# M2 Pro Informatique
# UE - Fondement des mondes virtuels
## Animation par modèles physiques

Florence Zara

LIRIS - Lyon 1

http://liris.cnrs.fr/florence.zara

2007-2008

# Dynamique

- Dynamique Newtonienne
- Dynamique Lagrangienne

# Dynamique *versus* cinématique

## Cinématique

- Notions de position, vitesse, accélération
- Mouvement d'une particule le long d'une courbe
- Pas de force appliquée sur cette particule
- Trajectoire de la particule
  $\Rightarrow$ vitesse, accélération (par dérivation)

## Dynamique

- Mouvement d'une particule soumise à des forces extérieures
- Accélération de la particule
  $\Rightarrow$ vitesse, position (par intégration)

# Rappel

## Deuxième Loi de Newton

- $\mathbf{F} = m\,\mathbf{a} = m\,\dot{\mathbf{v}} = m\,\ddot{\mathbf{x}}$ avec :
  - $\mathbf{x}$, position de la masse au temps t
  - $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}}$, vitesse de la masse au temps t
  - $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{x}}$, accélération au temps t

Note : pour alléger l'écriture, le vecteur $\vec{u}$ pourra être noté $\mathbf{u}$

# Dynamique Newtonienne

- Particule de masse $m$ constante
- Utilisation de la loi de Newton : $\mathbf{F} = m\,\mathbf{a}$
- Si $\mathbf{F} = 0$,

$$\Longrightarrow \mathbf{a}(t) = 0$$
$$\Longrightarrow \mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 \text{ (constante)}$$

- Intégration au cours du temps :
  - Soit $\mathbf{x}_0$ la position initiale
  - $\mathbf{x}(t) = t\mathbf{v}_0 + \mathbf{x}_0$

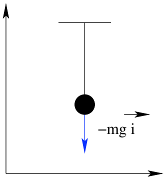
# Cas d'un pendule

## Application de la seconde Loi de Newton

- $\mathbf{F} = m\,\mathbf{a} = m\ddot{\mathbf{x}}$
- Force : poids de la masse : $-mg\vec{i}$

$$\Longrightarrow m\ddot{\mathbf{x}} = -mg\vec{i}$$
$$\Longrightarrow \ddot{\mathbf{x}} = -g\vec{i}$$
$$\Longrightarrow \text{masse tombe sur le sol : FAUX !}$$

- **F** doit représenter toutes les forces
  - Manque force qui contraint la masse à être attachée à la tige
  - Force dite de **contrainte**



# Equation du mouvement d'une particule

## Travail d'une force

- Travail de $\vec{F}$ appliquée à une masse de position $\vec{x}$, dans le déplacement élémentaire $\vec{dx}$ :
$$dW = \vec{F}.\vec{dx}$$

## Equation de d'Alembert

- $\vec{F} = m\vec{a}$
$\Rightarrow m\vec{a} = \vec{F}.d\vec{x}$
$\Rightarrow m\,\ddot{\mathbf{x}}.\,d\mathbf{x} = \mathbf{F}.\,d\mathbf{x}$

# Mouvement sur une courbe

## Hypothèses

- Masse **contrainte** de suivre la trajectoire d'une courbe
- Courbe définie par un paramètre $q$
- Position $\mathbf{x}(\mathrm{q})$, $d\mathbf{x}/dq$ tangent à la courbe
- Relation d'Alembert : $m\,\ddot{\mathbf{x}}.\frac{d\mathbf{x}}{dq} = \mathbf{F}.\,\frac{d\mathbf{x}}{dq}$

## Reformulation : équation Lagrangienne du mouvement

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{d\mathbf{x}}{dq}\frac{dq}{dt} = \frac{d\mathbf{x}}{dq}\dot{q}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial \dot{q}}\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}}\frac{d\mathbf{x}}{dq}\dot{q}$$

$$\Rightarrow \ldots$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial q} = \mathbf{F}.\frac{d\mathbf{x}}{dq} = F_q \text{ avec } E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

# Equations du mouvement : Newton *versus* Lagrange

## Equation du mouvement de Newton

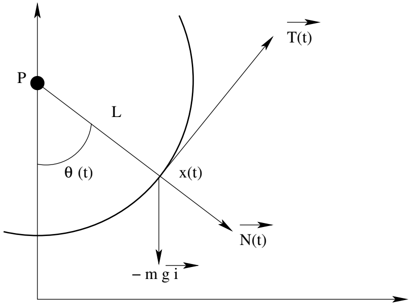
- $\mathbf{F} = m\,\mathbf{a}$ où le terme $\mathbf{F}$ :
  - est un vecteur
  - représente la somme de toutes les forces extérieures appliquées sur la masse
  - tient donc compte des forces de contraintes

