

Traitement du signal



Transformée de Fourier

- Définition
- Propriétés
- Transformées des signaux de test
- Transformée de Fourier des signaux à valeur moyenne non nulle

Joseph Fourier (1768-1830)



- Instruction chez les Bénédictins puis dans une école militaire.
- Participe à la révolution, manquant de peu de se faire guillotiner durant la Terreur et sauvé de justesse par la chute de Robespierre.
- Intègre l'École Normale Supérieure : élève de Joseph-Louis Lagrange et Pierre-Simon Laplace.
- Participe à l'expédition de Napoléon en Égypte en 1798, et occupe un haut poste de diplomate dans ce pays conquis.
- À son retour en France en 1801, nommé par Napoléon préfet de l'Isère.
- conduit à Grenoble ses expériences sur la propagation de la chaleur qui lui permettront de modéliser l'évolution de la température au travers de séries trigonométriques.
- Il entre à l'Académie des Sciences en 1817.

Définition

$x(t)$ intégrable sur $\mathbb{R}$

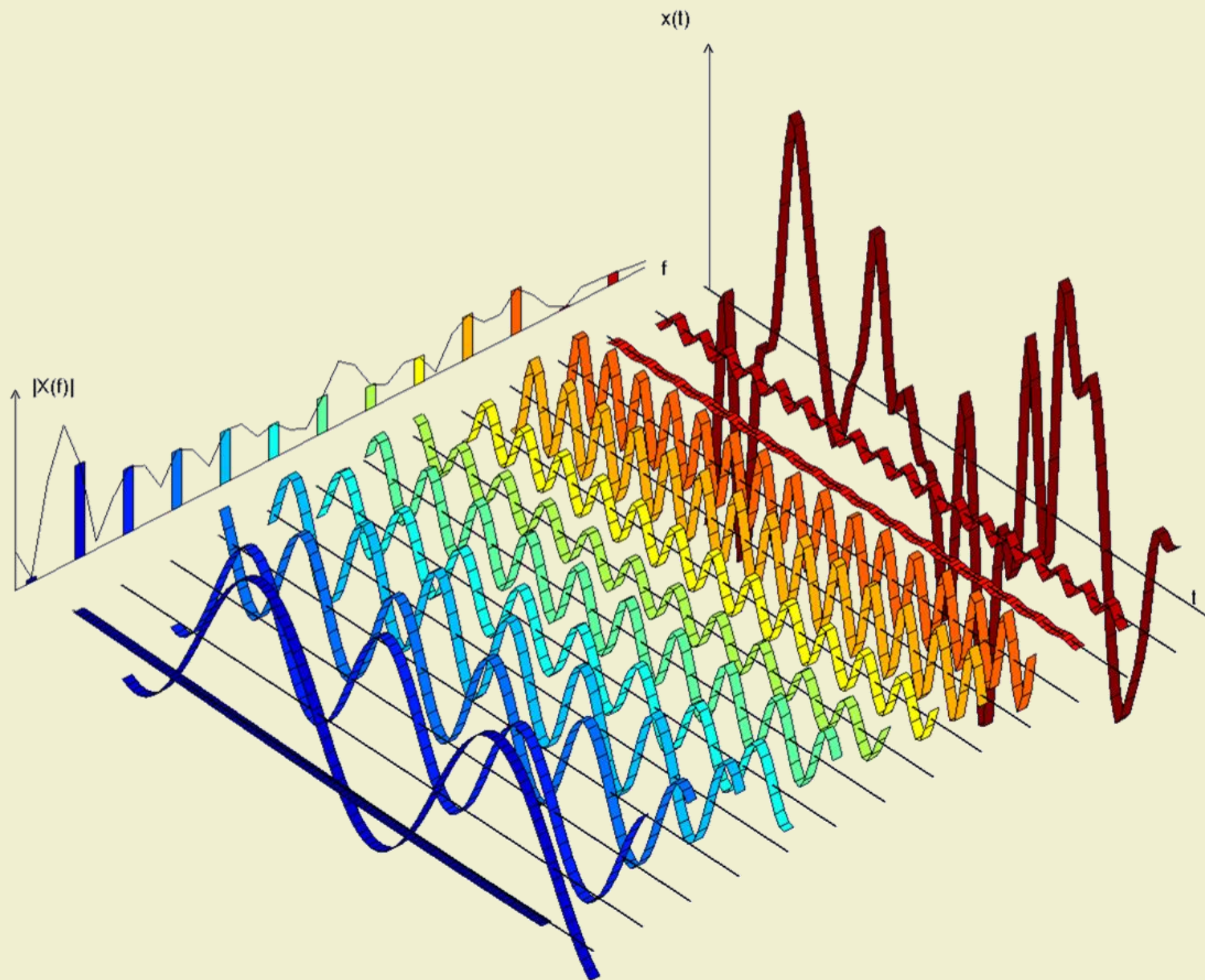
$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \cdot e^{2\pi jft} df \quad \begin{matrix} \mathcal{F} \\ \rightleftharpoons \\ \mathcal{F}^{-1} \end{matrix} \quad X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-2\pi jft} dt$$

$X(f)$ est généralement complexe :

