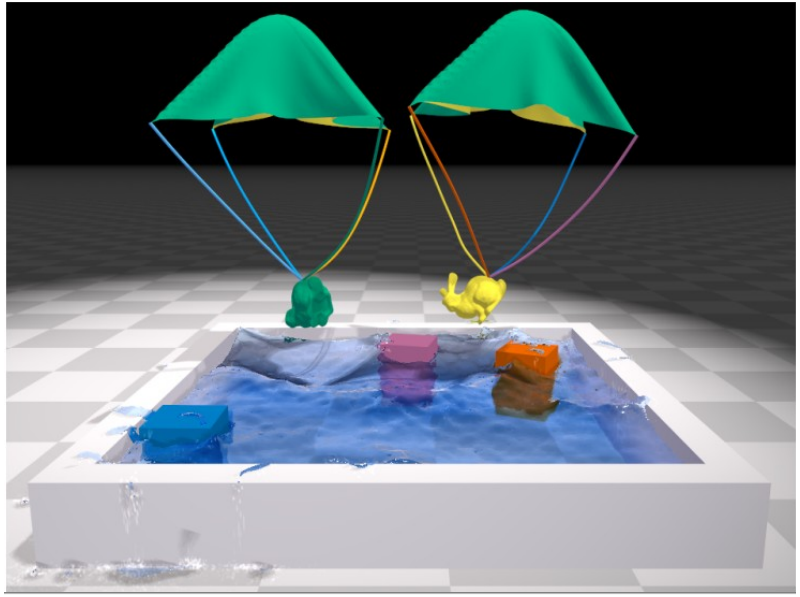


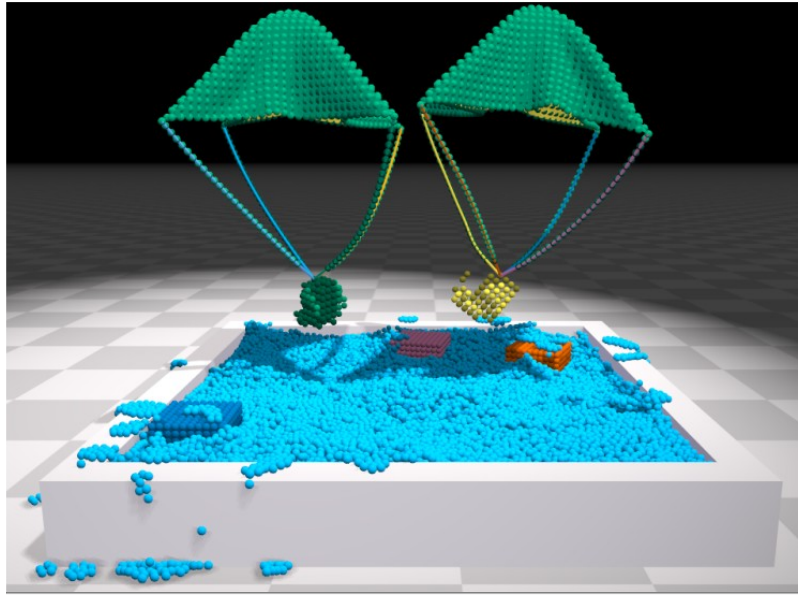
Simulation d’objets 3D déformables basée sur des lois de comportement (Néo-Hooke)

# Simulation d'objets déformables, fluides, solides

**Unified Particle Physics for Real-Time Applications**

*Miles Macklin* *Matthias Müller* *Nuttapong Chentanez* *Tae-Yong Kim* (2014)





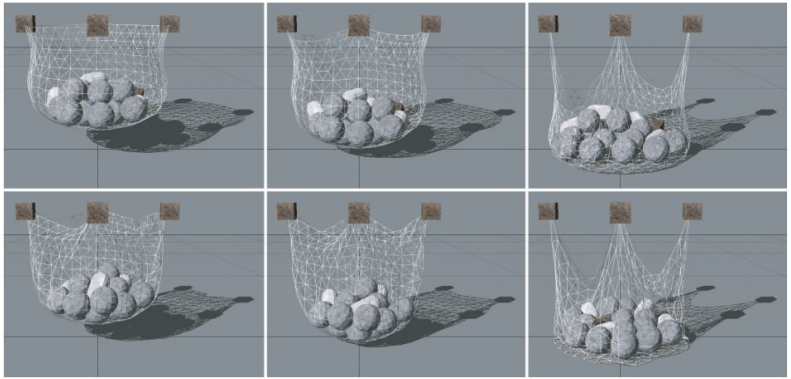
Simulation de fluides basée particules

# Algorithme complet - *Position Based Dynamics* (PBD)

3rd Workshop in Virtual Reality Interactions and Physical Simulation "VRIPHYS" (2006)
C. Mendoza, I. Navazo (Editors)

**Position Based Dynamics**

Matthias Müller Bruno Heidelberger Marcus Hennix John Ratcliff



Based on this data and a time step $\Delta t$, the dynamic object is simulated as follows:

(1) **forall** vertices $i$
(2) initialize $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i^0, \mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i^0, w_i = 1/m_i$
(3) **endfor**
(4) **loop**
(5) **forall** vertices $i$ **do** $\mathbf{v}_i \leftarrow \mathbf{v}_i + \Delta t w_i \mathbf{f}_{ext}(\mathbf{x}_i)$
(6) dampVelocities$(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_N)$
(7) **forall** vertices $i$ **do** $\mathbf{p}_i \leftarrow \mathbf{x}_i + \Delta t \mathbf{v}_i$
(8) **forall** vertices $i$ **do** generateCollisionConstraints$(\mathbf{x}_i \rightarrow \mathbf{p}_i)$
(9) **loop** solverIterations **times**
(10) projectConstraints$(C_1, \ldots, C_{M+M_{coll}}, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_N)$
(11) **endloop**
(12) **forall** vertices $i$
(13) $\mathbf{v}_i \leftarrow (\mathbf{p}_i - \mathbf{x}_i)/\Delta t$
(14) $\mathbf{x}_i \leftarrow \mathbf{p}_i$
(15) **endfor**
(16) velocityUpdate$(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_N)$
(17) **endloop**

# Approche PBD - Méthode basée contraintes

Objet représenté par N particules/sommets i et M contraintes

Contraintes vont permettre de définir les propriétés physiques de l'objet (objet déformable, fluide, rigide, etc.)

