

Traitement du signal et communications numériques

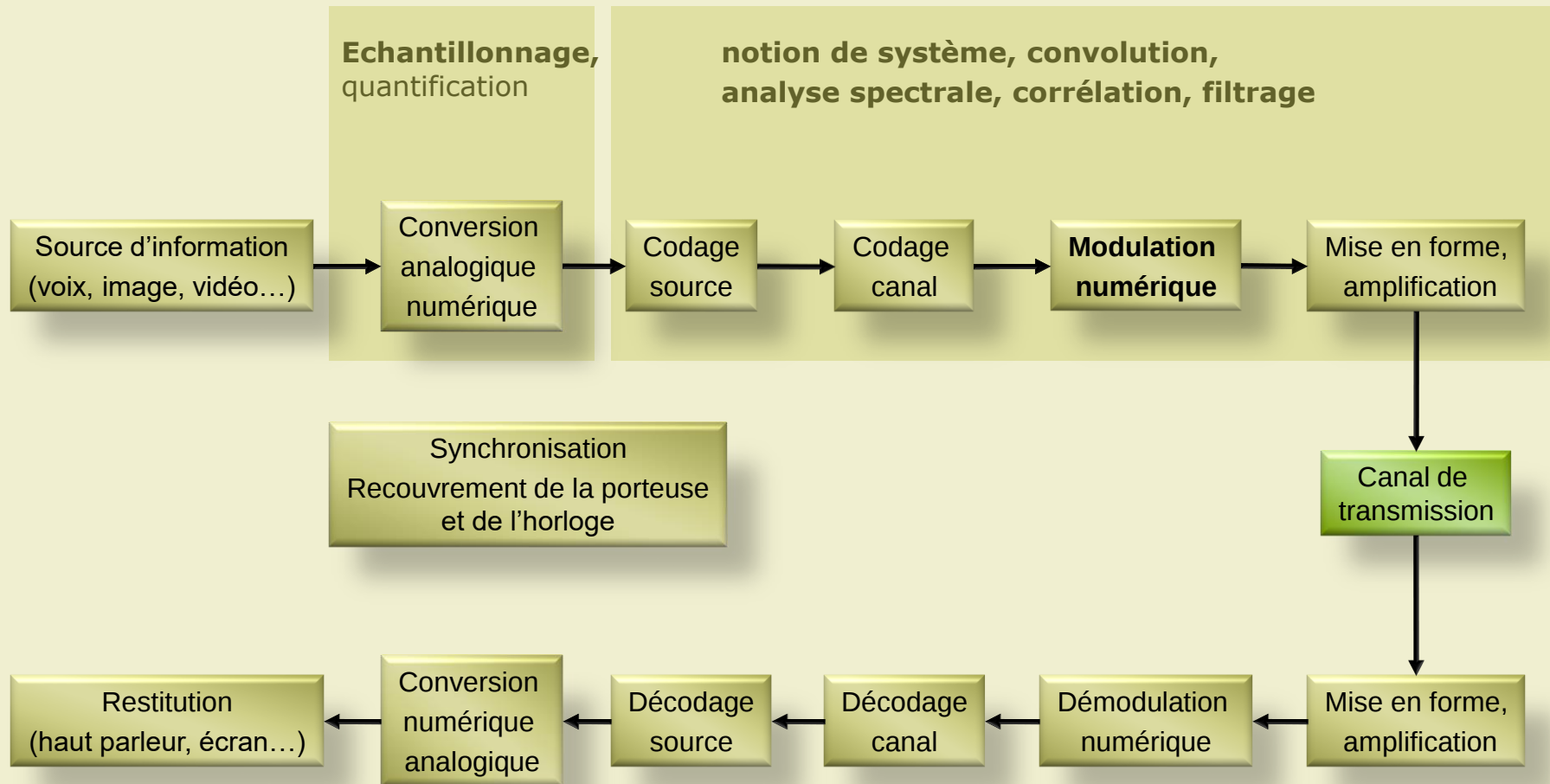


F. Denis – F. Dupont

LIRIS UMR CNRS 5205
Université Claude Bernard Lyon1

Cadre du cours

■ Chaîne de transmission numérique



Cadre du cours

- 2 intervenants : Florence Denis, Florent Dupont

- **Généralités**

- Définition des notions fondamentales et du vocabulaire

- **Transformation de Fourier**

- Bases pour l'analyse spectrale des signaux

- **Corrélation**

- Outils pour comparer des signaux et en extraire des informations

- **Echantillonnage**

- Conditions pour l'obtention de signaux numériques

- **Transformée de Fourier discrète**

- **Modulation**

21h de cours/TD
+
9h de TP
sous Matlab

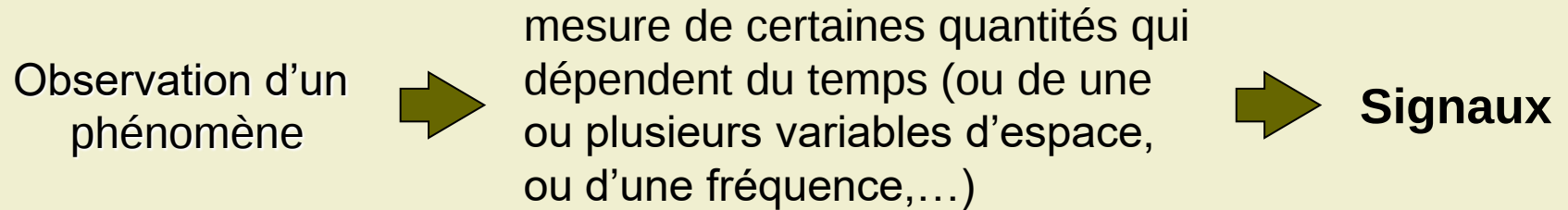
Traitement du signal



Introduction

- Vocabulaire et notions de base
- Caractéristiques et classifications des signaux
- Signaux de test
- Systèmes : linéarité et invariance
- Réponse impulsionnelle et convolution
- Réponse fréquentielle

Généralités



signal : correspond à l'évolution en fonction du temps (ou d'une ou plusieurs autres variables) d'une grandeur physique relative à un phénomène, et traduisant le comportement d'un système ou d'un milieu de propagation.

Signal = support d'information

Modélisation sous la forme d'une fonction $g(t, x, f \dots)$

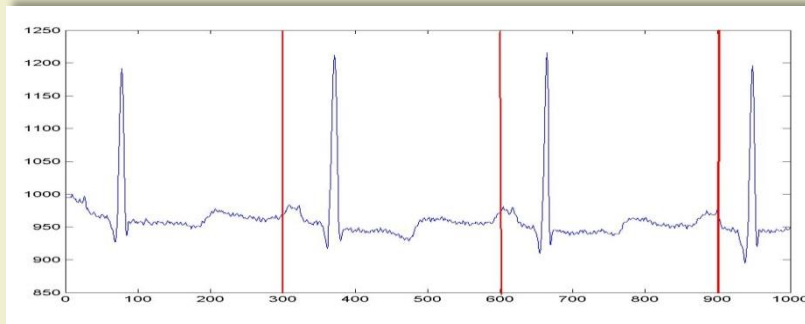
Exemples

■ Signaux physiologiques

- EEG (électroencéphalographie) → diagnostic des troubles du sommeil, épilepsie, ...
- ECG (électrocardiographie)
- EMG (électromyographie),...
- IRM

■ Signaux acoustiques

- Surveillance des machines tournantes
- Études de milieux de propagation
- Acoustique architecturale
- Analyse et synthèse de la parole
- Musique : analyse, séparation de sources, transcription automatique de la musique, simulation d'effets sonores, restauration d'enregistrements anciens,...
- Sonar



■ Télécommunications

- Signaux Hertiens
- Signaux optiques
- ...

■ Signaux sismiques

- Prévisions des risques sismiques

■ Signaux radar

■ Analyse de données, ...



Applications

Présentes dans la plupart des secteurs d'activité et des objets de notre quotidien...



8

■ Télécommunications

- ❑ Téléphonie : annulation d'écho...
- ❑ Traitement d'antennes
- ❑ Transmission : étalement de spectre, multiplexage fréquentiel...
- ❑ Compression et codage...
- ❑ Séparation de sources