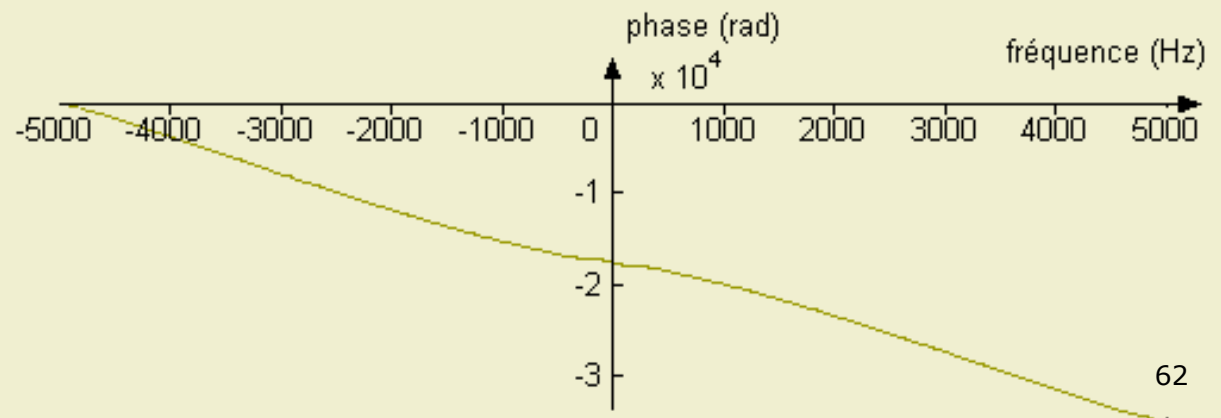
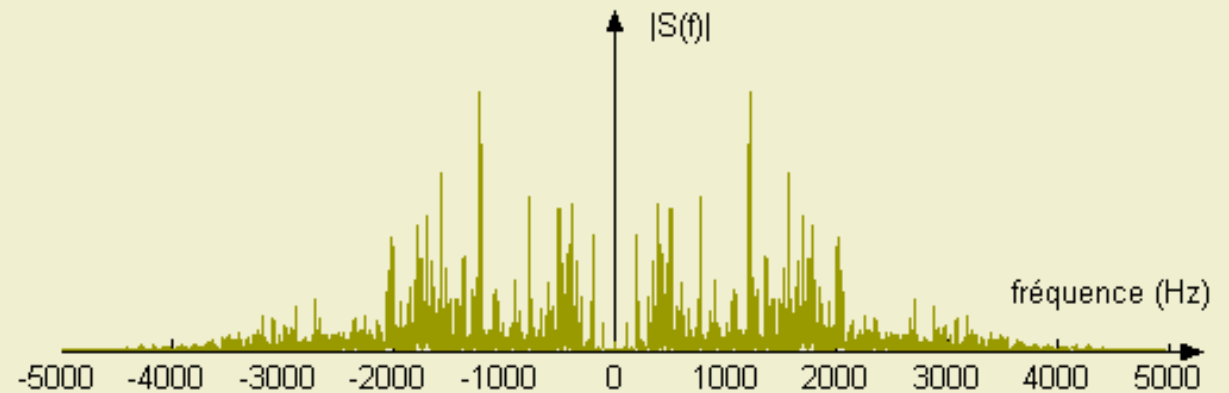
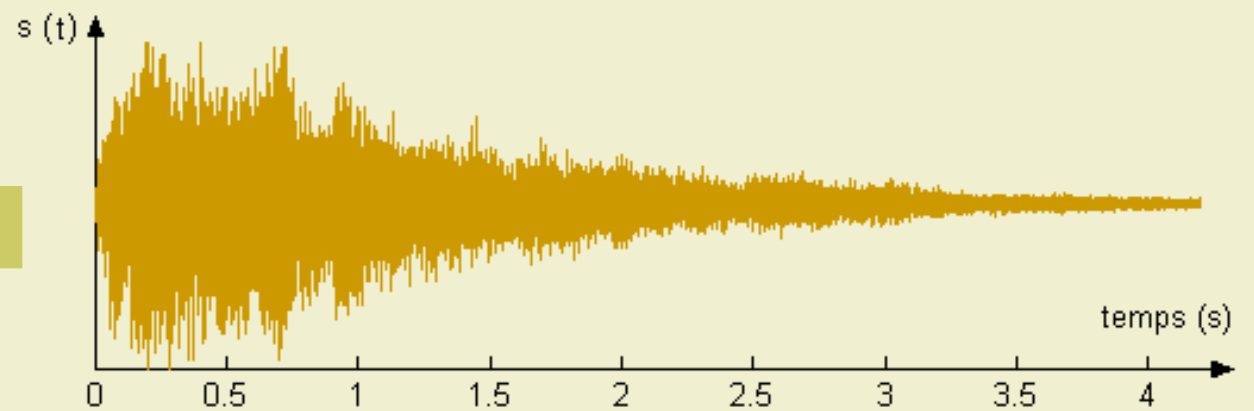
$$X(f) = \operatorname{Re}(X(f)) + j\operatorname{Im}(X(f)) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \operatorname{Re}(X(f)) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot \cos(2\pi ft) dt \\ \operatorname{Im}(X(f)) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot \sin(2\pi ft) dt \end{cases}$$