- Contraintes = restriction cinétiques = fonction des positions et des dérivées
- Dans le cadre de l'approche PBD : uniquement fonction des positions
- Contraintes unilatérales : $C(x_{i1}, \ldots, x_{inj}) = 0$ *pour la particule i*
- Contraintes bilatérales : $C(x_{i1}, \ldots, x_{inj}) \geqslant 0$ *pour la particule i*
- nj = nombre de contraintes associées à la particule i

Pour chaque contrainte :

il y a un paramètre de raideur associé $k \in [0, 1]$ (modulation de la contrainte)

**Approche PBD : consiste à modifier les positions afin de tenir compte de ces contraintes**

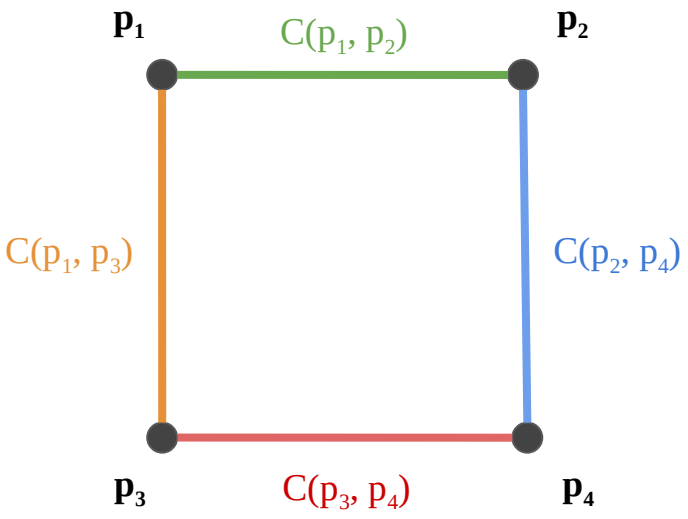
# Approche PBD - Méthode basée contraintes

**Particule/sommet** $i \in [1, \ldots, N]$

position : $x_i$
vitesse : $v_i$
masse : $m_i$

**Contraintes** $j \in [1, \ldots, M]$

cardinalité : $n_j$
indices : $\{i_1, \ldots i_{n_j}\}, i_k \in [1, \ldots N]$
fonction : $C_j(\mathbf{x}_{i_1}, \ldots, \mathbf{x}_{i_{n_j}}) \rightarrow \mathbb{R}$
raideur : $k \in [0,1]$
condition : *égalité* $(C = 0)$ ou *inégalité* $(C \geq 0)$



# Algorithme - Position Based Dynamics (PBD) - Initialisation

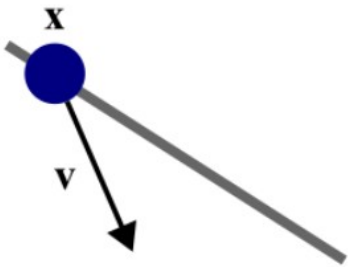
**Première étape de l'algorithme**

Initialisation des positions $x_i$ et vitesses $v_i$ des particules de l'objet

Définition des masses $m_i$ des particules pour définir $w_i = 1/m_i$

Rq : Étape nécessaire car schéma du 2nd ordre en temps (sinon trop de variables inconnues)

```
forall vertices i do
        initialize x_i = x_i^0
        initialize v_i = v_i^0
        initialize w_i = 1 / m_i
endfor
```




*Les accélérations ne sont pas calculées (et donc pas mises à jour dans l'algorithme)*
*L'algorithme va travailler directement sur les positions $x_i$ des particules*

# Algorithme - Position Based Dynamics (PBD) - Simulation

**Seconde étape de l'algorithme**

On va entrer dans la boucle de simulation

Le temps continu est discrétisé avec un pas de temps $\Delta t$

# Boucle de simulation de la méthode PBD

While(True)

forall vertices i do $v_i \leftarrow v_i + \Delta t\, w_i\, f_{ext}$

dampVelocities($v_1, \ldots, v_N$)

forall vertices i do $p_i \leftarrow x_i + \Delta t\, v_i$

forall vertices i do generateCollisionConstraints($x_i \rightarrow p_i$)

loop solverIterations times

projectConstraints($C_1, \ldots, C_{M+Mcoll}, p_1, \ldots, p_N$)

endloop

forall vertices i

$v_i \leftarrow (p_i - x_i)/\Delta t$

$x_i \leftarrow p_i$

endfor

velocityUpdate($v_1, \ldots, v_N$)

endloop

**Schéma d'intégration d'Euler symplectique appliqué aux vitesses**

*normalement :*

$$v(t+dt) = v(t) + dt\, a(t)$$
$$= v(t) + dt\, f(t)/m$$

**ici :** $v(t+dt) = v(t) + dt\, fext(t)/m$

# Boucle de simulation de la méthode PBD

While(True)

forall vertices i do $v_i \leftarrow v_i + \Delta t\, w_i\, f_{ext}$

dampVelocities($v_1, \ldots, v_N$)

forall vertices i do $p_i \leftarrow x_i + \Delta t\, v_i$

forall vertices i do generateCollisionConstraints($x_i \rightarrow p_i$)

loop solverIterations times

projectConstraints($C_1, \ldots, C_{M+Mcoll}, p_1, \ldots, p_N$)

endloop

forall vertices i

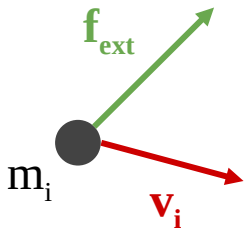
$v_i \leftarrow (p_i - x_i)/\Delta t$

$x_i \leftarrow p_i$

endfor

velocityUpdate($v_1, \ldots, v_N$)

endloop




$w_i = 1 / m_i$

$f_{ext}\, w_i$

# Boucle de simulation de la méthode PBD

While(True)

forall vertices i do $v_i \leftarrow v_i + \Delta t\, w_i\, f_{ext}$

dampVelocities($v_1, \ldots, v_N$)

forall vertices i do $p_i \leftarrow x_i + \Delta t\, v_i$

forall vertices i do generateCollisionConstraints($x_i \rightarrow p_i$)

loop solverIterations times

projectConstraints($C_1, \ldots, C_{M+Mcoll}, p_1, \ldots, p_N$)

endloop

forall vertices i

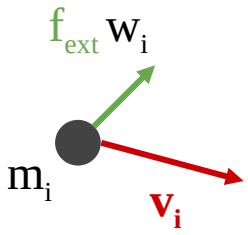
$v_i \leftarrow (p_i - x_i)/\Delta t$

$x_i \leftarrow p_i$

endfor

velocityUpdate($v_1, \ldots, v_N$)

endloop




$w_i = 1 / m_i$

$f_{ext}\, w_i$

$v_i = v_i + \Delta t\, f_{ext}\, w_i$

# Boucle de simulation de la méthode PBD

While(True)

forall vertices i do $v_i \leftarrow v_i + \Delta t\, w_i\, f_{ext}$

dampVelocities($v_1, \ldots, v_N$)

forall vertices i do $p_i \leftarrow x_i + \Delta t\, v_i$

forall vertices i do generateCollisionConstraints($x_i \rightarrow p_i$)

loop solverIterations times

projectConstraints($C_1, \ldots, C_{M+Mcoll}, p_1, \ldots, p_N$)

endloop

forall vertices i

$v_i \leftarrow (p_i - x_i)/\Delta t$

$x_i \leftarrow p_i$

endfor

velocityUpdate($v_1, \ldots, v_N$)

endloop

$w_i = 1 / m_i$ $\qquad$ $f_{ext}\, w_i$

$v_i = v_i + \Delta t\, f_{ext}\, w_i$

# Boucle de simulation de la méthode PBD

While(True)

forall vertices i do $v_i \leftarrow v_i + \Delta t\, w_i f_{ext}$

dampVelocities($v_1, \ldots, v_N$)

forall vertices i do $p_i \leftarrow x_i + \Delta t\, v_i$

forall vertices i do generateCollisionConstraints($x_i \rightarrow p_i$)

loop solverIterations times

projectConstraints($C_1, \ldots, C_{M+Mcoll}, p_1, \ldots, p_N$)

endloop

forall vertices i

$v_i \leftarrow (p_i - x_i)/\Delta t$

$x_i \leftarrow p_i$

endfor

velocityUpdate($v_1, \ldots, v_N$)

endloop

**Amortissement des vitesses**

$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i + ???$

$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i - k_{damp}\mathbf{v}_i \qquad k_{damp} \in [0,1]$