Traitement du signal

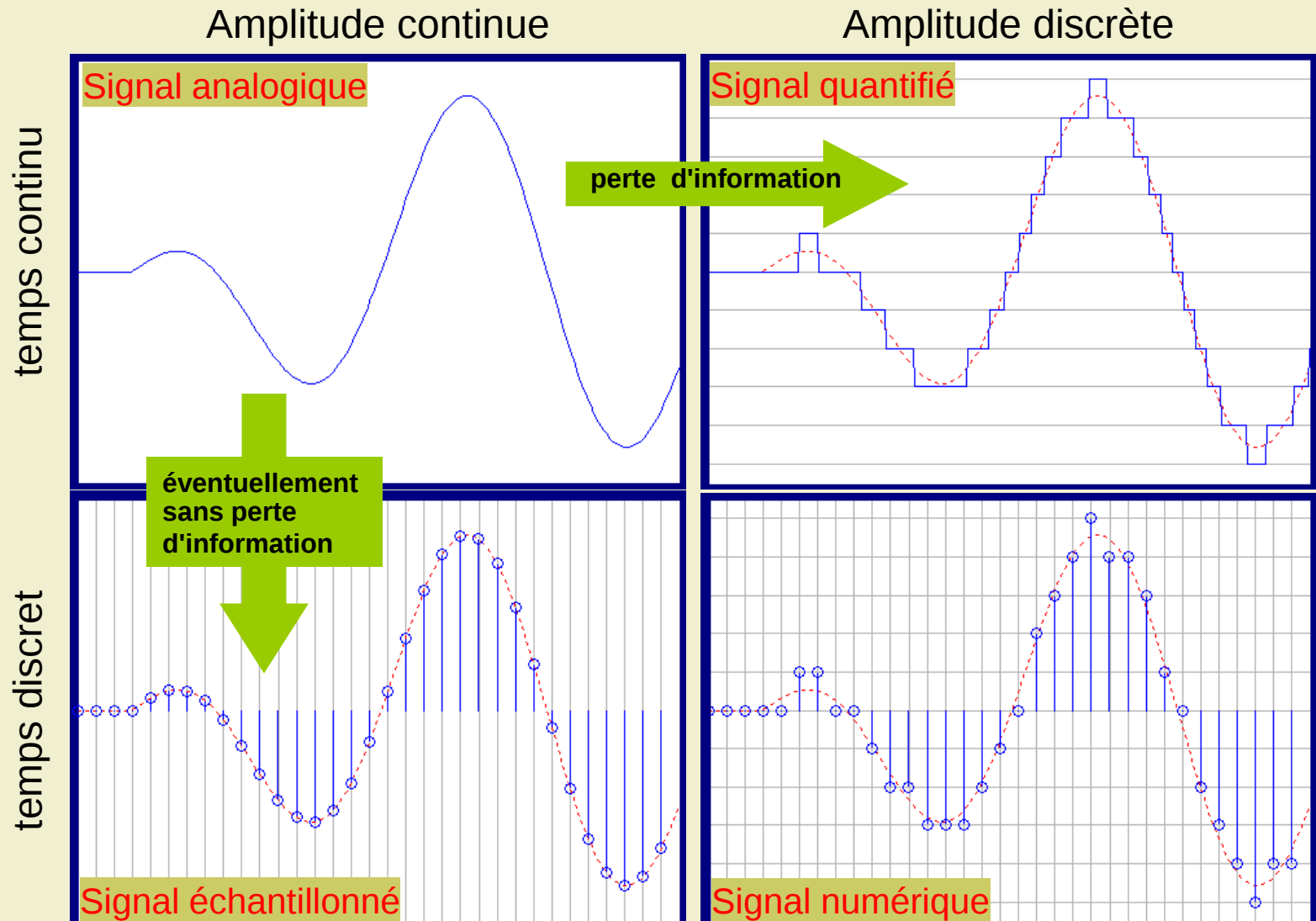
■ Objectifs

- Analyser le signal et en extraire l'information utile :
 - corrélation, détection, estimation, analyse spectrale...
- Modifier le signal
 - filtrage, égalisation...
- Synthétiser/élaborer des signaux permettant d'étudier le comportement des systèmes physiques ou servant de support pour la transmission ou le stockage d'information:
 - modulation, échantillonnage...

Traitement du signal

- description (modélisation) et analyse des signaux et systèmes
- Utilisation d'opérateurs linéaires.
- étude temporelle (ou selon les paramètres de l'espace physique)
- étude fréquentielle : transformée de Fourier (et transformée de Laplace) qui diagonalisent les opérateurs pour les signaux à temps continu, transformée de Fourier discrète et transformée en z pour les signaux discrets

Types de signaux



■ Représentation

- Signaux à temps continu : modélisables par des fonctions continues par intervalle ou par des distributions
→ fonctions $x(t)$ à valeurs réelles ou complexes
- Signaux à temps discret : suites discrètes
→ ensembles de valeurs $x_0, x_1, \dots, x_n$ aux temps $t_0, t_1, \dots, t_n$
- Signaux numériques :
→ ensembles de valeurs $x_0, x_1, \dots, x_n$ appartenant à un ensemble fini dénombrable de valeurs distinctes
- Fonction au sens strict : signal déterministe
- Fonction aléatoire : signal aléatoire ou stochastique

Pour commencer : quelques signaux élémentaires

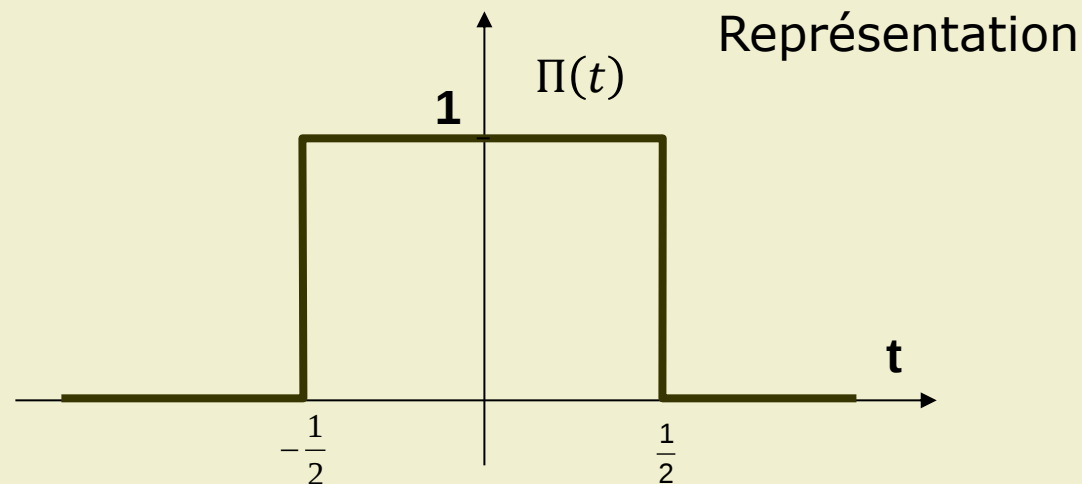
→ utiles pour modéliser des phénomènes physiques

■ signal rectangulaire unité centré (ou créneau, ou porte)

$$\Pi(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si } |t| > \frac{1}{2} \end{cases} = 1_{[-1/2, 1/2]} \text{ (fonction indicatrice)}$$

Remarque

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Pi(t) dt = 1$$



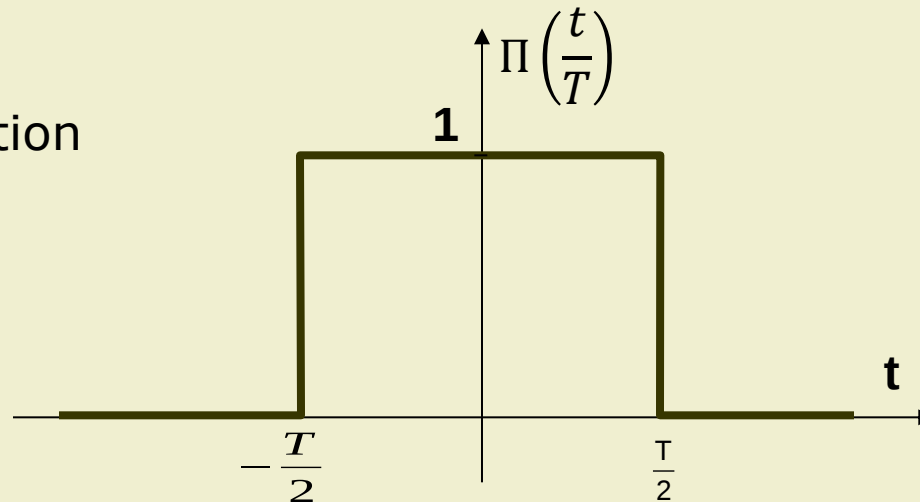
■ Porte de largeur T

$$\Pi\left(\frac{t}{T}\right) = 1_{[-T/2, T/2]}$$

Remarque

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Pi\left(\frac{t}{T}\right) dt = T$$

Représentation



■ Impulsion de Dirac

→ Modélise une masse ponctuelle

Distribution dont le support est réduit au point $t = 0$ et d'intégrale unité. Intuitivement, limite de 'bosses' contactées indéfiniment :

Soit $f(t)$ continue, à support sur $[-1,1]$, de masse unité:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1$$

(par exemple : $f(t) = \frac{1}{2} \Pi(\frac{t}{2})$)

$f_n(t) = n f(nt)$ a pour support $[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} n f(nt) dt$$

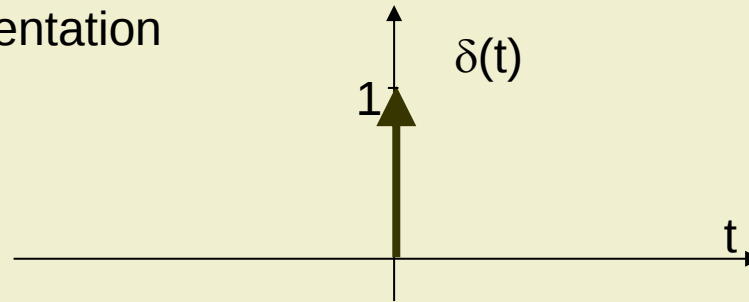
$$\text{Soit } \begin{cases} \theta = nt \\ d\theta = n dt \end{cases} \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\theta) d\theta = 1$$

L'impulsion de Dirac se définit par :

$$\delta(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t)$$

La théorie des distributions montre que $\delta(t)$ se manipule comme une fonction.