on considère aussi spectre d'amplitude et spectre de phase

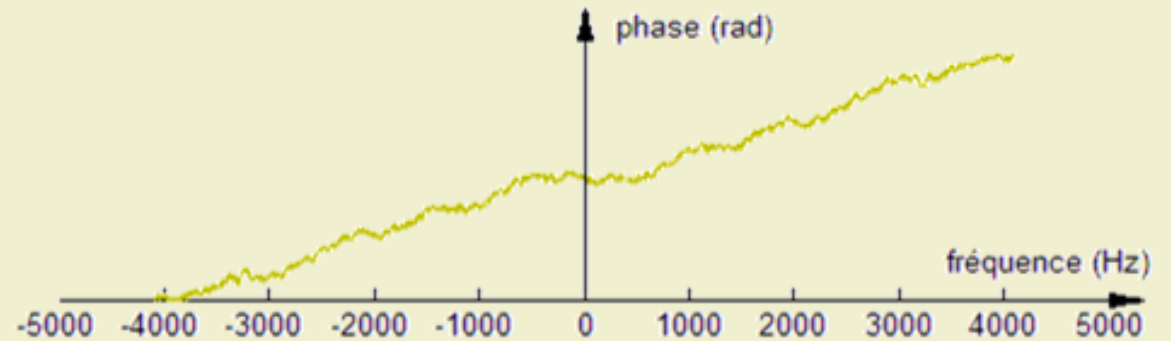
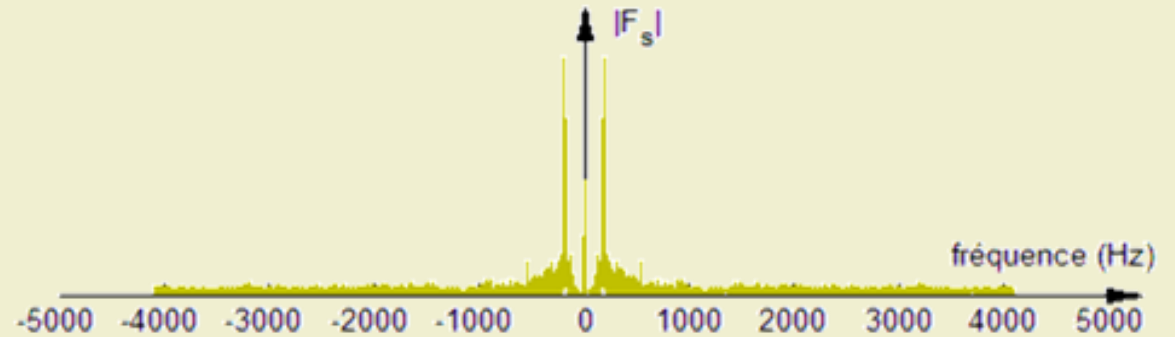
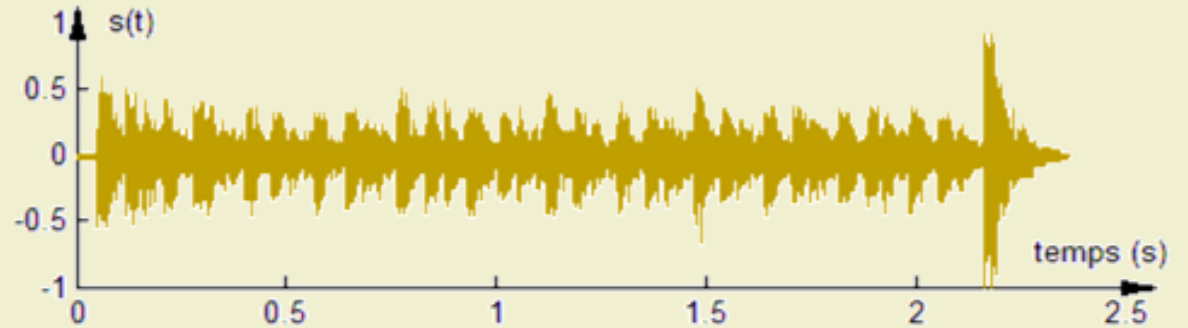
$$X(f) = |X(f)|e^{j\phi(f)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} |X(f)| = \sqrt{\operatorname{Re}(X(f))^2 + \operatorname{Im}(X(f))^2} \\ \phi(f) = \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}(X(f))}{\operatorname{Re}(X(f))}\right) \end{cases}$$



Exemples



Exemples



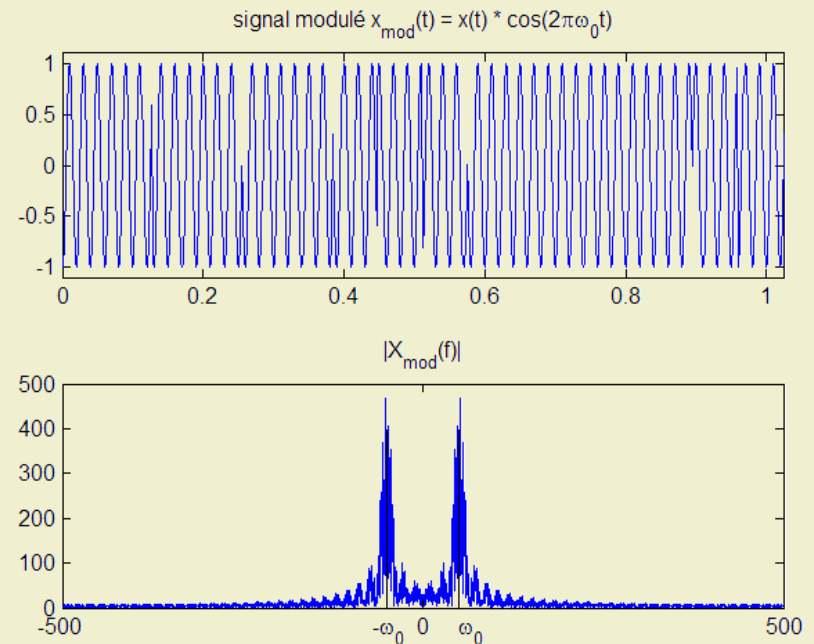
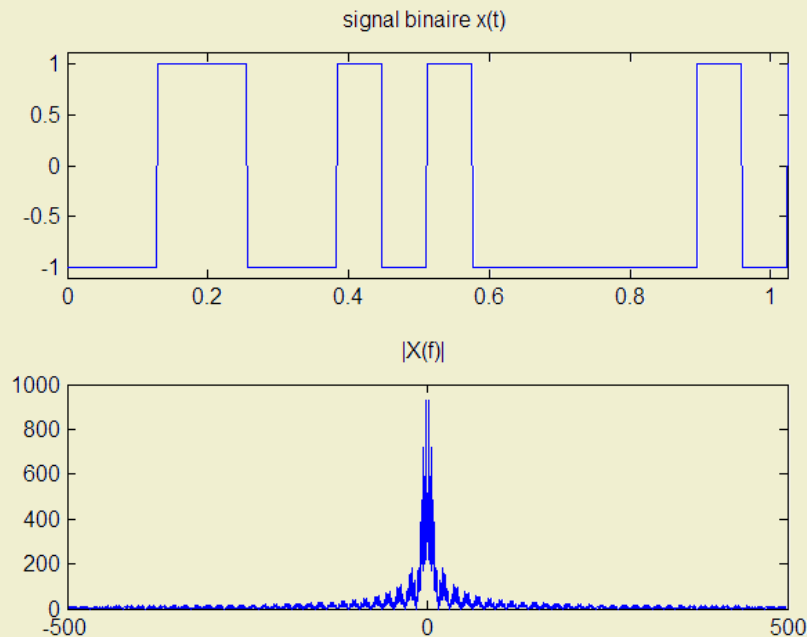
Propriétés