# Boucle de simulation de la méthode PBD

While(True)

forall vertices i do $v_i \leftarrow v_i + \Delta t\, w_i f_{ext}$

dampVelocities($v_1, \ldots, v_N$)

forall vertices i do $p_i \leftarrow x_i + \Delta t\, v_i$

forall vertices i do generateCollisionConstraints($x_i \rightarrow p_i$)

loop solverIterations times

projectConstraints($C_1, \ldots, C_{M+Mcoll}, p_1, \ldots, p_N$)

endloop

forall vertices i

$v_i \leftarrow (p_i - x_i)/\Delta t$

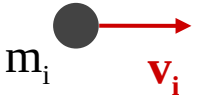
$x_i \leftarrow p_i$

endfor

velocityUpdate($v_1, \ldots, v_N$)

endloop

**Amortissement des vitesses**




$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i + ???$

$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i - k_{damp}\mathbf{v}_i \qquad k_{damp} \in [0,1]$

# Boucle de simulation de la méthode PBD

While(True)

forall vertices i do $v_i \leftarrow v_i + \Delta t\, w_i f_{ext}$

dampVelocities($v_1, \ldots, v_N$)

forall vertices i do $p_i \leftarrow x_i + \Delta t\, v_i$

forall vertices i do generateCollisionConstraints($x_i \rightarrow p_i$)

loop solverIterations times

projectConstraints($C_1, \ldots, C_{M+Mcoll}, p_1, \ldots, p_N$)

endloop

forall vertices i

$v_i \leftarrow (p_i - x_i)/\Delta t$

$x_i \leftarrow p_i$

endfor

velocityUpdate($v_1, \ldots, v_N$)

endloop

**Schéma d'intégration d'Euler symplectique appliqué aux positions**

Obtention de **prédictions $p_i$** qui ne sont pas directement assignées aux positions

*Algorithme manipule $x_i$ et $p_i$ pour les positions*

# Boucle de simulation de la méthode PBD

While(True)

forall vertices i do $v_i \leftarrow v_i + \Delta t\, w_i f_{ext}$

dampVelocities($v_1, \ldots, v_N$)

forall vertices i do $p_i \leftarrow x_i + \Delta t\, v_i$

forall vertices i do generateCollisionConstraints($x_i \rightarrow p_i$)

loop solverIterations times

projectConstraints($C_1, \ldots, C_{M+Mcoll}, p_1, \ldots, p_N$)

endloop

forall vertices i

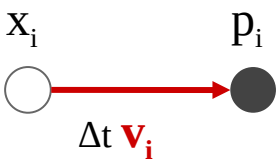
$v_i \leftarrow (p_i - x_i)/\Delta t$

$x_i \leftarrow p_i$

endfor

velocityUpdate($v_1, \ldots, v_N$)

endloop



# Boucle de simulation de la méthode PBD

While(True)

forall vertices i do $v_i \leftarrow v_i + \Delta t\, w_i f_{ext}$

dampVelocities($v_1, \ldots, v_N$)

forall vertices i do $p_i \leftarrow x_i + \Delta t\, v_i$

forall vertices i do generateCollisionConstraints($x_i \rightarrow p_i$)

loop solverIterations times

projectConstraints($C_1, \ldots, C_{M+Mcoll}, p_1, \ldots, p_N$)

endloop

forall vertices i

$v_i \leftarrow (p_i - x_i)/\Delta t$

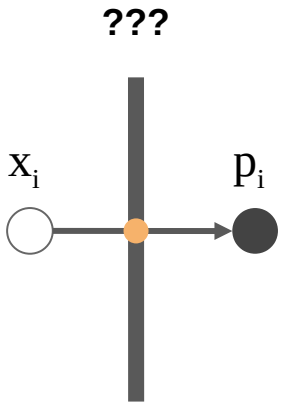
$x_i \leftarrow p_i$

endfor

velocityUpdate($v_1, \ldots, v_N$)

endloop

**Génération des contraintes externes non permanentes (collisions)**



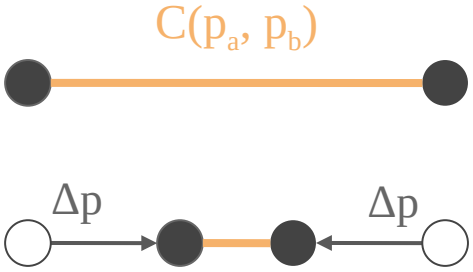

$C \leftarrow C \cup C_{col}(p_i)$

# Boucle de simulation de la méthode PBD

```
While(True)
    forall vertices i do v_i ← v_i + Δt w_i f_ext

    dampVelocities(v_1, . . . , v_N )

    forall vertices i do p_i ← x_i + Δt v_i

    forall vertices i do generateCollisionConstraints(x_i → p_i)

    loop solverIterations times
        projectConstraints(C_1, . . . ,C_M+Mcoll , p_1, . . . , p_N )
    endloop

    forall vertices i
        v_i ← (p_i − x_i)/Δt
        x_i ← p_i
    endfor
    velocityUpdate(v_1, . . . , v_N )

endloop
```

**Correction des prédictions $p_i$ en fonction des contraintes**

Utilisation d'un solveur itératif
*(détaillé par la suite)*



# Boucle de simulation de la méthode PBD

While(True)

forall vertices i do $v_i \leftarrow v_i + \Delta t\, w_i\, f_{ext}$

dampVelocities($v_1, \ldots, v_N$)

forall vertices i do $p_i \leftarrow x_i + \Delta t\, v_i$

forall vertices i do generateCollisionConstraints($x_i \rightarrow p_i$)

loop solverIterations times

projectConstraints($C_1, \ldots, C_{M+Mcoll}, p_1, \ldots, p_N$)

endloop

forall vertices i

$v_i \leftarrow (p_i - x_i)/\Delta t$

$x_i \leftarrow p_i$

endfor

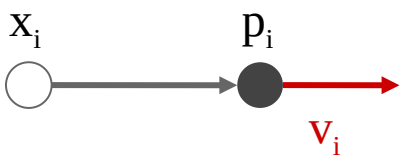
velocityUpdate($v_1, \ldots, v_N$) ← frictions, collisions, etc.

endloop

**Mise à jour finale avec l'intégration de Verlet**

$$\mathbf{v_i} = \frac{\mathbf{p_i} - \mathbf{x_i}}{\Delta t}$$

$$\mathbf{x_i} = \mathbf{p_i}$$



# Algorithme - Position Based Dynamics (PBD)

**Initialisation**

```
forall vertices i do
        initialize x_i = x_i^0
        initialize v_i = v_i^0
        initialize w_i = 1 / m_i
endfor
```

```
While(True)
        forall vertices i do v_i ← v_i + Δt w_i f_ext

        dampVelocities(v_1, . . . , v_N )

        forall vertices i do p_i ← x_i + Δt v_i

        forall vertices i do generateCollisionConstraints(x_i → p_i)

        loop solverIterations times
                projectConstraints(C_1, . . . ,C_M+Mcoll , p_1, . . . , p_N )
        endloop

        forall vertices i
                v_i ← (p_i − x_i)/Δt
                x_i ← p_i
        endfor
        velocityUpdate(v_1, . . . , v_N )
endloop
```