Représentation



■ Propriétés

$$f(t) \cdot \delta(t) = f(0) \cdot \delta(t)$$

$$f(t) \cdot \delta(t - t_0) = f(t_0) \cdot \delta(t - t_0) \quad \text{localisation}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \delta(t) dt = f(0)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \delta(t - t_0) dt = f(t_0)$$

■ Echelon unité (échelon de Heaviside)

→ Modélise l'établissement instantané d'un régime constant

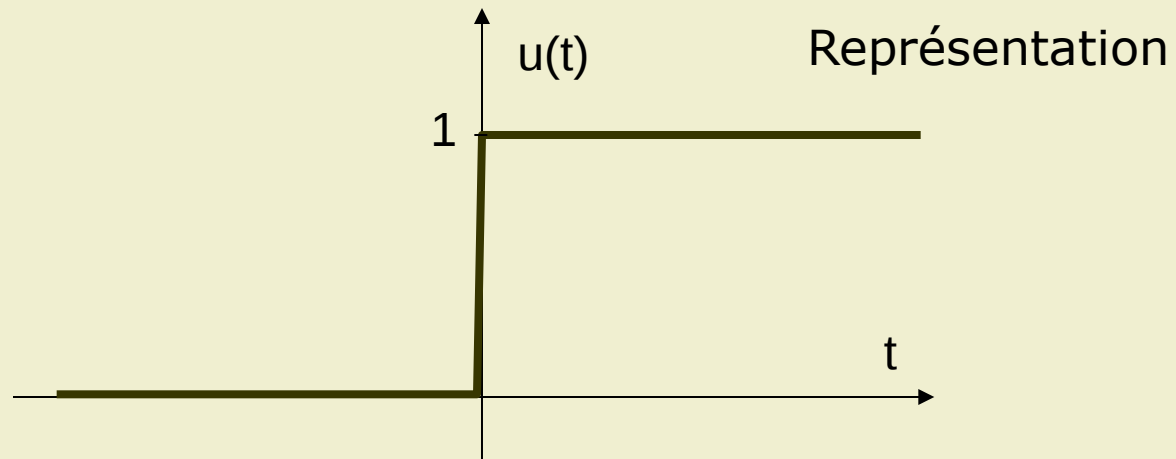
$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

$u(t)$ est la fonction indicatrice de $\mathbb{R}^+$

$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\theta) d\theta$$

et

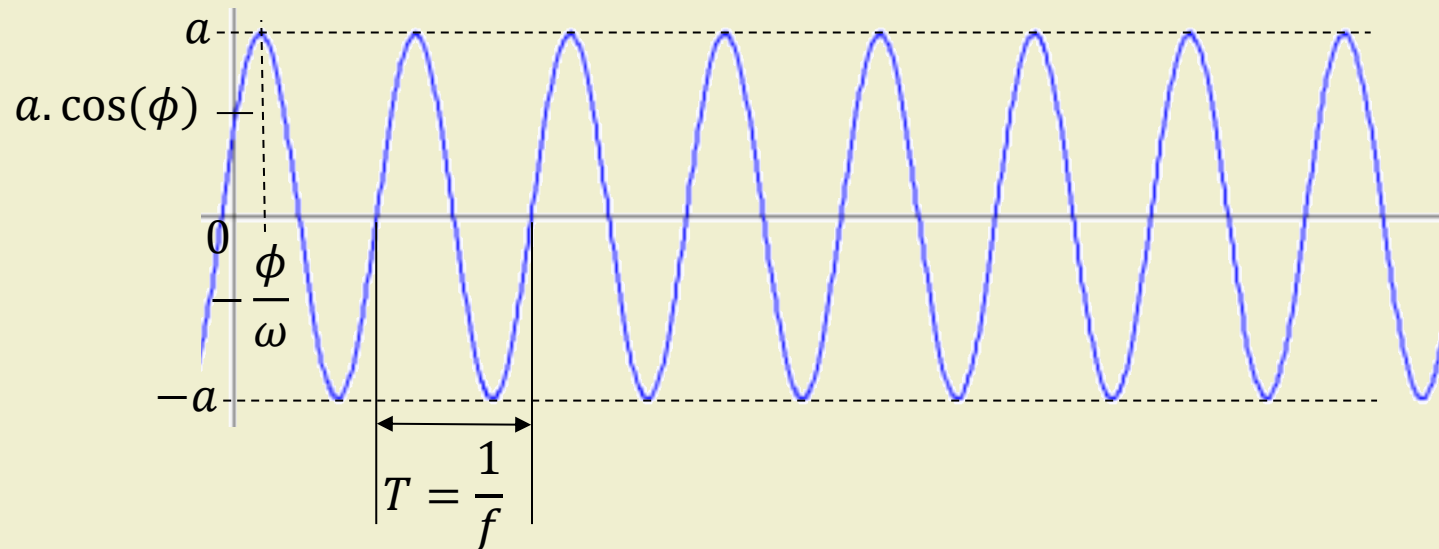
$$u'(t) = \delta(t)$$



■ signal sinusoïdal

$$x(t) = a \cdot \cos(\omega t + \phi)$$

- $a \in \mathbb{R}$: amplitude du signal
- $\omega \in \mathbb{R}$: pulsation
- $\omega = 2\pi f$ avec f : fréquence
- $T = \frac{1}{f}$ période
- $\phi \in [0, 2\pi]$: phase initiale



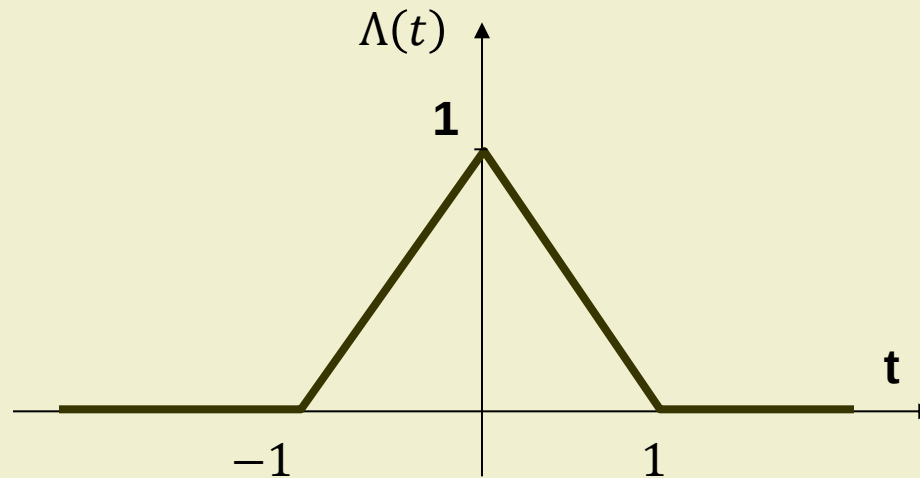
■ Signal triangulaire normé centré

$$\Lambda(t) = \begin{cases} t + 1 & \text{si } -1 \leq t \leq 0 \\ 1 - t & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{si } |t| > 1 \end{cases}$$

Remarque

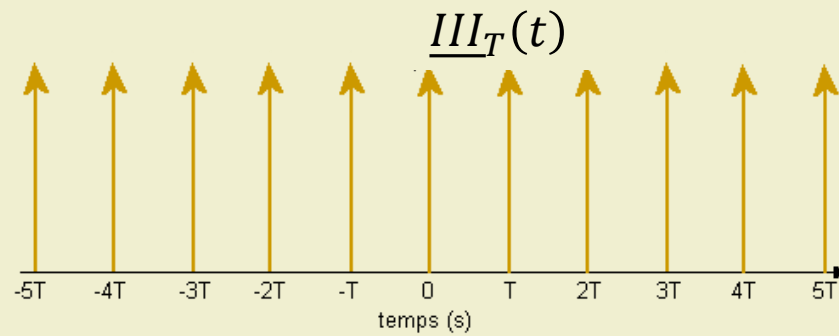
$$\int_{-\infty}^{\infty} \Lambda(t) dt = 1$$

Représentation



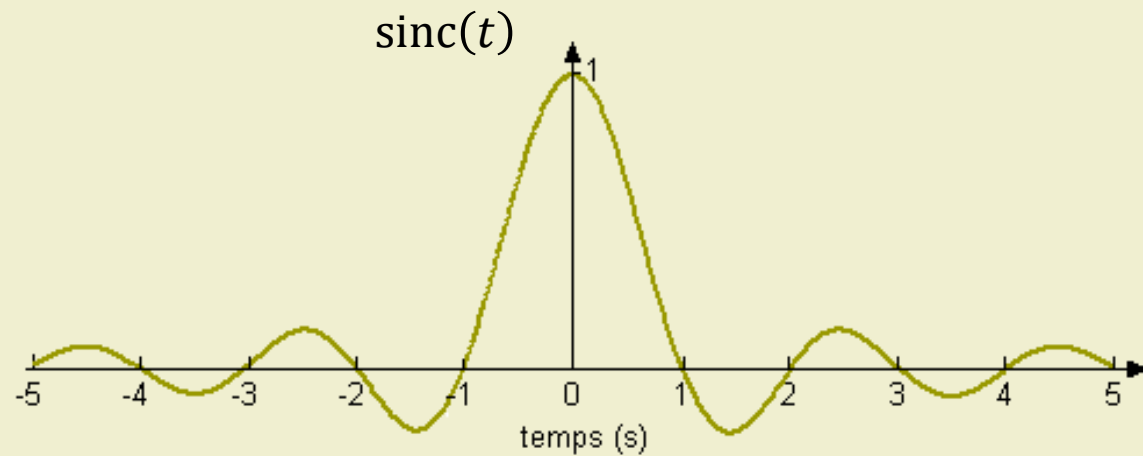
■ Peigne de Dirac

$$\underline{III}_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$$



■ Sinus cardinal

$$\text{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$$



Energie et puissance d'un signal

□ Hypothèse

signal complexe : $x(t) = a(t) + j b(t)$ $\begin{cases} a(t): \text{partie réelle} \\ b(t): \text{partie imaginaire} \\ j^2 = -1 \end{cases}$