■ Linéarité :	$a x_1(t) + b x_2(t)$	$\begin{matrix} \mathcal{F} \\ \rightleftarrows \\ \mathcal{F}^{-1} \end{matrix}$	$a X_1(f) + b X_2(f)$
■ Symétrie :	$x(-t)$	$\begin{matrix} \mathcal{F} \\ \rightleftarrows \\ \mathcal{F}^{-1} \end{matrix}$	$X(-f)$
■ Changement d'échelle :	$x(at)$	$\begin{matrix} \mathcal{F} \\ \rightleftarrows \\ \mathcal{F}^{-1} \end{matrix}$	$\frac{1}{ a } X\left(\frac{f}{a}\right)$
■ Conjugaison :	$x^*(t)$	$\begin{matrix} \mathcal{F} \\ \rightleftarrows \\ \mathcal{F}^{-1} \end{matrix}$	$X^*(-f)$
■ Dualité :	$X(t)$	$\begin{matrix} \mathcal{F} \\ \rightleftarrows \\ \mathcal{F}^{-1} \end{matrix}$	$x(-f)$
■ Translation :	$x(t - \theta)$	$\begin{matrix} \mathcal{F} \\ \rightleftarrows \\ \mathcal{F}^{-1} \end{matrix}$	$e^{-2\pi j f \theta} X(f)$
	$e^{2\pi j f_0 t} x(t)$	$\begin{matrix} \mathcal{F} \\ \rightleftarrows \\ \mathcal{F}^{-1} \end{matrix}$	$X(f - f_0)$

■ Modulation temporelle :

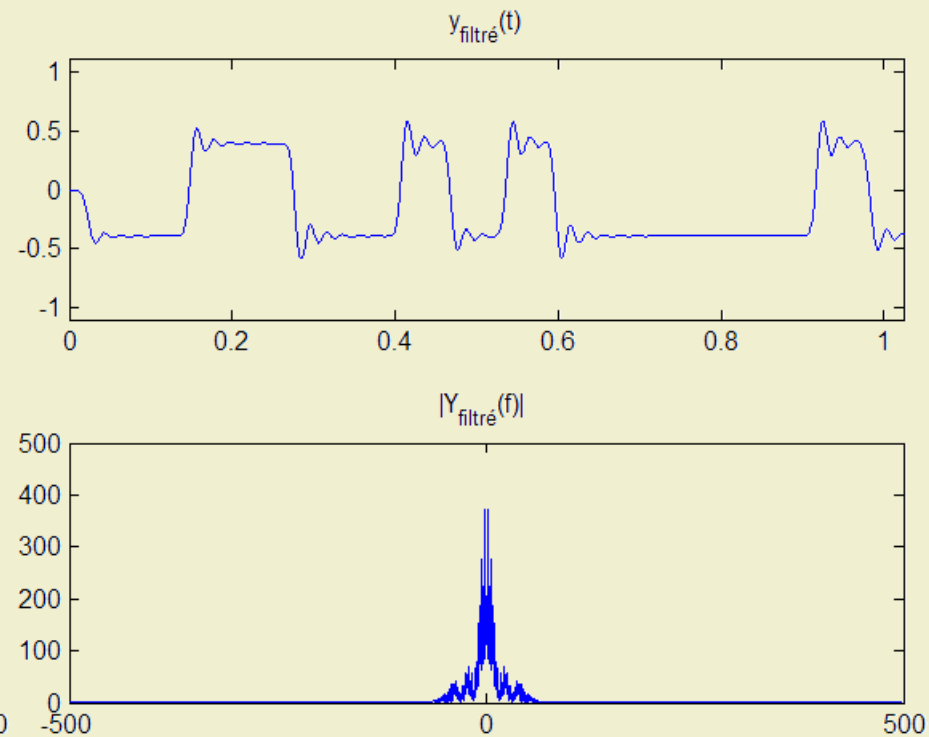
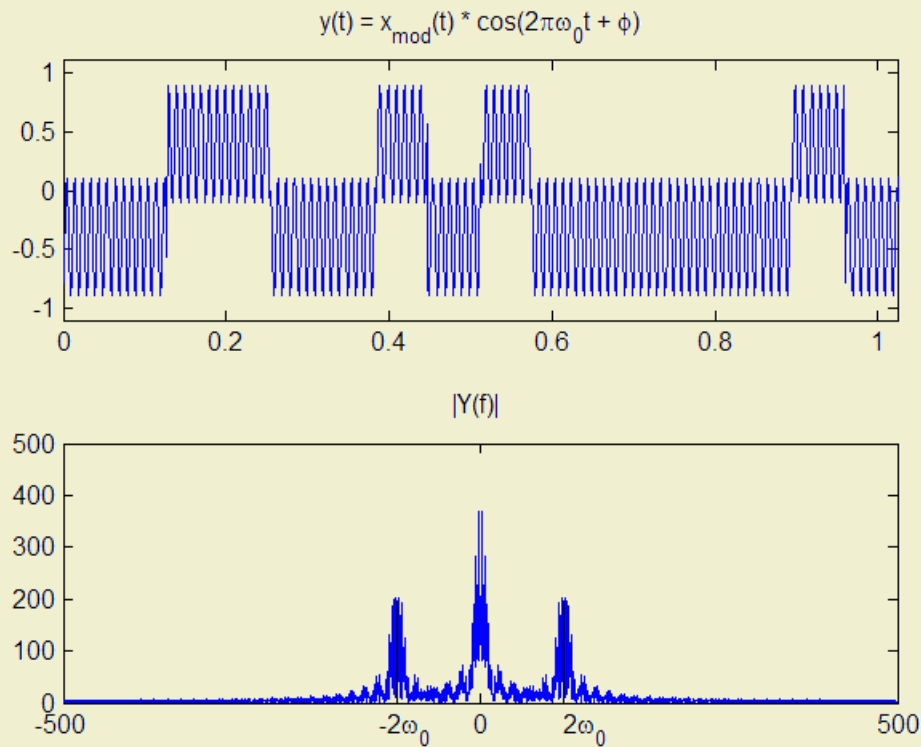
$$\begin{aligned}
 x(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t) & \xrightleftharpoons[\mathcal{F}^{-1}]{\mathcal{F}} \frac{1}{2} [X(f - f_0) + X(f + f_0)] \\
 x(t) \cdot \sin(2\pi f_0 t) & \xrightleftharpoons[\mathcal{F}^{-1}]{\mathcal{F}} \frac{-j}{2} [X(f - f_0) - X(f + f_0)]
 \end{aligned}$$