**Boucle de simulation**

# Résumé de l'algorithme PBD

1. **Initialisation des positions et vitesses** (nécessaire car schéma du 2nd ordre en temps)

2. **Schéma d'intégration d'Euler symplectique appliqué aux vitesses et positions**
   Calcul des forces/interactions **extérieures** *pas de calculs des accélérations*
   Calcul des vitesses $v_i$ en fonction de ces forces extérieures *méthode d'Euler*
   Amortissement des vitesses
   Calcul des prédiction $p_i$ *méthode d'Euler - pas directement assignées aux positions*
   *algorithme manipule $x_i$ et $p_i$ pour les positions*

3. Considère les **contraintes extérieures non-permanentes** (comme les collisions)
   Définition des contraintes de collisions

4. Utilisation **solveur itératif pour corriger les positions prédites** afin de satisfaire les contraintes

M contraintes internes à l'objet et $M_{coll}$ contraintes de collisions $p_i = p_i + \Delta p_i$

5. Utilisation des prédictions pi pour **mettre à jour les vitesses $v_i$ et les positions $x_i$**
   $v_i = (p_i - v_i) / dt$ approximation de la dérivée par rapport à ces 2 "positions"

# Ce qui reste à comprendre de cette approche PBD

Quelles sont les contraintes et comment elles se définissent ?

Comment sont résolues ces contraintes ?

# Résolution des contraintes - Utilisation d'un solveur itératif

**<u>Objectif :</u> Corriger les positions prédites $p_i$ afin de satisfaire des contraintes**

Résolution d'un système ayant M équations avec 3N inconnues :

M contraintes connues, N le nombre de particules qui ont une position $x \in \mathbb{R}^3$

Pour la particule i, on a la contrainte *non-linéaire* de la forme : $C(x_{i1}, \ldots, x_{inj}) = 0$ ou $C(x_{i1}, \ldots, x_{inj}) \geqslant 0$

La **méthode de Gauss-Seidel** est choisie pour résoudre le système, par contre elle résout uniquement des systèmes d'équations *linéaires* de la forme $A\,x = b$

=> Linéarisation à faire des fonctions de contraintes dans le voisinage de la solution

= Passage de la formulation de la contrainte de la forme $c(x) = 0$ à la forme $A\,x = 0$

# Résolution des contraintes - Linéarisation des contraintes

Dans le cas d'une contrainte d'égalité $c(x) = 0$, la contrainte est linéarisée en approximant comme suit :

*Rappel développement limité d'ordre 1 au voisinage de $t_1$:* $f(t_1) \approx f(t_0) + f'(t_0)(t_1 - t_0)$ *sur intervalle $[t_0,t_1]$*

Pour la contrainte, on obtient : $C(x) \approx C(p) + \nabla C(p)(x-p) = 0$ *Position x, position prédite p*

$C(p + \Delta p) \approx C(p) + \nabla C(p) \cdot \Delta p = 0$ *En fonction des prédictions p*

$C(\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x}) \approx C(\mathbf{x}) + \nabla C(\mathbf{x}) \cdot \Delta\mathbf{x} = 0$ *En fonction des positions x*

**Cela nous donne une formulation linéaire de la contrainte** : $C(\mathbf{x}) = - \nabla C(\mathbf{x}) \cdot \Delta\mathbf{x}$

Le système de contraintes est alors ré-écrit pour obtenir le système linéaire suivant :

$$\begin{aligned} \nabla C_1(\mathbf{x}) \cdot \Delta\mathbf{x} &= -C_1(\mathbf{x}) \\ &\dots \\ \nabla C_M(\mathbf{x}) \cdot \Delta\mathbf{x} &= -C_M(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

Résolution du système pour obtenir la solution $\Delta x$ qui correspond à la correction de la position **x** tenant compte de toutes ses contraintes

# Résolution des contraintes - Restriction de la solution

Si on n'a pas une contrainte d'égalité, la solution $\Delta\mathbf{x}$ doit être restreinte dans la direction de $\nabla C$ :

$$\Delta\mathbf{x} = \lambda\, \mathbf{M}^{-1} \nabla C(\mathbf{x})^T$$

**M** = matrice des masses des particules, elles sont inversées pour pondérer les corrections proportionnelles aux masses inverses

Il suffit alors simplement de déterminer les multiplicateurs de Lagrange $\lambda$ (facteur scalaire) pour obtenir la solution $\Delta\mathbf{x}$ correspondant à la correction

$C(x)$ a été ré-écrit comme : $-C(x) = \nabla C(x) \cdot \Delta x$ avec $\Delta x = \lambda\, M^{-1} \nabla C(x)^T$

Par substitution on trouve :

$$\lambda = \frac{C(\mathbf{x})}{\nabla C(\mathbf{x}) \mathbf{M}^{-1} \nabla C(\mathbf{x})^T}$$

$$\lambda = \frac{C(\mathbf{x})}{|\nabla C(\mathbf{x})|^2 \mathbf{M}^{-1}}$$

# Résolution des contraintes - En résumé

**Objectif :** Position x doit être modifiée pour prendre en compte des contraintes

**Méthode :**

- Calcul du multiplicateur de Lagrange λ
  - Besoin de calculer la contrainte et gradient de la contrainte

$$\lambda = \frac{C(\mathbf{x})}{\nabla C(\mathbf{x})\mathbf{M}^{-1}\nabla C(\mathbf{x})^T}$$

$$\lambda = \frac{C(\mathbf{x})}{|\nabla C(\mathbf{x})|^2\mathbf{M}^{-1}}$$

- Calcul de la correction qui permet de tenir compte de la contrainte :
  - $\Delta x = \lambda\, M^{-1}\, \nabla C(x)^T$

- Mise à jour de la position x pour prendre en compte la correction :
  - $x = x + \Delta x$

# Retour dans le cadre de l'algorithme PBD

On a obtenu les prédictions $p_i$ des positions

**forall vertices i do** $\mathbf{p_i \leftarrow x_i + \Delta t\, v_i}$

On définit ensuite les contraintes à respecter

**forall vertices i do generateCollisionConstraints**$(\mathbf{x_i \rightarrow p_i})$

On souhaite ensuite qu'elles satisfassent les contraintes énoncées

**loop solverIterations times**
**projectConstraints**$(\mathbf{C_1, \ldots, C_{M+Mcoll}, p_1, \ldots, p_N})$
**endloop**

- Calcul du multiplicateur de Lagrange $\lambda$
- Calcul de la correction $\Delta p_i$
- Mise à jour de la prédiction : $p_i = p_i + \Delta p_i$

# Retour dans le cadre de l'algorithme PBD

Pour la particule i, on a ainsi :

**Si masses uniformes**

$$\Delta p_i = -\lambda \nabla_{p_i} C(p_1, \ldots, p_{n_j})^T$$
$$= -\lambda \nabla_{p_i} C(p)^T$$

**Si masses non-uniformes**

$$\Delta p_i = -\lambda w_i \nabla_{p_i} C(p_1, \ldots, p_{n_j})^T$$
$$= -\lambda w_i \nabla_{p_i} C(p)^T \qquad \text{avec } w_i = 1/m_i$$