$x^*(t) = a(t) - j b(t)$ *signal conjugué*

■ Puissance

▪ *puissance instantanée :* $p_x(t) = x(t).x^*(t) = a^2(t) + b^2(t)$

▪ *puissance moyenne
sur une durée T :*

$$P_{x,T} = \frac{1}{T} \int_T x(t).x^*(t)dt$$

▪ *puissance moyenne :*

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} P_{x,T}$$

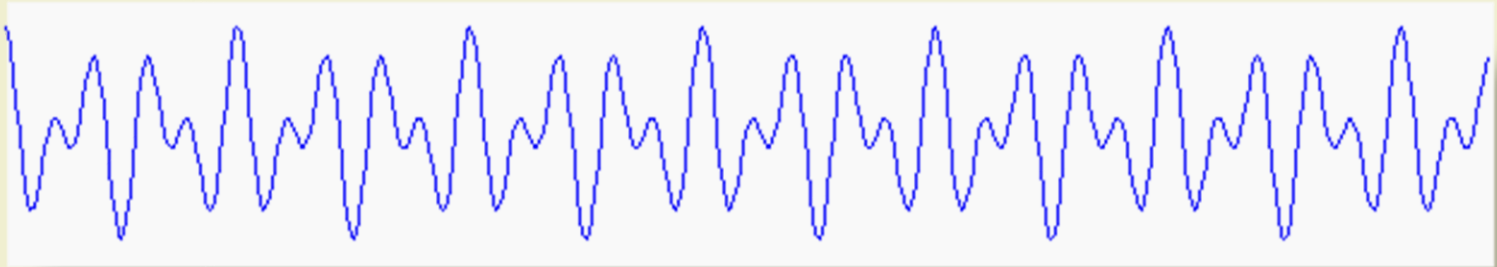
■ Energie

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t).x^*(t)dt$$

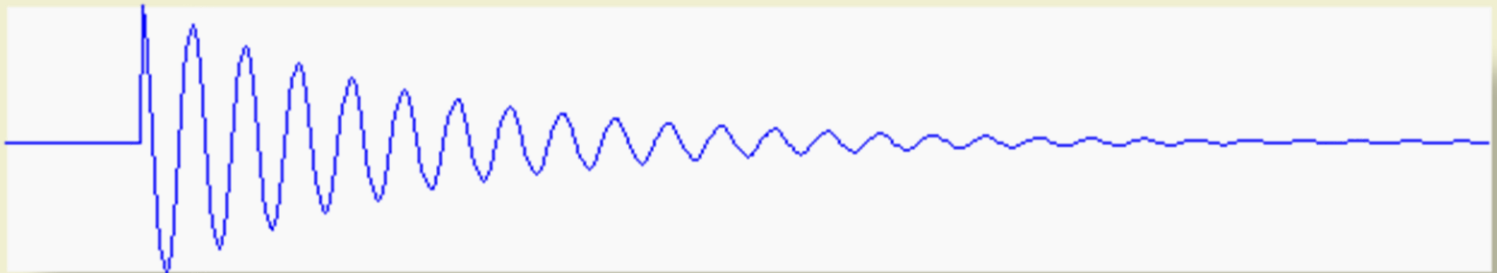
→ 2 classes de signaux

- signaux d'énergie finie (signaux transitoires)
 - puissance moyenne nulle
- signaux de puissance finie non nulle (signaux permanents)
 - énergie infinie
 - signaux périodiques, quasi périodiques, aléatoires permanents...
- signaux de puissance infinie (amplitude infinie)
 - signaux non physiques...

■ Exemples

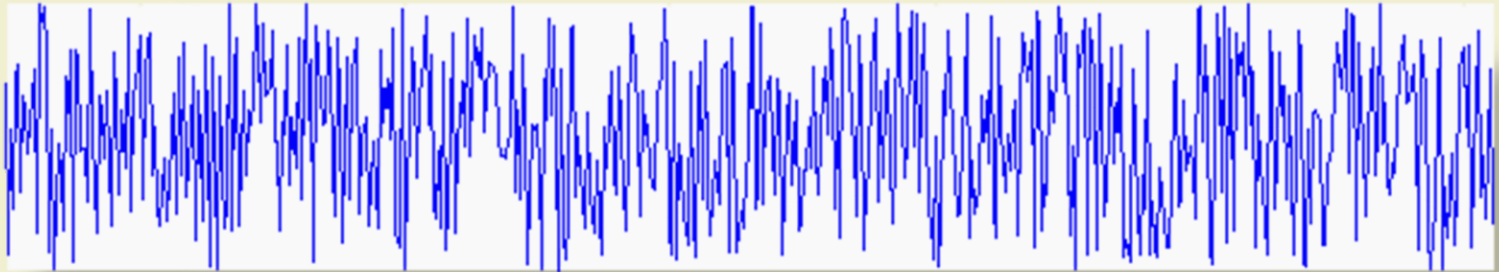


→ Puissance finie



→ Energie finie

■ Exemples



→ Puissance finie



→ Puissance infinie

Energie et puissance d'interaction

■ Puissance d'interaction

- *Puissance d'interaction instantanée :* $p_{xy}(t) = x(t).y^*(t)$
- *puissance moyenne d'interaction sur une durée T :* $P_{xy,T} = \frac{1}{T} \int_T x(t).y^*(t)dt$
- *puissance moyenne d'interaction :* $P_{xy} = \lim_{T \rightarrow \infty} P_{xy,T}$

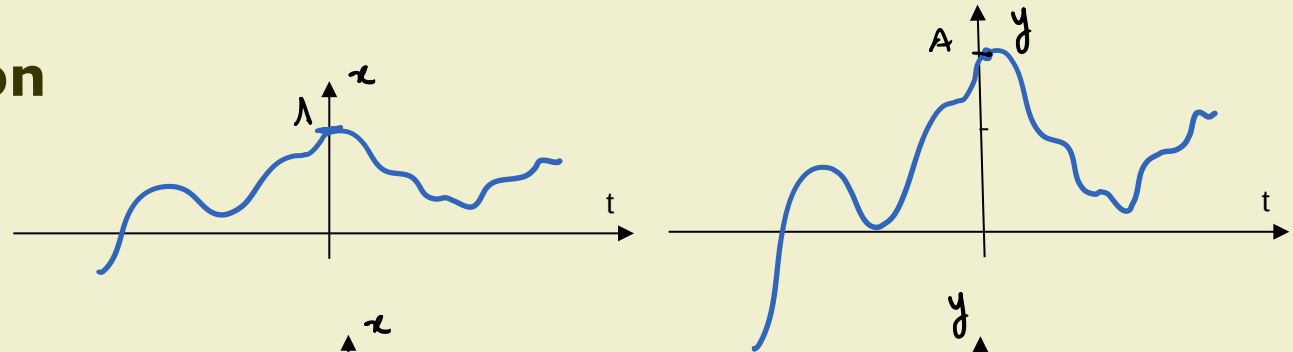
■ Energie d'interaction

$$E_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t).y^*(t)dt$$

Opérations de base sur les signaux

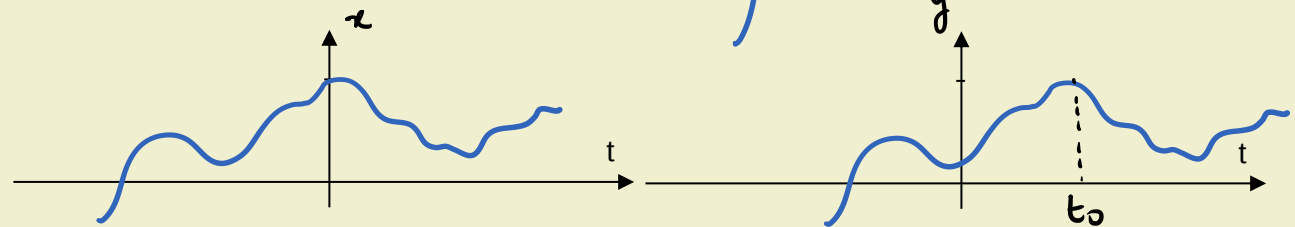
■ Amplification

$$y(t) = Ax(t)$$



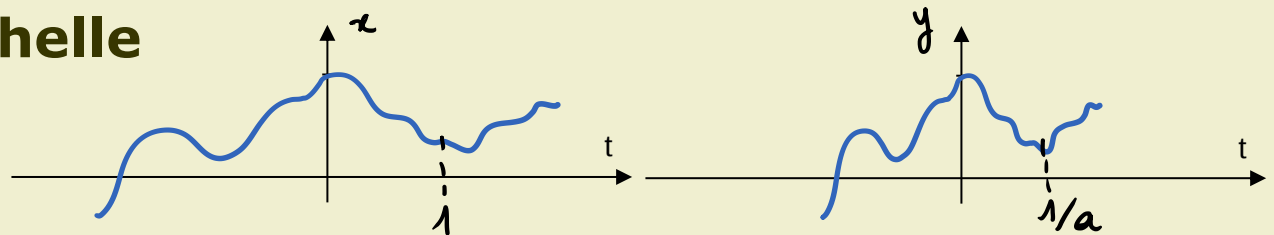
■ Translation

$$y(t) = x(t - t_0)$$



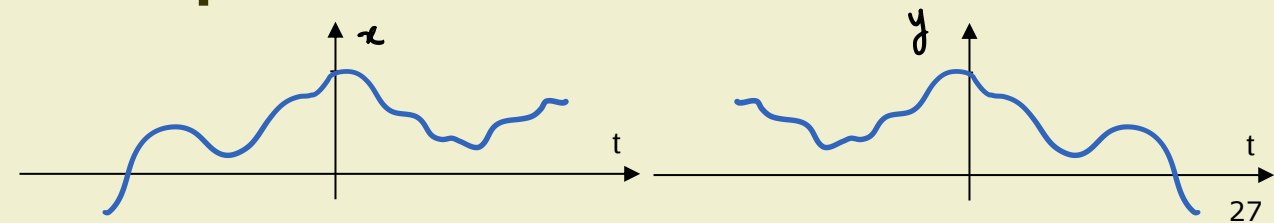
■ Facteur d'échelle

$$y(t) = x(at)$$



■ Retournement temporel

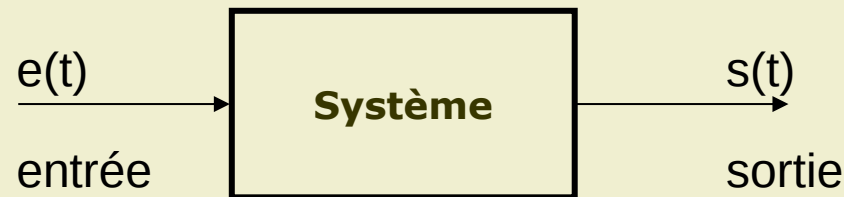
$$y(t) = x(-t)$$



Systèmes

■ **Système**

Toute entité, ou appareil qui effectue une transformation sur un signal



- Systèmes analogiques : signaux d'entrée et de sortie à temps continu
- Systèmes discrets: signaux d'entrée et de sortie à temps discret
- Systèmes hybrides transforment un signal à temps continu discret en un signal à temps discret ou inversement (convertisseurs : échantillonneur, bloqueur...)