## Equation du mouvement de Lagrange

- $\frac{d}{dt}(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}}) - \frac{\partial E_c}{\partial q} = \mathbf{F}.\frac{d\mathbf{x}}{dq} = F_q$ où le terme $F_q$ :
  - est une valeur scalaire
  - ne tient pas compte des forces de contraintes

# Mouvement d'un pendule - Hypothèses

- Masse localisée à la position $x(t)$
- Fixée au point $P$ à une distance $L$
- Angle $\theta(t)$ formé avec la verticale
- Trajectoire = courbe, de tangente $\vec{T}(t)$, de normale $\vec{N}(t)$



# Mouvement d'un pendule - Position et énergie cinétique

## Position

- Position de la masse : $\vec{x}(\theta) = \vec{P} + L\vec{N}(\theta)$
- Dérivées par rapport à $\theta$ et au temps :
  $\Rightarrow \frac{d\mathbf{x}}{d\theta} = L\frac{d\mathbf{N}}{d\theta} = L\mathbf{T}$ et $\Rightarrow \dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{d\mathbf{x}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = L\dot{\theta}\mathbf{T}$

## Energie cinétique

- Energie cinétique : $E_c = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2$
- Dérivées partielles par rapport à $\theta$ et $\dot{\theta}$ :
  $\frac{\partial E_c}{\partial \theta} = 0$ et $\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}} = mL^2\dot{\theta}$

# Mouvement d'un pendule - Formulation de Lagrange

Mouvement du pendule est contraint par l'angle $\theta$

## Equation du mouvement de Lagrange

1. $F_\theta = \frac{d}{dt}(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}}) - \frac{\partial E_c}{\partial \theta} = \frac{d}{dt}(mL^2\dot{\theta}) - 0 = mL^2\ddot{\theta}$
2. $F_\theta = \mathbf{F}.\frac{d\mathbf{x}}{d\theta} = (-mg\vec{j}).(L\mathbf{T}) = -mgL\, sin(\theta)$
3. $\frac{d}{dt}(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}}) - \frac{\partial E_c}{\partial \theta} = \mathbf{F}.\frac{d\mathbf{x}}{d\theta}$
   $\Rightarrow mL^2\ddot{\theta} = -mgL\, sin(\theta)$
   $\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{L}\, sin(\theta) = 0$

## Rappel

- Produit scalaire : $\vec{V1}.\vec{V2} = V1.V2\, cos(\vec{V1}, \vec{V2})$
- $cos(\theta + \frac{\pi}{2}) = -sin(\theta)$

# Mouvement d'un pendule - Petites oscillations

- Relation : $\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\, sin(\theta) = 0$
- Pour petites oscillations, $sin(\theta) \approx \theta$
  $\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{L}\, \theta = 0$
  $\Rightarrow \theta = \theta_0\, cos(\sqrt{\frac{g}{L}}\; t)$ de période $2\pi\sqrt{\frac{g}{L}}$

# Mouvement sur une surface

## Hypothèses

- Masse liée à une surface paramétrique $x(q_1, q_2)$, $q_1, q_2$ indépendants
- Déplacements infinitésimaux tangents à la surface

## Equation du mouvement

- Equation d'Alembert : $m\ddot{\mathbf{x}}.\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_i} = \mathbf{F}.\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_i}, i = 1, 2$
- Equation de Lagrange : $\frac{d}{dt}(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_i}) - \frac{E_c}{\partial q_i} = F_{q_i}, i = 1, 2$

# Mouvement d'un système de particules

## Hypothèses

- Système de $p$ particules
- Particule $i$ de masse $m_i$, position $\mathbf{x}_i, i = 1, ..., p$
- Déplacements infinitésimaux $d_{\mathbf{x}_i}$, forces $\mathbf{F}_i$

## Equation du mouvement pour une particule

- Equation d'Alembert pour particule $i$ :
  $\frac{d}{dt}(\frac{\partial E_{c_i}}{\partial \dot{q}_j}) - \frac{E_{c_i}}{\partial q_j} = \mathbf{F}_i . \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j}$
- Energie cinétique d'une particule :
  $E_{c_i} = \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}^2$

# Mouvement d'un système de particules

## Equation du mouvement du système

- Energie cinétique du système :

$$E_c = \sum_{i=1}^{i=p} E_{c_i} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=p} m_i \mathbf{v}^2$$

- Equation d'Alembert :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{E_c}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{i=p} \mathbf{F}_i . \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j}, j \geqslant 1$$