■ Exemple : signal numérique modulé



→ Translation du spectre en ω_0 et en $-\omega_0$

Démodulation → Remultiplication par la porteuse et filtrage



Propriétés

■ Dérivation :

si $x(t)$ est m fois continûment dérivable, et si ses dérivées $x^{(n)}(t)$ avec $n \leq m$ sont sommables

$$x^{(1)}(t) = \frac{dx(t)}{dt} \quad \begin{matrix} \mathcal{F} \\ \rightleftharpoons \\ \mathcal{F}^{-1} \end{matrix} \quad 2\pi j f \cdot X(f)$$

$$x^{(n)}(t) = \frac{d^n x(t)}{dt^n} \quad \begin{matrix} \mathcal{F} \\ \rightleftharpoons \\ \mathcal{F}^{-1} \end{matrix} \quad (2\pi j f)^n \cdot X(f)$$

Si $t^m x(t)$ est sommable, alors $X(f)$ est m fois continûment dérivable et

$$t \cdot x(t) \quad \begin{matrix} \mathcal{F} \\ \rightleftharpoons \\ \mathcal{F}^{-1} \end{matrix} \quad -\frac{1}{2\pi j} \frac{dX(f)}{df} = -\frac{1}{2\pi j} X^{(1)}(f)$$

$$t^n x(t) \quad \begin{matrix} \mathcal{F} \\ \rightleftharpoons \\ \mathcal{F}^{-1} \end{matrix} \quad \frac{1}{(-2\pi j t)^n} \frac{d^n X(f)}{dt^n} = \frac{1}{(-2\pi j t)^n} X^{(n)}(f)$$

■ Convolution :

$$x(t) * y(t) \quad \begin{matrix} \mathcal{F} \\ \rightleftharpoons \\ \mathcal{F}^{-1} \end{matrix} \quad X(f) \cdot Y(f)$$

$$x(t) \cdot y(t) \quad \begin{matrix} \mathcal{F} \\ \rightleftharpoons \\ \mathcal{F}^{-1} \end{matrix} \quad X(f) * Y(f)$$

Propriétés

- Parité :

$x(t)$ réelle paire	$\Leftrightarrow$	$X(f)$ réelle paire
$x(t)$ réelle impaire	$\Leftrightarrow$	$X(f)$ imaginaire impaire
$x(t)$ imaginaire paire	$\Leftrightarrow$	$X(f)$ imaginaire paire
$x(t)$ imaginaire impaire	$\Leftrightarrow$	$X(f)$ réelle impaire
- Valeur initiale : $x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f).df$ $X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t).dt$

■ Fonctions périodiques (→ séries de Fourier)

$x(t)$ périodique de période $T = \frac{1}{f_0}$

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_n e^{2\pi j n f_0 t} \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{\mathcal{F}} \\ \xleftarrow{\mathcal{F}^{-1}} \end{array} \quad X(f) = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_n \delta(f - n f_0) \\ \text{avec} \quad C_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cdot e^{-2\pi j n f_0 t} dt \end{array} \right.$$

facteur $1/T$ par rapport à la transformée de Fourier des signaux d'énergie finie

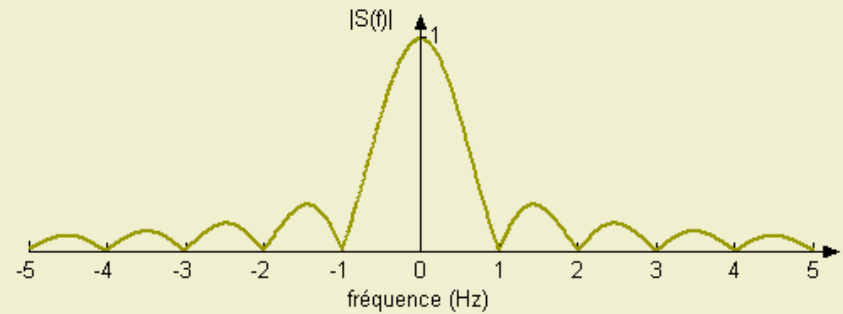
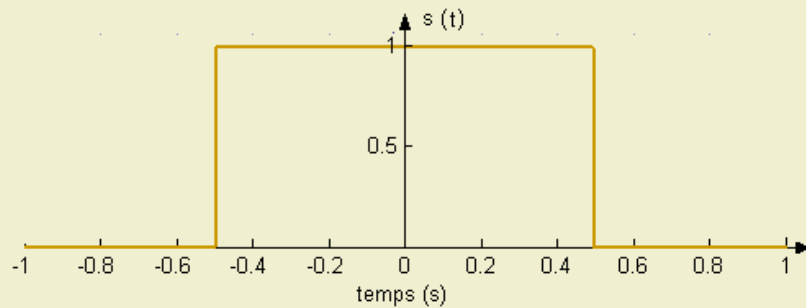
Transformées des fonctions usuelles