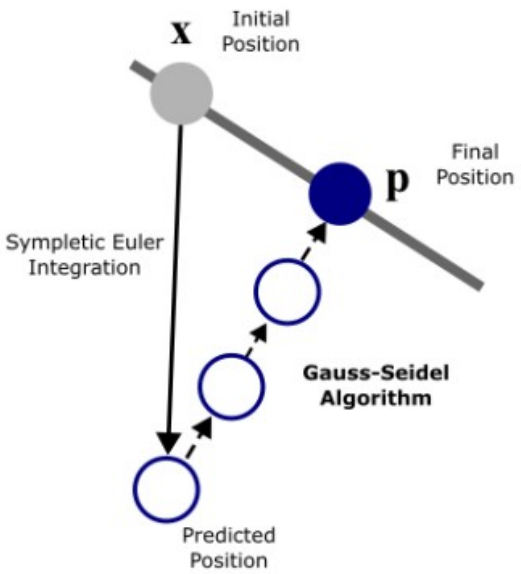
$$\lambda = \frac{C(p)}{\sum_j w_j \|\nabla_{p_j} C(p)\|^2}$$

Pour calculer le multiplicateur de Lagrange,
on a besoin de calculer la contrainte et le gradient de la contrainte

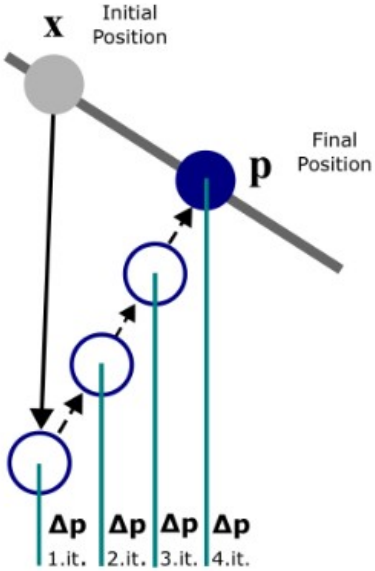
A la fin des itérations, prédiction $p_i$ corrigée avec $p_i = p_i + \Delta p_i$
pour satisfaire toutes les contraintes

# Résolution des contraintes - Principe du solveur itératif

**Méthode de Gauss-Seidel est itérative** : à chaque itération, les nouvelles valeurs calculées remplacent les anciennes valeurs




**Algorithme de Gauss-Seidel en action** :
La position prédite p est déplacée itérativement pour satisfaire la contrainte (la ligne grise)




**Mise à jour de p de manière itérative pour satisfaire nos contraintes :**
*La position prédite p est déplacée itérativement de $\Delta \boldsymbol{p}$ pour satisfaire la contrainte (la ligne grise)*

# Ce qui reste à comprendre de cette approche PBD

Quelles sont les contraintes et comment elles se définissent ?

~~Comment sont résolues ces contraintes ?~~

# Contrainte de distance entre deux particules

Contrainte de distance définie par : $C(p_1, p_2) = \| p_1 - p_2 \| - d$

Contrainte d'égalité : $C(p_1, p_2) = 0 \Rightarrow \| p_1 - p_2 \| = d$

Contrainte d'inégalité : $C(p_1, p_2) \geq 0 \Rightarrow \| p_1 - p_2 \| \geq d$

On peut l'écrire aussi de cette façon :

$$C(p_1, p_2) = [(p_1 - p_2)^T . (p_1 - p_2)]^{0.5} - d$$

# Contrainte de distance entre deux particules

Correction à chaque itération : $\Delta p_i = -\lambda\, w_i\, \nabla_{p_i} C(p)^T$ $\qquad \lambda = \dfrac{C(p)}{\sum_j w_j \|\nabla_{p_j} C(p)\|^2}$

$$\nabla_{p_1} C(p_1, p_2) = \frac{1}{2(\|p_1 - p_2\|^2)^{0.5}}\, 2\,(p_1 - p_2)$$

$$\nabla_{p_1} C(p_1, p_2) = n \quad \text{et} \quad \nabla_{p_2} C(p_1, p_2) = -n \text{ où } n = \frac{p_1 - p_2}{\|p_1 - p_2\|}$$

$$\Delta p_1 = -\frac{w_1(\| p_1 - p_2 \| - d)}{w_1 + w_2}\, \frac{p_1 - p_2}{\|p_1 - p_2\|}$$

$$\Delta p_2 = +\frac{w_2(\| p_1 - p_2 \| - d)}{w_1 + w_2}\, \frac{p_1 - p_2}{\|p_1 - p_2\|}$$

$(a^T.a)' = 2a$

$(f \circ g(x))' = f' \circ g(x)\, g'(x)$

$(x^n)' = n\, x^{n-1}$

# Contrainte de distance entre deux particules

$$C(p_1, p_2) = \| p_1 - p_2 \| - d$$

Contrainte d'égalité : $C(p_1, p_2) = 0 \Rightarrow \| p_1 - p_2 \| = d$

Contrainte d'inégalité : $C(p_1, p_2) \geq 0 \Rightarrow \| p_1 - p_2 \| \geq d$

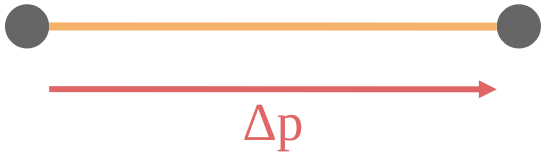
$$\Delta p_1 = - \frac{w_1(\| p_1 - p_2 \| - d)}{w_1 + w_2} \frac{p_1 - p_2}{\|p_1 - p_2\|}$$

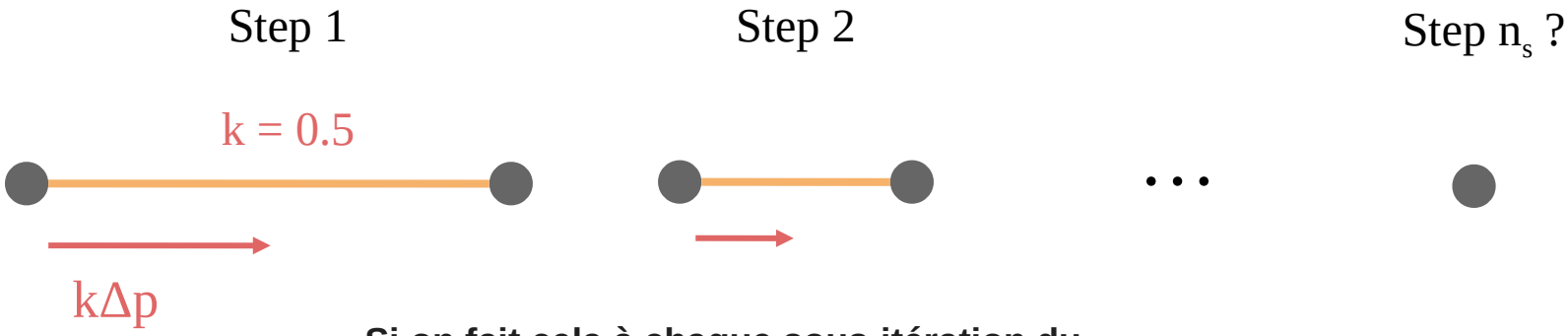
$$\Delta p_2 = + \frac{w_2(\| p_1 - p_2 \| - d)}{w_1 + w_2} \frac{p_1 - p_2}{\|p_1 - p_2\|}$$

Correction à apporter sur $p_1$ et $p_2$ pour tenir compte de la contrainte de distance $C(p_1,p_2)$