Notion de système

■ Propriétés

Un système à temps continu est un opérateur S qui associe à un signal d'entrée $e(t)$ un signal de sortie $s(t)$

$$S: e \rightarrow s \triangleq S(e)$$

■ Système instantané

Un système est dit instantané si sa réponse à un instant donné ne dépend que de la valeur de l'entrée au même instant

$$s(t) = S[e(t)]$$

Exemple : circuit résistif, amplificateur idéal...

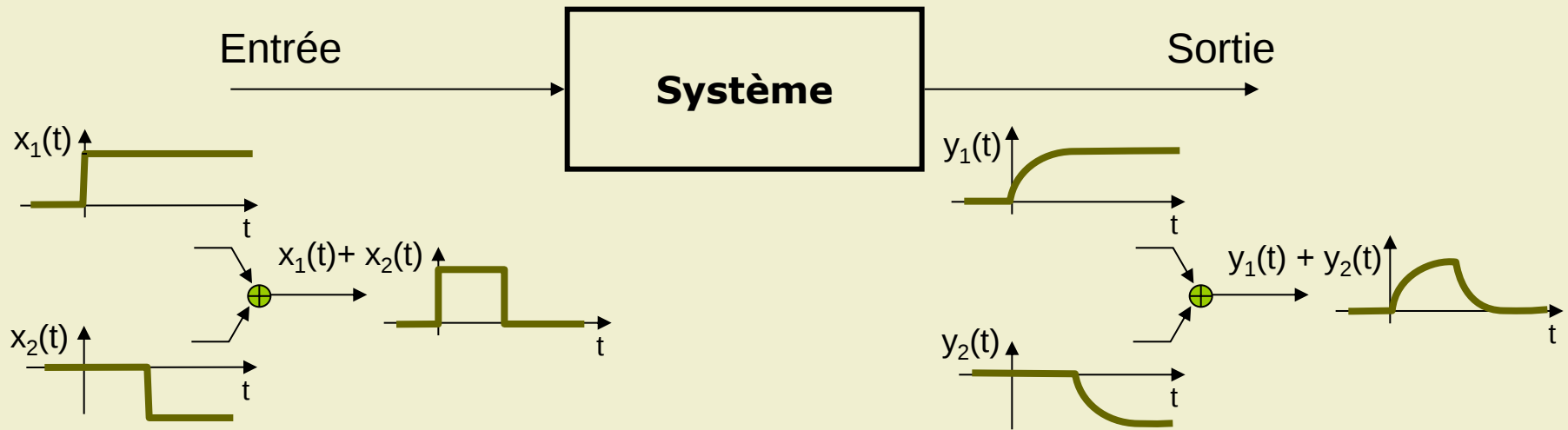
Sinon, on parle de système à mémoire ou à temps différé

Exemple : circuits incluant des condensateurs ou des inductances

Propriétés

■ Linéarité

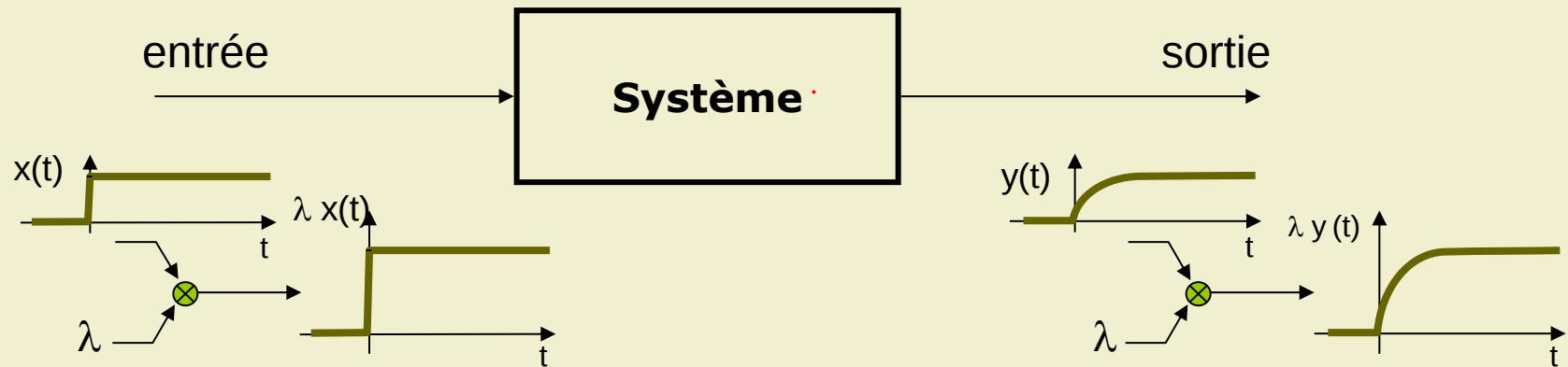
$$S[\lambda e_1 + \mu e_2] = \lambda S[e_1] + \mu S[e_2]$$



■ additivité

$$\forall x_1(t), \forall x_2(t), \quad S[x_1(t) + x_2(t)] = S[x_1(t)] + S[x_2(t)]$$

■ Linéarité



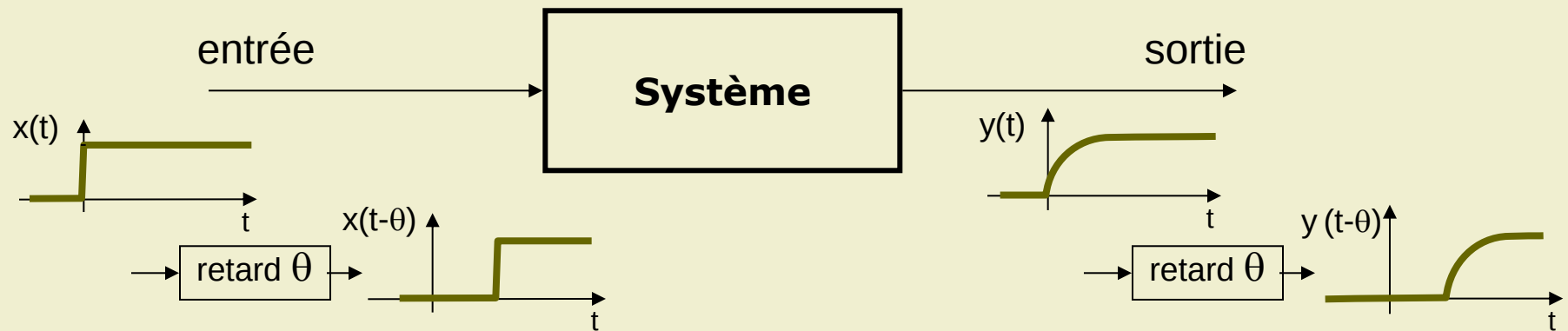
■ homogénéité

$$\forall x_1(t), \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad S[\lambda x_1(t)] = \lambda S[x_1(t)]$$

La linéarité permet de ramener les systèmes à plusieurs entrées et sorties à des systèmes à une entrée et une sortie

Pour les systèmes non linéaires, on fait souvent une hypothèse de linéarité dans certaines limites de fonctionnement

■ Invariance ou stationnarité



$$\forall x(t), \forall \theta \in \mathbb{R}, \quad y(t) = S[x(t)] \Rightarrow S[x(t - \theta)] = y(t - \theta)$$

- Si l'entrée est retardée de θ , alors la sortie est également retardée de θ
- Le comportement du système reste identique dans le temps

■ causalité

Soit $S[e]=s$

Le système S est causal si sa sortie $s(t)$ ne dépend que des valeurs $e(\theta)$ de l'entrée antérieures à t (telles que $\theta \in]-\infty, t]$)

La réponse à l'instant t ne dépend pas des valeurs futures de l'entrée

→ système physique ou non-anticipateur

Si le système est linéaire et invariant, il existe une relation intégrro-différentielle linéaire à coefficients constants liant $e(t)$ et $s(t)$.