■ porte unité

$$\Pi(t)$$

$$\begin{matrix} \mathcal{F} \\ \longleftrightarrow \\ \mathcal{F}^{-1} \end{matrix}$$

$$\frac{\sin(\pi f)}{\pi f} = \text{sinc}(f)$$



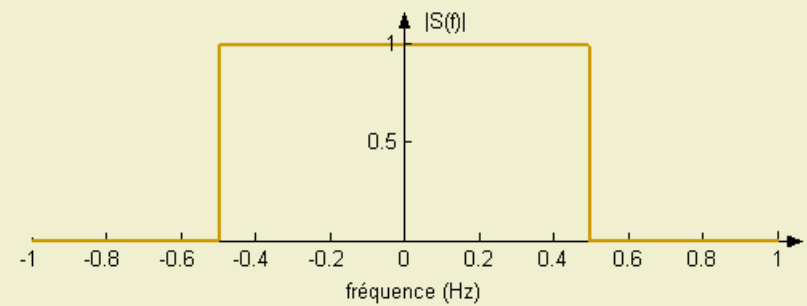
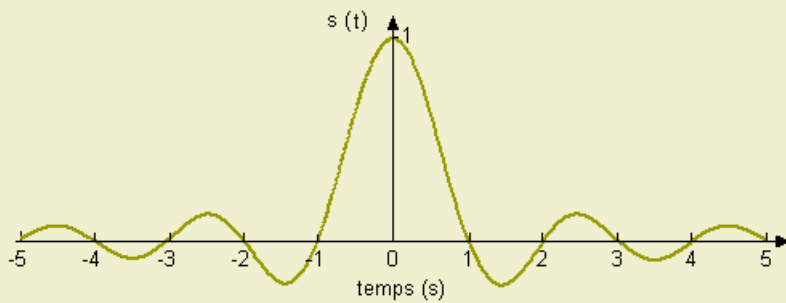
Transformées des fonctions usuelles

■ Sinus cardinal

$$\text{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$$

$$\begin{matrix} \mathcal{F} \\ \longleftrightarrow \\ \mathcal{F}^{-1} \end{matrix}$$

$$\Pi(f)$$

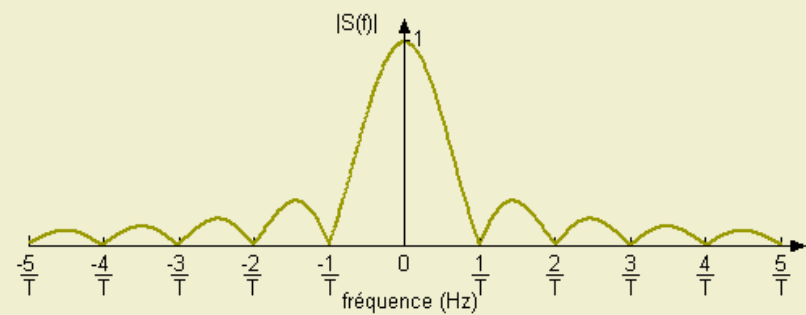
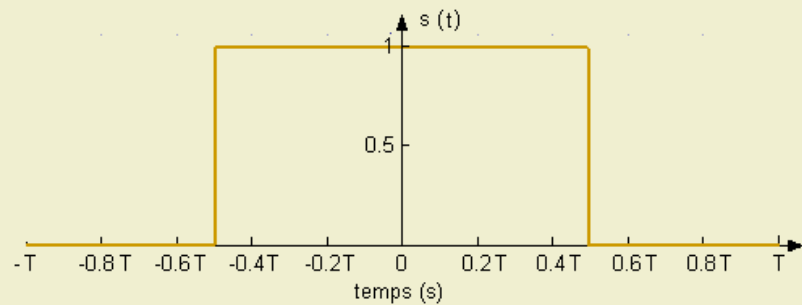


■ porte de largeur T

$$\Pi\left(\frac{t}{T}\right)$$

$$\begin{matrix} \mathcal{F} \\ \longleftrightarrow \\ \mathcal{F}^{-1} \end{matrix}$$

$$\frac{T \cdot \sin(\pi T f)}{\pi T f} = T \cdot \text{sinc}(T f)$$

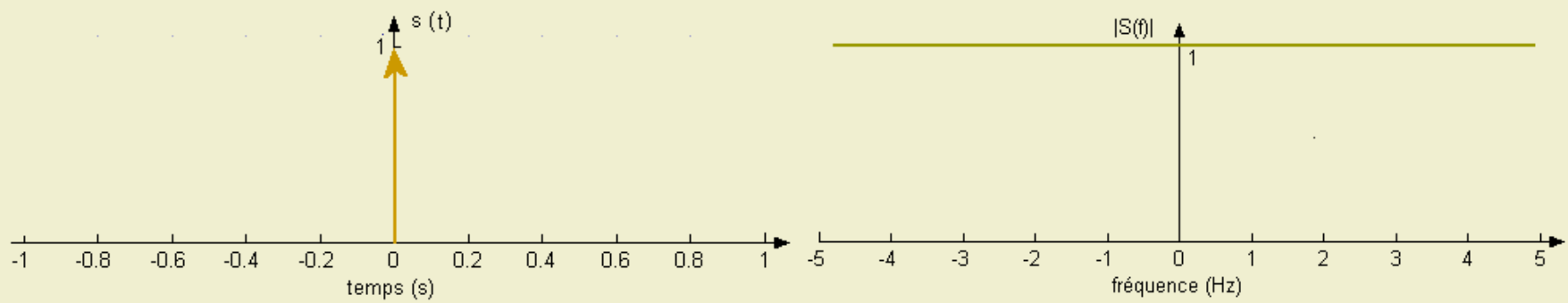


■ Impulsion de Dirac

$\delta(t)$

$\mathcal{F}$
 $\rightleftharpoons$
 $\mathcal{F}^{-1}$

1

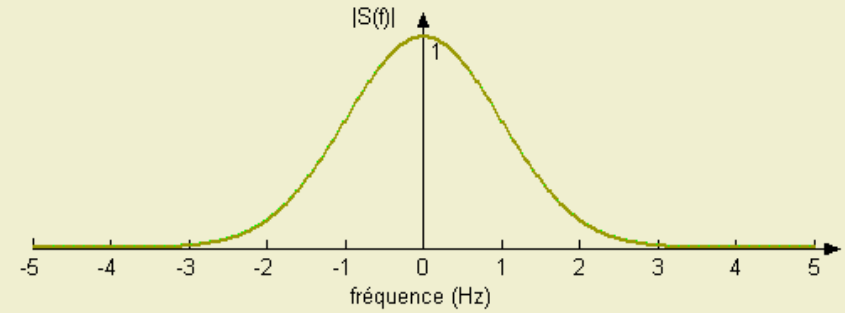
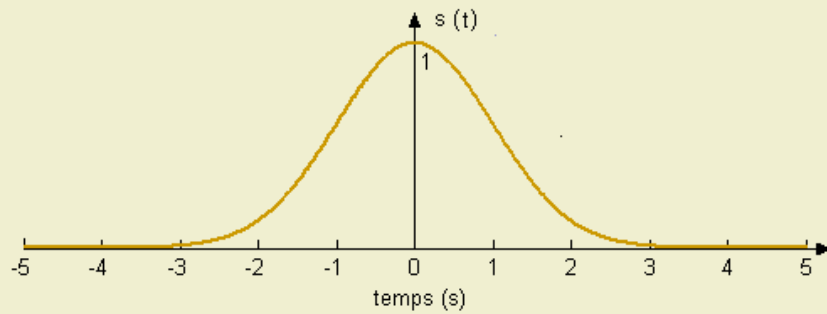