# Contrainte de distance entre deux particules - Facteur k

**Application de la modération de la contrainte avec raideur k $\in$ [0, 1] : k Δp**




**Si on fait cela à chaque sous-itération du solveur itératif, l'effet de k est non-linéaire**

Emploi à la place : $k' = 1 - (1 - k)^{1/ns}$ avec $n_s$ le nombre de sous-itérations du solveur

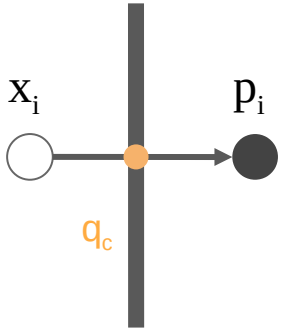
# Contrainte de collision entre deux objets rigides

**<u>Pour chaque particule i :</u>**

- Teste le rayon $x_i \rightarrow p_i$
- Si le rayon rencontre un objet
  - Calcul du point d'impact $q_c$
  - Calcul de la normale à la surface $n_c$ en ce point
  - Définition de la contrainte de collision :

$$C(p) = (p - q_c) \cdot n_c$$

**Détection de collision**



# Amortissement pour les objets rigides

$$
\begin{array}{ll}
(1) & \mathbf{x}_{cm} = (\sum_i \mathbf{x}_i m_i)/(\sum_i m_i) \\
(2) & \mathbf{v}_{cm} = (\sum_i \mathbf{v}_i m_i)/(\sum_i m_i) \\
(3) & \mathbf{L} = \sum_i \mathbf{r}_i \times (m_i \mathbf{v}_i) \\
(4) & \mathbf{I} = \sum_i \tilde{\mathbf{r}}_i \tilde{\mathbf{r}}_i^T m_i \\
(5) & \omega = \mathbf{I}^{-1}\mathbf{L} \\
(6) & \textbf{forall} \text{ vertices } i \\
(7) & \quad \Delta\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{cm} + \omega \times \mathbf{r}_i - \mathbf{v}_i \\
(8) & \quad \mathbf{v}_i \leftarrow \mathbf{v}_i + k_{\text{damping}} \Delta\mathbf{v}_i \\
(9) & \textbf{endfor}
\end{array}
$$

**ri = $x_i$ - $x_{cm}$**

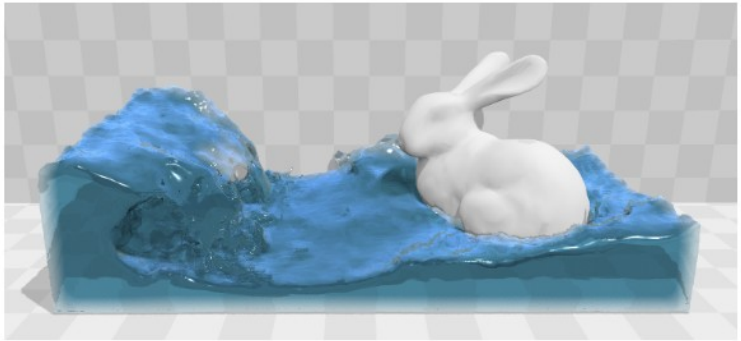
$k_{damping} \in$ **[0, 1]**

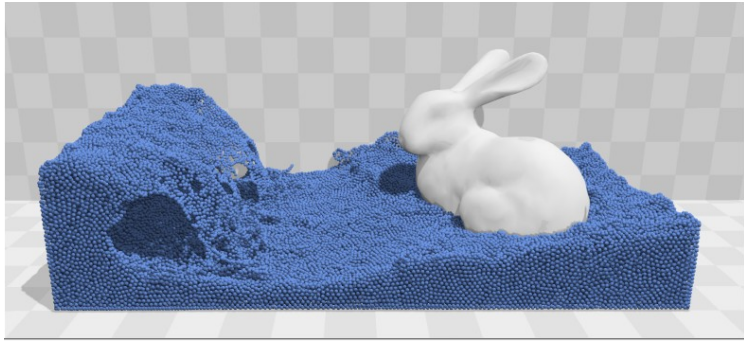
$$\tilde{\mathbf{r}}_i \mathbf{v} = \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}$$

# Méthode PBD pour simuler les fluides

**Position Based Fluid**

*Miles Macklin, Matthias Müller, 2013*





**Algorithm 1** Simulation Loop

```
for all particles i do
    apply forces v_i ⇐ v_i + Δt f_ext(x_i)
    predict position x*_i ⇐ x_i + Δt v_i
end for
for all particles i do
    find neighboring particles N_i(x*_i)
end for
while iter < solverIterations do
    for all particles i do
        calculate λ_i
    end for
    for all particles i do
        calculate Δp_i
        perform collision detection and response
    end for
    for all particles i do
        update position x*_i ⇐ x*_i + Δp_i
    end for
end while
for all particles i do
    update velocity v_i ⇐ (1/Δt) (x*_i − x_i)
    apply vorticity confinement and XSPH viscosity
    update position x_i ⇐ x*_i
end for
```

# Approche PBD pour simuler un fluide

**Particule/sommet** $i \in [1, \ldots, N]$

position : $x_i$

vitesse : $v_i$

masse : $m_i$

densité : $\rho_0$

**Contraintes** $j \in [1, \ldots, M]$

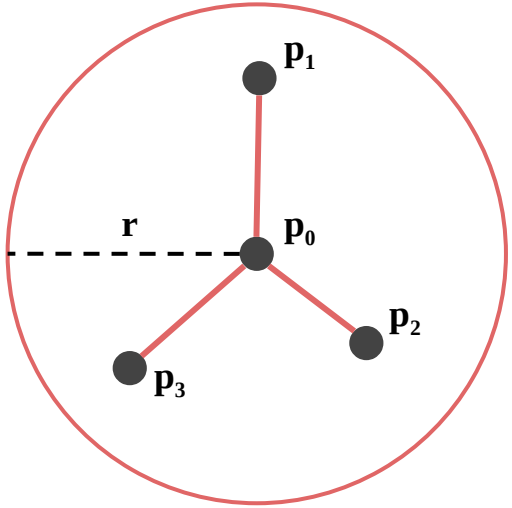
cardinalité : $n_i$

indices : $\{i_1, \ldots i_{n_j}\}, i_k \in [1, \ldots N]$

fonction : $C_j(\mathbf{x}_{i_1}, \ldots, \mathbf{x}_{i_{n_j}}) \rightarrow \mathbb{R}$

raideur : $k \in [0,1]$

condition : *égalité* $(C = 0)$ ou *inégalité* $(C \geq 0)$




$C(p_0, \{p_1, p_2, p_3\})$

# Boucle de simulation PBD pour simuler un fluide

**while**(True)

**forall** particles i **do** $v_i \leftarrow v_i + \Delta t\, w_i\, f_{ext}$

**forall** particles i **do** $p_i \leftarrow x_i + \Delta t\, v_i$

**forall** particles i **do** **findNeighbours**($p_i$)

**loop** solverIterations **times**

**forall** particles i **do**

**solveConstraints()**

**checkCollisions() & solveCollisions()**

**forall** particles i **do**

$p_i \leftarrow p_i + \Delta p_i$

**forall** particles i

$v_i \leftarrow (p_i - x_i) / \Delta t$

**applyVorcity() & applyViscosity()**

$x_i \leftarrow p_i$

**endfor**

Schéma d'intégration d'Euler symplectique appliqué aux vitesses et positions

**Particle Simulation using CUDA (2010)**

**Contraintes de densité**

**Contraintes de collision**

Applique les corrections

Mise à jour des vitesses avec l'intégration de Verlet

**Viscosité du fluide et tourbillon**

Mise à jour des positions

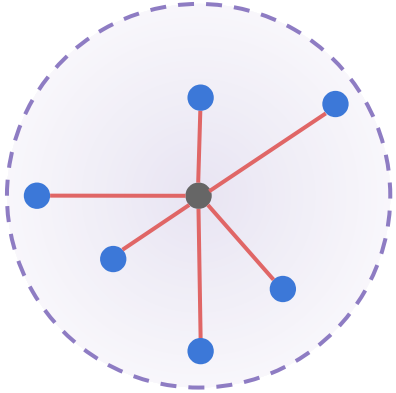
# Contraintes pour les fluides et sa correction associée