■ Exemple

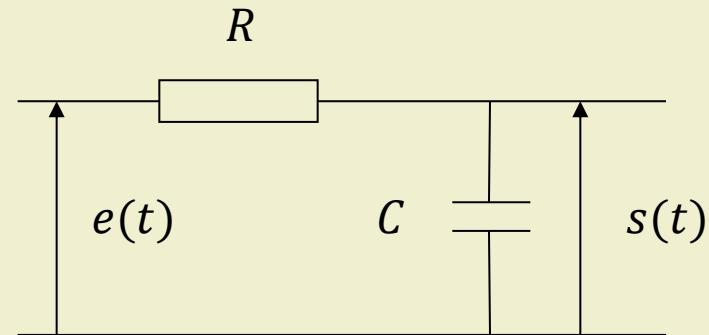
■ Cellule RC

$$e(t) = R \cdot i(t) + s(t)$$

$$i(t) = C \frac{ds(t)}{dt}$$

$$e(t) = RC \frac{ds(t)}{dt} + s(t)$$

→ équation différentielle linéaire du 1^{er} ordre



Notion de réponse impulsionnelle

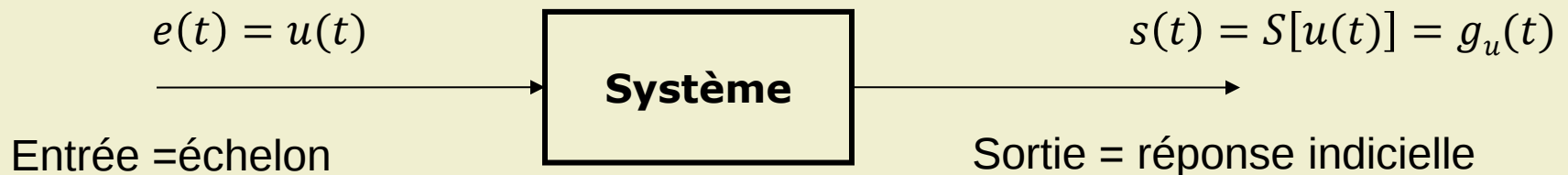
■ réponse impulsionnelle

→ Sortie du système lorsque l'entrée est une impulsion de Dirac



■ réponse indicielle

→ Sortie du système lorsque l'entrée est un échelon unité



Convolution

■ Sortie du système pour une entrée quelconque

Hypothèses :

- Le système est linéaire et invariant
- On connaît sa réponse impulsionnelle $h(t)$

Entrée $e(t)$	→	Sortie $s(t)$	
$e(t) = \delta(t)$	→	$s(t) = h(t)$	
$e(t) = \delta(t - \theta)$	→	$s(t) = h(t - \theta)$	invariance
$e(t) = x(\theta) \cdot \delta(t - \theta)$	→	$s(t) = x(\theta) \cdot h(t - \theta)$	homogénéité
$e(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\theta) \cdot \delta(t - \theta) d\theta$	→	$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\theta) \cdot h(t - \theta) d\theta$	additivité
			
$e(t) = x(t)$	→	$s(t) = x(t) \star h(t)$	produit de convolution

Produit de convolution

$$x(t) \star h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\theta) \cdot h(t - \theta) d\theta$$

→ Un système linéaire invariant est complètement déterminé par sa réponse impulsionnelle

de même que :

Un système linéaire invariant est complètement déterminé par sa réponse indicielle

■ Propriétés

- $f(t) \star g(t) = g(t) \star f(t)$
- $f(t) \star \delta(t) = f(t)$
- $f(t) \star \delta(t - t_0) = f(t - t_0)$ retard

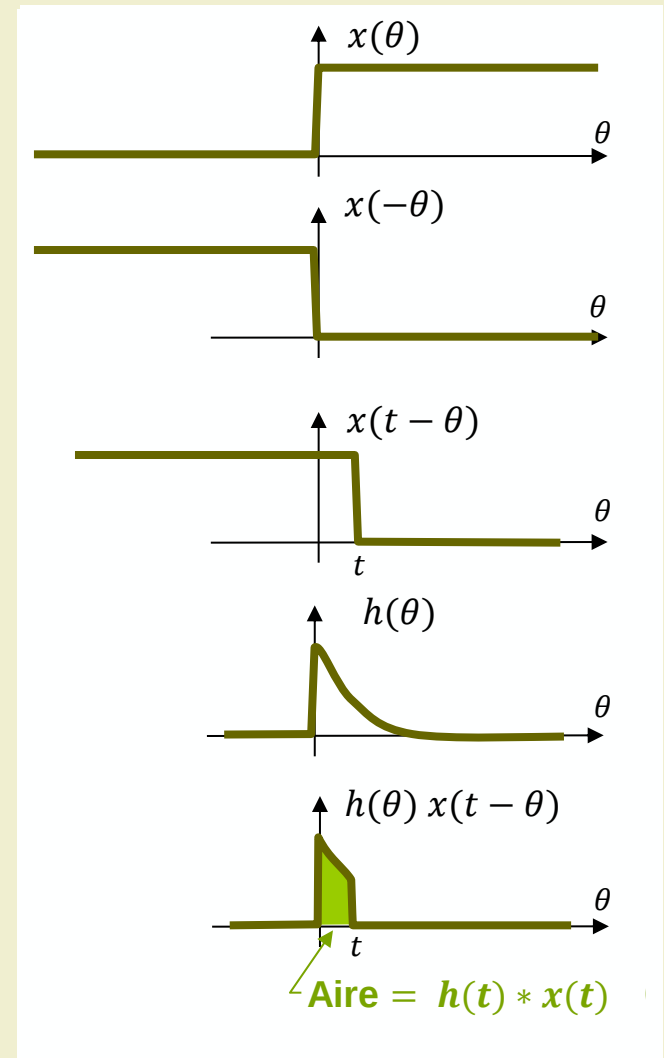
■ Interprétation

$$x(t) \star h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\theta) \cdot h(t - \theta) d\theta$$

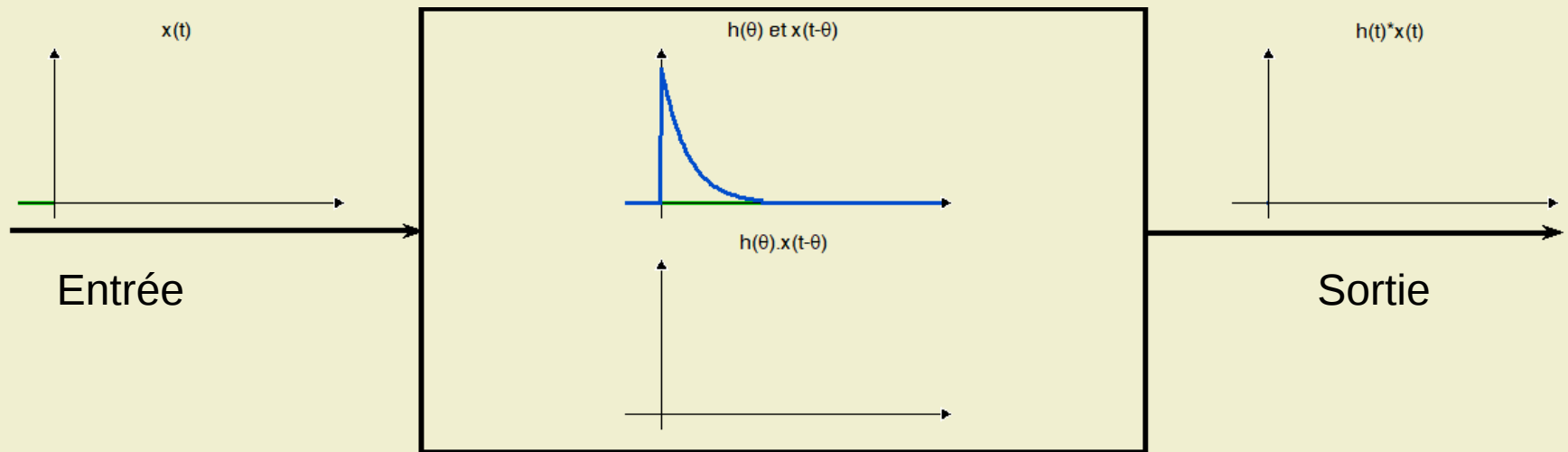
$$x(t) \star h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\theta) \cdot x(t - \theta) d\theta$$

Pour obtenir la valeur de $x(t) \star h(t)$ à un instant t :

- Retournement temporel de l'un des signaux
- Translation en t
- Produit point à point du signal retourné-translaté avec l'autre signal
- Intégration



$$x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\theta) \cdot h(t - \theta) d\theta$$



■ Causalité

Soit un système S causal :

$s(t) = S[e(\theta)](t)$, ne dépend que des valeurs de $\theta \in]-\infty, t]$

$$S[e(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} e(\theta)h(t-\theta)d\theta = \int_{-\infty}^t e(\theta)h(t-\theta)d\theta$$

Ce qui suppose que $h(t-\theta) = 0, \forall \theta > t$ ou $t-\theta < 0$

$$\rightarrow h(t) = S[\delta(\theta)](t) = 0, \forall t < 0$$

$h(t)$ fonction causale : $h(t) = h(t).u(t)$

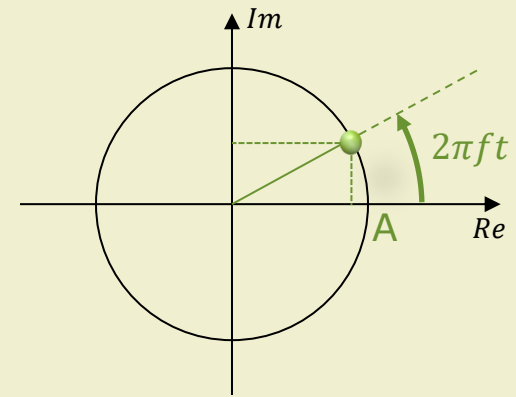
■ Stabilité

Le système est stable si, lorsque $e(t)$ est bornée, $S[e(t)]$ est aussi bornée.