■ Gaussienne

$$e^{-\pi t^2}$$

$$\begin{matrix} \mathcal{F} \\ \longleftrightarrow \\ \mathcal{F}^{-1} \end{matrix}$$

$$e^{-\pi f^2}$$

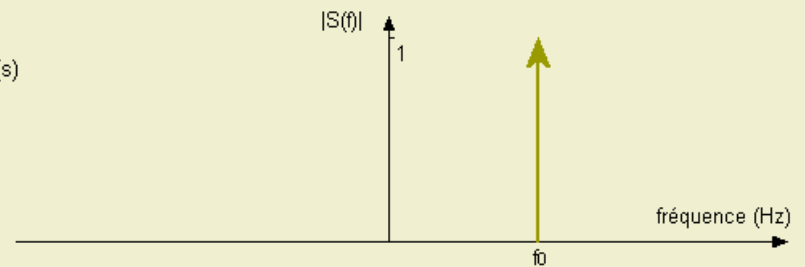
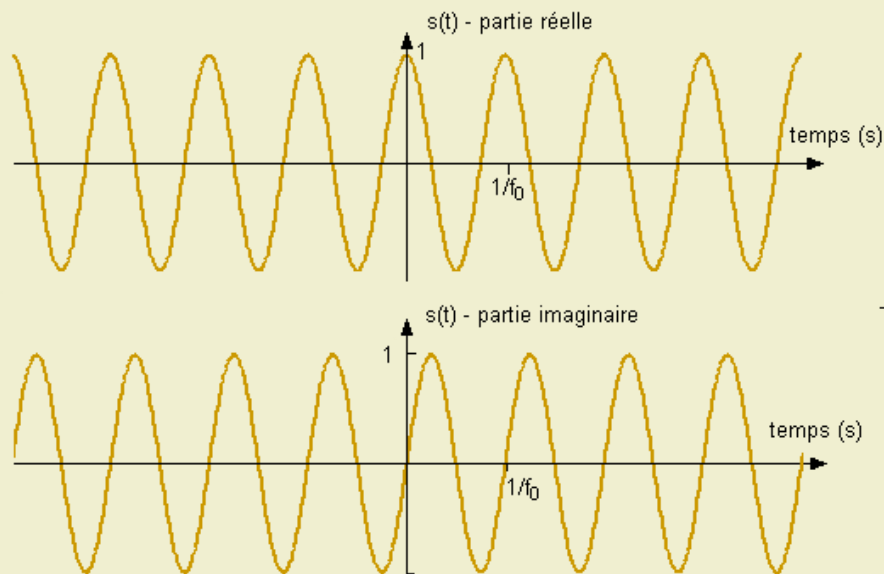


■ Exponentielle complexe

$$e^{2\pi j f_0 t}$$

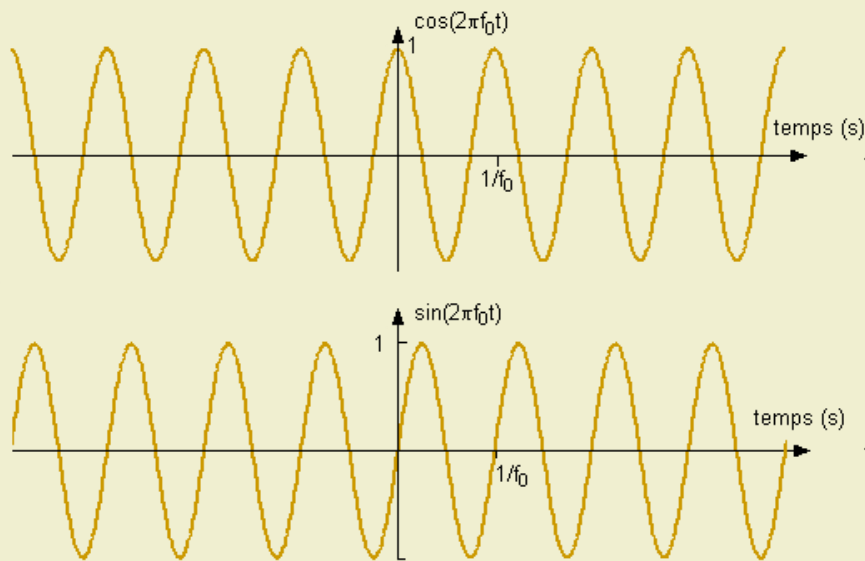
$$\begin{matrix} \mathcal{F} \\ \rightleftarrows \\ \mathcal{F}^{-1} \end{matrix}$$

$$\delta(f - f_0)$$



■ Fonctions harmoniques

$\cos(2\pi f_0 t)$	$\begin{matrix} \mathcal{F} \\ \rightleftharpoons \\ \mathcal{F}^{-1} \end{matrix}$	$\frac{1}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$
$\sin(2\pi f_0 t)$	$\begin{matrix} \mathcal{F} \\ \rightleftharpoons \\ \mathcal{F}^{-1} \end{matrix}$	$\frac{-j}{2} [\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)]$