$$C(x) = \frac{\rho i}{\rho 0} - 1 \leq 0$$

$$\rho i = \sum j \; mj \; W(pi - pj, h)$$

$\rho_0$ : densité au repos

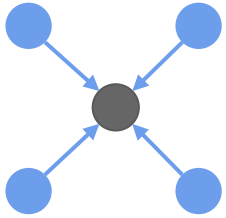
ρi : utilise méthode SPH pour l'estimer



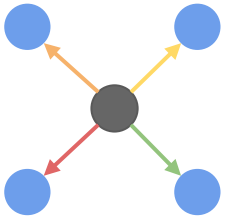
$W \in [0,1]$

Gradient de la contrainte :

$$\nabla_{\mathbf{p}_k} C_i = \frac{1}{\rho_0} \begin{cases} \sum_j \nabla_{\mathbf{p}_k} W(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j, h) & \text{if } k = i \\ -\nabla_{\mathbf{p}_k} W(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j, h) & \text{if } k = j \end{cases}$$



**k = i**



**k = j**

Multiplicateur de Lagrange : $\lambda_i = -\frac{C_i(\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n)}{\sum_k |\nabla_{\mathbf{p}_k} C_i|^2}$

Correction : $\Delta \mathbf{p}_i = \frac{1}{\rho_0} \sum_j (\lambda_i + \lambda_j) \nabla W(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j, h)$

# Quelques améliorations

## Instabilité en tension de surface

$$s_{corr} = -k\left(\frac{W(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j, h)}{W(\Delta\mathbf{q}, h)}\right)^n$$

$$\Delta\mathbf{p}_i = \frac{1}{\rho_0}\sum_j (\lambda_i + \lambda_j + s_{corr})\,\nabla W(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j, h)$$

Ajout d'une pression artificielle provoquant une tension superficielle

Traitement des particules solitaires pour éviter qu'elles n'explosent

## Confinement du tourbillon et viscosité

### Tourbillon

$$\omega_i = \nabla \times \mathbf{v} = \sum_j \mathbf{v}_{ij} \times \nabla_{\mathbf{p}_j} W(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j, h)$$

$$\mathbf{f}_i^{vorticity} = \varepsilon\,(\mathbf{N} \times \omega_i)$$

### Viscosité

$$\mathbf{v}_i^{new} = \mathbf{v}_i + c\sum_j \mathbf{v}_{ij} \cdot W(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j, h)$$

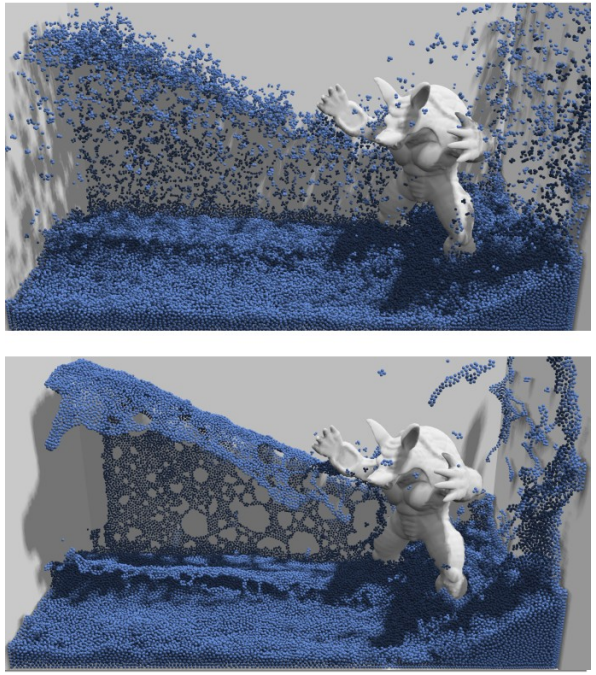
Ajout du mouvement du tourbillon

Augmente la cohérence du mouvement

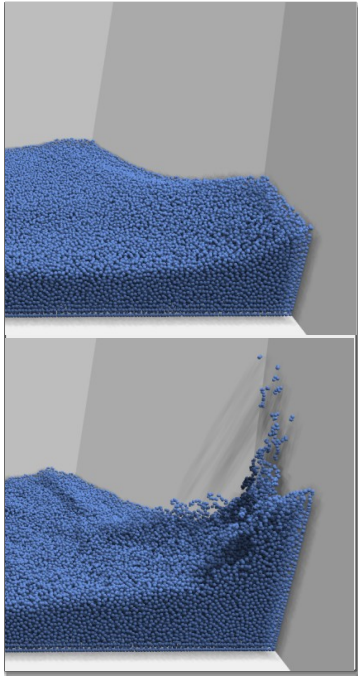
Plus… pour que cela soit joli

# Approche PBD pour simuler un fluide

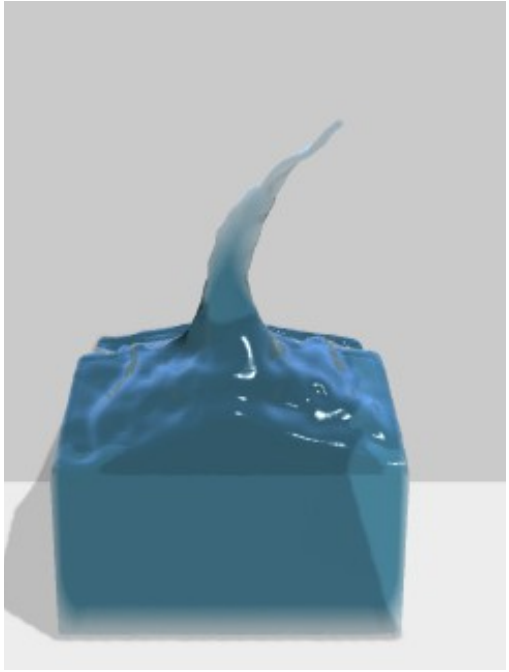
**Instabilité**



**Tourbillon**



**Rendu**



# En conclusion

- Nouvelle approche pour faire de la simulation d'objets 2D ou 3D
- Méthode adaptée aux objets déformables, aux objets rigides et aux fluides
- Méthode basée sur des contraintes
- Utilisation d'un solveur itératif pour résoudre les contraintes
- Dans la suite des papiers, de plus en plus proches de la physique

Avantages de l'approche :

- Plus de contrôle en modifiant directement les positions
- Plus de stabilité (à voir)
- Plus simple pour gérer les collisions
- Contraintes peuvent être résolues facilement en parallèle (sur GPU)