$$|S[e(t)]| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} e(t-\theta)h(\theta)d\theta \right| \leq \sup_{\theta \in \mathbb{R}} |e(\theta)| \int_{-\infty}^{\infty} |h(\theta)| d\theta$$

$\rightarrow$ Il suffit que $\int_{-\infty}^{\infty} |h(\theta)| d\theta < \infty$ soit $h \in L^1(\mathbb{R})$

Réponse fréquentielle



Soient une entrée exponentielle complexe :

$$e(t) = Ae^{2\pi jft} = A(\cos(2\pi ft) + j.\sin(2\pi ft))$$

et un système linéaire invariant de réponse impulsionnelle $h(t)$

La sortie $s(t)$ est :

$$s(t) = e(t) \star h(t)$$

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\theta).e(t - \theta)d\theta = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\theta).Ae^{2\pi jf(t-\theta)}d\theta$$

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} Ae^{2\pi jft}e^{-2\pi jf\theta}h(\theta) d\theta$$

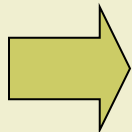
$$s(t) = \underbrace{Ae^{2\pi jft}}_{e(t)} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi jf\theta}h(\theta) d\theta}_{H(f)} \leftarrow \text{fonction indépendante de } t$$

$$s(t) = e(t).H(f)$$

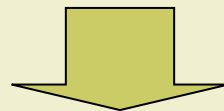
$H(f) \rightarrow$ fonction de transfert du système

$Ae^{2\pi jft} \rightarrow$ fonction propre des opérateurs de convolution

Si un signal quelconque peut s'écrire comme une somme de fonctions du type $Ae^{2\pi jft}$, alors la réponse du système à ce signal se calcule par une somme de simples produits



Décomposition des signaux sur une base de fonctions exponentielles complexes



Transformation de Fourier

Exemples de systèmes

- Amplificateur idéal

$$S[e(t)] = A e(t)$$

$$h(t) = A\delta(t)$$

A : constante réelle (gain)

- Ligne à retard

$$S[e(t)] = e(t - t_0)$$

$$h(t) = \delta(t - t_0)$$

t_0 : constante réelle

■ Moyenne glissante

$$S[e(t)] = \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} e(\theta) d\theta = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\theta) e(\theta) d\theta$$

Avec $h(t-\theta) = \frac{1}{T}$ pour $\theta \in [t-\frac{T}{2}, t+\frac{T}{2}]$

$$h(t) = \begin{cases} \frac{1}{T} & \text{si } t \in [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}] \\ 0 & \text{si } |t| > \frac{T}{2} \end{cases} = \Pi\left(\frac{t}{T}\right)$$

■ Moyenne pondérée

$$S[e(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} h(\theta) e(\theta) d\theta$$

avec $\int_{-\infty}^{\infty} h(\theta) d\theta = 1$

Résumé

■ Signaux

Impulsion de Dirac $\delta(t)$

Echelon unité $u(t)$

Porte $\Pi(t), \Pi(\frac{t}{T})$

Sinusoïde $a \cdot \cos(\omega t + \phi)$

■ Puissance

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T x(t) \cdot x^*(t) dt$$

$$P_{xy} = \frac{1}{T} \int_T x(t) \cdot y^*(t) dt$$

■ Energie

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot x^*(t) dt$$

$$E_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot y^*(t) dt$$

■ Systèmes linéaires invariants (SLI)

Linéarité: $\forall x_1(t), \forall x_2(t), \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \mu \in \mathbb{R}, S[\lambda x_1(t) + \mu x_2(t)] = \lambda S[x_1(t)] + \mu S[x_2(t)]$

Invariance: $\forall x(t), \forall \theta \in \mathbb{R}, y(t) = S[x(t)] \Rightarrow S[x(t - \theta)] = y(t - \theta)$

Relation-entrée sortie d'un SLI : $y(t) = x(t) \star h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\theta) \cdot h(t - \theta) d\theta$

Exercices

Donner l'expression analytique des signaux suivants :

- 1) Mesure à partir de l'instant t_1 de la tension électrique sur le secteur EDF.
 - 2) Mesure entre l'instant t_1 et l'instant t_2 de la tension électrique sur le secteur.
 - 3) Masse volumique d'un milieu composé d'un fluide homogène et de petites particules de masse m_i situées aux points $\vec{x}_i$ de l'espace.
-

Représenter chacun des signaux suivants, ainsi que leurs dérivées, et donner l'expression analytique de ces dernières :

- 1) $x_1(t) = 2 u(-t)$
- 2) $x_2(t) = \Pi(t+2) + 3 \Pi(t-1)$
- 3) $x_3(t) = \Pi(4t-2)$
- 4) $x_4(t) = t \cdot \Pi(t)$

Exercices

Soit la suite de signaux $x_n(t)$ définis par : $x_n(t) = n \Pi(nt)$

Tracer quelques uns de ces signaux ($n=1, 2, 4, 8 \dots$).

Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$

Soit le signal $s(t) = (1 - |t|) \cdot \Pi(t/2)$

Tracer s . Tracer sa dérivée et sa dérivée seconde, et donner leurs expressions analytiques.

Soit $x(t)$ un signal continu en 0.

En utilisant le résultat de l'exercice 3, démontrer l'expression de $x(t) \cdot \delta(t)$.

Donner les expressions de : $\Pi(t) \cdot \delta(t)$, $\cos(t) \cdot \delta(t)$, $\sin(t) \cdot \delta(t)$, $t \cdot \delta(t)$.

Exercices

Représenter chacun des signaux suivants, calculer sa valeur moyenne, sa puissance et son énergie.

1. $x_1(t) = A\Pi(\frac{t}{T})$

2. $x_2(t) = u(t)$

3. $x_3(t) = u(t - 2)$

4. $x_4(t) = t.u(t)$

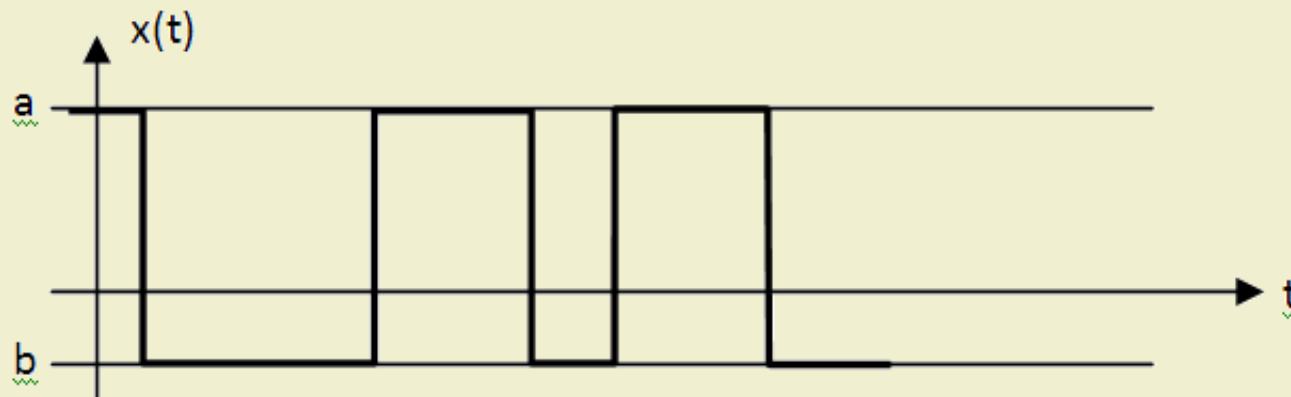
5. $x_5(t) = A.e^{-at}$ (a réel positif)

6. $x_6(t) = A.e^{-at}.u(t)$ (a réel positif)

7. $x_7(t) = A.\sin(2\pi ft)$

8. $x_8(t) = A.\cos(2\pi ft + \phi)$

Donner l'énergie et la puissance moyenne d'un signal binaire $x(t)$ tel que $\text{prob}(x(t) = a) = \alpha$ et $\text{prob}(x(t) = b) = 1 - \alpha$.



Exercices

Soient $x(t) = \cos(2\pi t)$ et $y(t) = 2 \cdot \cos(2\pi f_0 t)$

Donner la puissance et l'énergie de $x(t)$ et $y(t)$

Calculer la puissance et l'énergie de $z(t) = x(t) + y(t)$

Pour chacun des signaux suivants, calculer sa valeur moyenne, sa puissance et son énergie.

1. $x_1(t) = A \cdot \cos(2\pi f_0 t + \phi) \cdot u(t)$

3. $x_3(t) = A \cdot e^{2\pi j f_0 t} \cdot \Pi(f_0 t)$

2. $x_2(t) = A \cdot e^{2\pi j f_0 t}$

4. $x_4(t) = A \cdot e^{\alpha t} \cdot u(t)$ (α complexe)

Soit un signal x de puissance moyenne finie, de valeur moyenne $\bar{x}$. Soit le signal y correspondant aux fluctuations de x (y est défini par : $y = x - \bar{x}$). Exprimer la puissance moyenne de y .

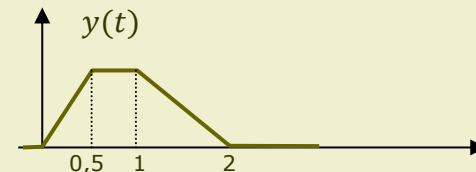
En considérant $\delta(t)$ comme la limite d'une suite de portes, donner son énergie. Que penser de sa puissance moyenne ?