# Références bibliographiques

**Articles de recherche :**


- M. Muller, B. Heidelberger, M. Hennix, J. Ratcliff, Position Based Dynamics, VRIPhys 2006 (vidéo du papier de M. Muller)
- M. Macklin, M. Müller, Position Based Fluids, SIGGRAPH 2013
- et tous les suivants : https://matthias-research.github.io/pages/publications/publications.html
- Cours SIGGRAPH 2017 - A survey on Position Based Dynamics
- Chaîne YouTube de M. Müller : https://www.youtube.com/@matthimf


Une page web qui explique plein de choses (méthode PBD, mais beaucoup d'autres choses) :
https://carmencincotti.com/fr/2022-08-01/la-boucle-de-simulation-de-pbd

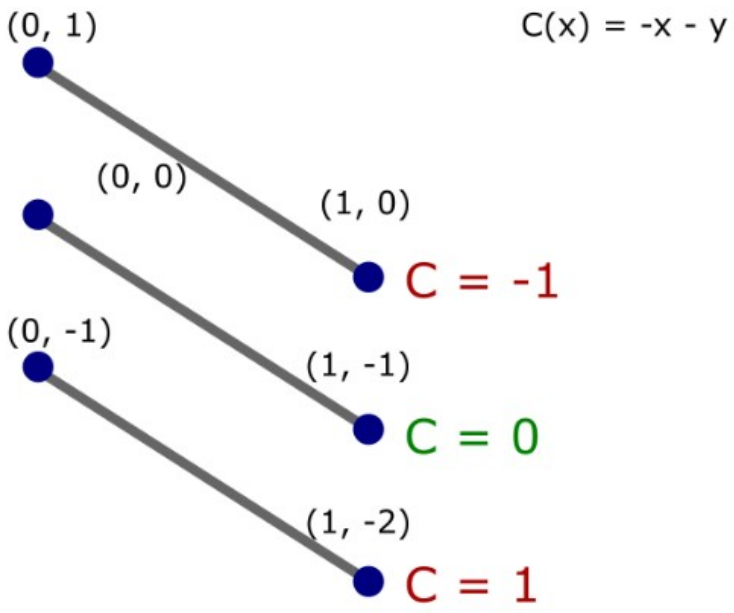
Cours effectués en partant initialement de présentations faites par Bastien Saillant (équipe Origami, LIRIS)

# Des choses en plus…

# Correction des positions - Méthode de Newton-Raphson

Soit la fonction contrainte $C(x) = -x - y \Rightarrow y = -x - C(x) \Rightarrow$ droite de pente -1

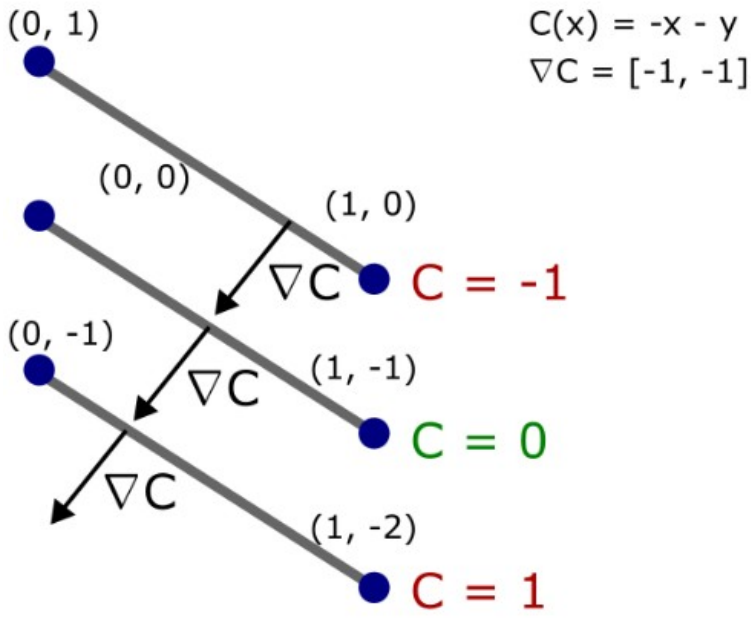
Nous souhaitons qu'un point arbitraire reste sur cette droite indépendamment des forces externes



# Correction des positions - Méthode de Newton-Raphson

Nous voulons minimiser $C(x) = 0$

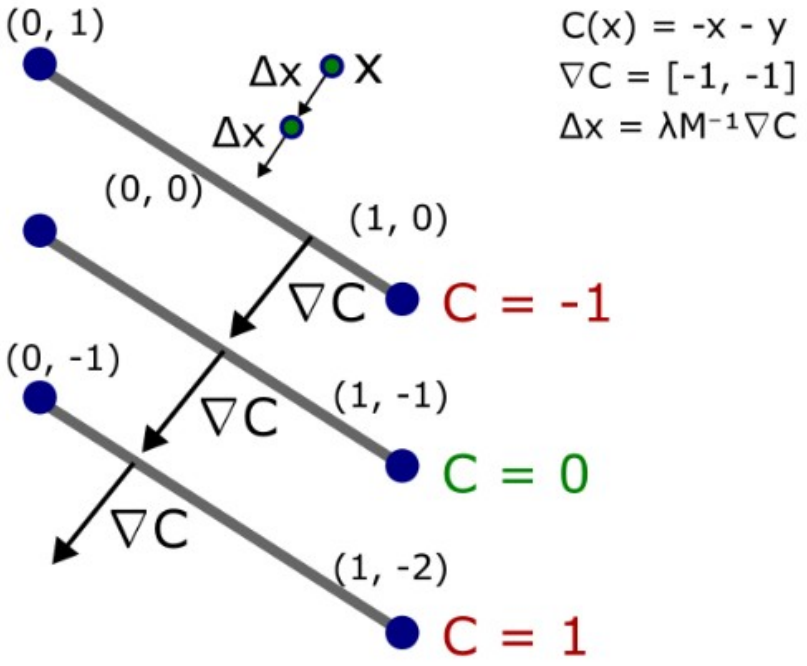
Pour ce faire, on voyage dans le sens du gradient de $C(\mathbf{x})$ : $\nabla C(\mathbf{x})$ :



# Correction des positions - Méthode de Newton-Raphson

Si on positionne un point x sur ce graphique et qu'on souhaite qu'il reste ensuite sur C(x)

Il va voyager dans la direction du gradient de C(x) pour revenir le plus rapidement possible sur la ligne



# Gradient d’une fonction

**Soit une fonction f à plusieurs variables : f(x,y,z)**

Gradient de f = vecteur des dérivées partielles de la fonction f :

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix}$$

**Interprétation du gradient :**

Vecteur gradient est la direction et le taux d’augmentation le plus rapide d’une fonction f

Autrement dit le gradient nous indique la direction pour maximiser la valeur de f à chaque entrée donnée

# Problème d'optimisation sous contraintes

**Objectif :** maximiser ou minimiser une fonction de plusieurs variables f(x, y, z, …)

Fonction contrainte de la forme g(x, y, z, …) = c

recherche du point où f(x,y,z,...) et g(x,y,z,...) = c sont tangents

Méthode : trouver les valeurs maximales des variables x, y, z, … en utilisant les gradients

Difficulté : magnitudes de $\nabla$f(x,y,z,..) et $\nabla$g(x,y,z,...) ne sont pas pareils

Correction de cette différence avec un scalaire **λ** appelé **multiplicateur de Lagrange** tel que :

$$\nabla f(x,y,z,..) = \boldsymbol{\lambda}\, \nabla g(x,y,z,...)$$