Exercices

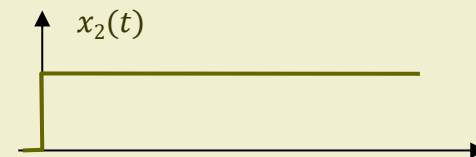
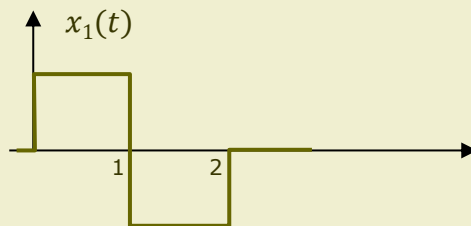
- Pour chacun des systèmes définis ci-dessous, démontrer qu'il est ou non linéaire et invariant :

- $y(t) = x(t) + 0.5$
- $y(t) = x(t) + x(t - 3)$
- $y(t) = 3.x(t) - 5$
- $y(t) = (t - 1).x(t)$

- Pour un système linéaire invariant, on représente ci-dessous la sortie $y(t)$ pour une entrée $x(t)$.

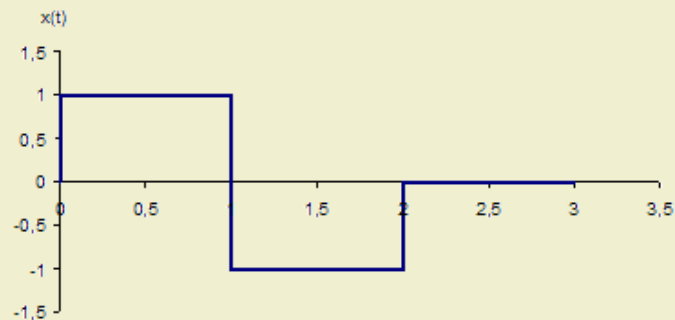


En déduire la réponse aux entrées $x_1(t)$ et $x_2(t)$

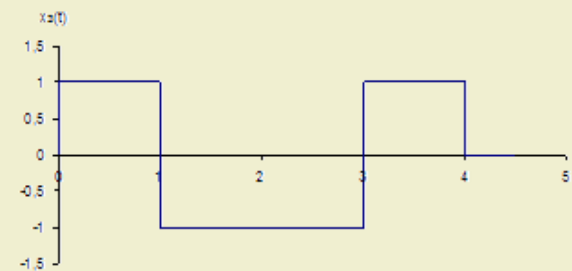
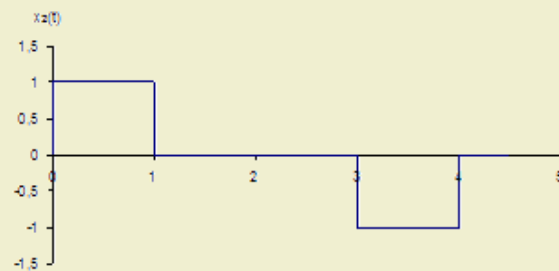
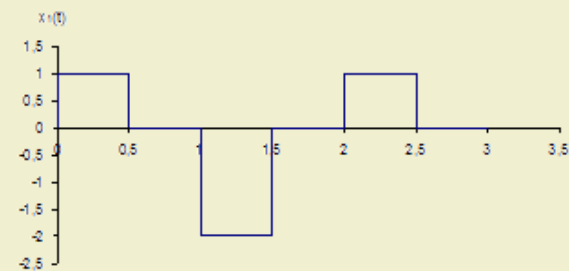


Exercices

On considère un système linéaire et invariant dont la sortie est $y(t)$ pour l'entrée $x(t)$:



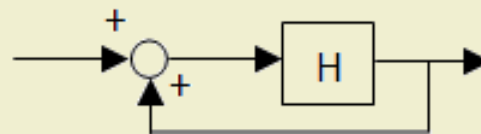
Tracer la sortie de ce système pour les entrées suivantes:



Exercices

Soit H un système linéaire et invariant.

Le système en boucle fermée est-il nécessairement linéaire ? et invariant ?

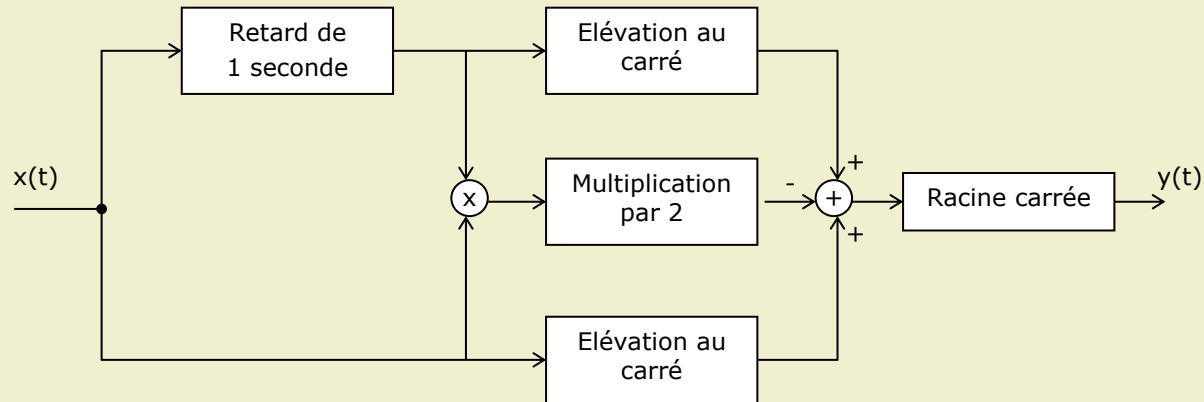


Soit un système linéaire et invariant. Montrer que si le signal d'entrée est périodique de période T , le signal de sortie l'est aussi.

Montrer que le système défini par la relation entrée-sortie suivante est linéaire et invariant : $s(t) = \int_{-\infty}^t e(\theta) d\theta$

Exercices

- On considère le système représenté sur la figure. L'opérateur « racine carrée » fournit la racine carrée positive.

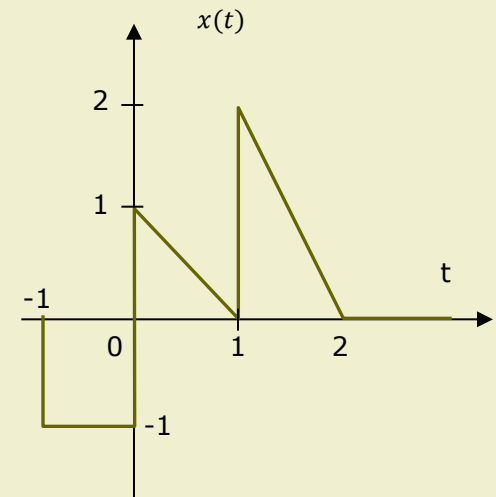


Donner la relation liant $x(t)$ et $y(t)$.

Ce système est-il linéaire ? (Justifier la réponse)

Ce système est-il invariant ? (Justifier la réponse)

Tracer la réponse du système à l'entrée $x(t)$ représentée ci-contre



Exercices

- Démontrer que le produit de convolution est commutatif
-

- On considère le système linéaire et invariant dans le temps de réponse impulsionnelle $h(t) = \delta(t - \tau)$

Exprimer la sortie du système à une entrée $e(t)$ quelconque

1. Soit x et y deux fonctions dérivables et sommables, montrer que $(x*y)' = x'*y = x*y'$.
2. Tracer $u(t)$ et sa dérivée.
3. En déduire la relation entre la réponse impulsionnelle et la réponse indicielle.
4. Application :
 - comparer la réponse impulsionnelle et la réponse indicielle du système entrée-sortie défini par : $s(t) = e(t) - e(t-1)$
 - comparer la réponse impulsionnelle et la réponse indicielle du système entrée-sortie défini par : $s(t) = e(t) - 1$

Exercices

On considère un système linéaire et invariant dont la réponse impulsionnelle est: $h(t) = e^{-at} u(t)$ avec $a > 0$

1. Représenter $h(t)$.
2. On attaque ce système avec une impulsion rectangulaire

$$e_1(t) = \Pi\left(\frac{t - \frac{T}{2}}{T}\right)$$

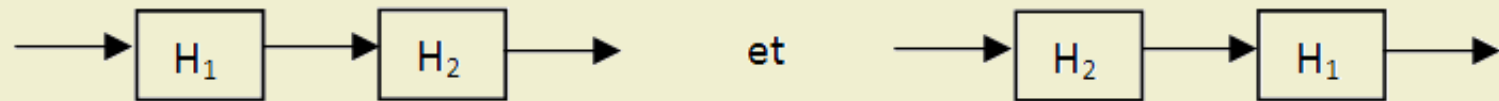
Calculer la réponse du système pour cette entrée.

3. Calculer la nouvelle réponse si le système est maintenant attaqué par un échelon $u(t)$.
En déduire la réponse à un échelon $u(t-T)$.
4. En décomposant $e_1(t)$ en une somme d'échelons, retrouver la réponse au point 2.

Exercices

Soient deux systèmes linéaires et invariants H_1 et H_2 de réponses impulsionnelles $h_1(t)$ et $h_2(t)$.

Donner la réponse impulsionnelle des systèmes en cascade



Application :

- en prenant pour H_1 et H_2 des lignes à retard, calculer la réponse impulsionnelle des deux systèmes en série,
- idem en prenant pour H_1 ligne à retard et pour H_2 un système quelconque.

Exercices

- Calculer, dans le domaine temporel, le produit de convolution suivant :

$$y(t) = (e^{2t}u(-t) + \delta(t - 3)) * (e^{-3t}u(t))$$

où $u(t)$ désigne l'échelon unité

- On considère un système linéaire et invariant dont la sortie pour une entrée $x(t)$ est :

$$y(t) = \int_{-\infty}^t e^{-(t-\lambda)} \cdot x(\lambda - 2) d\lambda$$

Quelle est la réponse impulsionnelle $h(t)$ de ce système ?