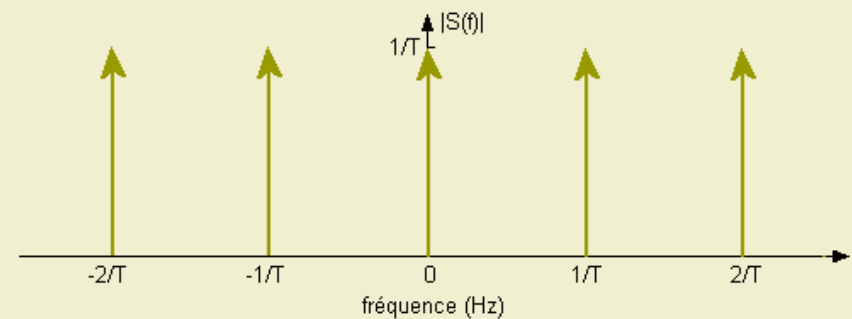
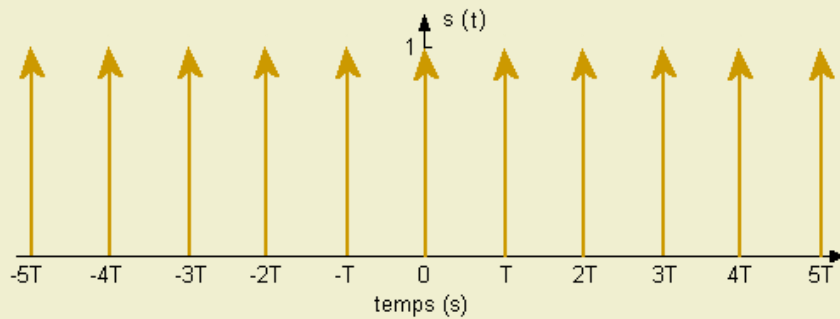


■ Peigne de Dirac

$$\text{III}_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$$

$$\begin{matrix} \mathcal{F} \\ \rightleftarrows \\ \mathcal{F}^{-1} \end{matrix}$$

$$\frac{1}{T} \text{III}_{\frac{1}{T}}(f) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$$



Transformée de Fourier des signaux à valeur moyenne non nulle

Les signaux de puissance finie ne satisfont pas les critères de convergence de la TF

$$x(t) = x_0(t) + \bar{x} \quad \text{avec} \quad \bar{x} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cdot dt$$

$$X(f) = X_0(f) + \bar{x} \cdot \delta(f)$$

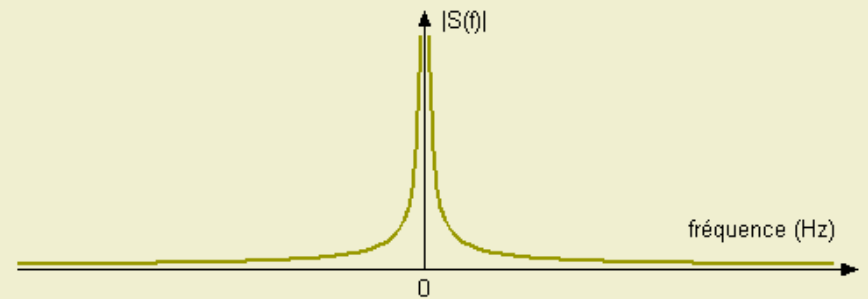
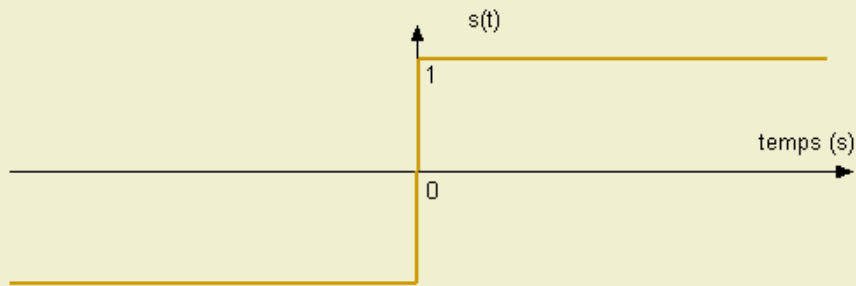
$$\text{Or } \frac{dx(t)}{dt} = \frac{dx_0(t)}{dt} \quad \text{et} \quad \mathcal{F} \left[\frac{dx_0(t)}{dt} \right] = 2\pi j f \cdot X_0(f)$$



$$X(f) = \frac{1}{2\pi j f} \mathcal{F} \left[\frac{dx(t)}{dt} \right] + \bar{x} \cdot \delta(f)$$

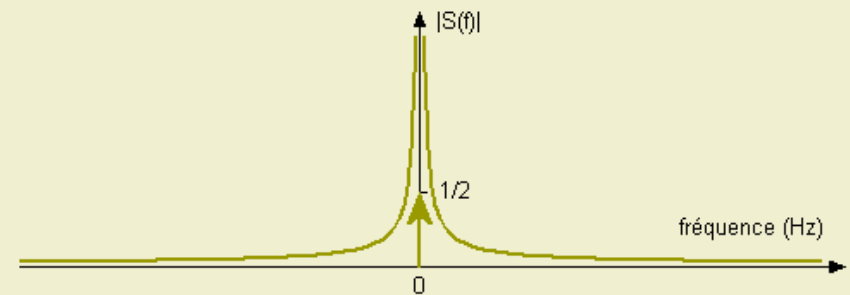
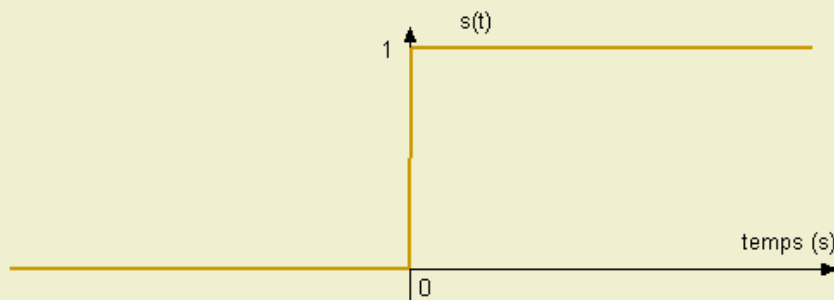
■ Application: fonction signe

$$\text{sign}(t) \quad \begin{matrix} \mathcal{F} \\ \longleftrightarrow \\ \mathcal{F}^{-1} \end{matrix} \quad -\frac{j}{\pi f}$$

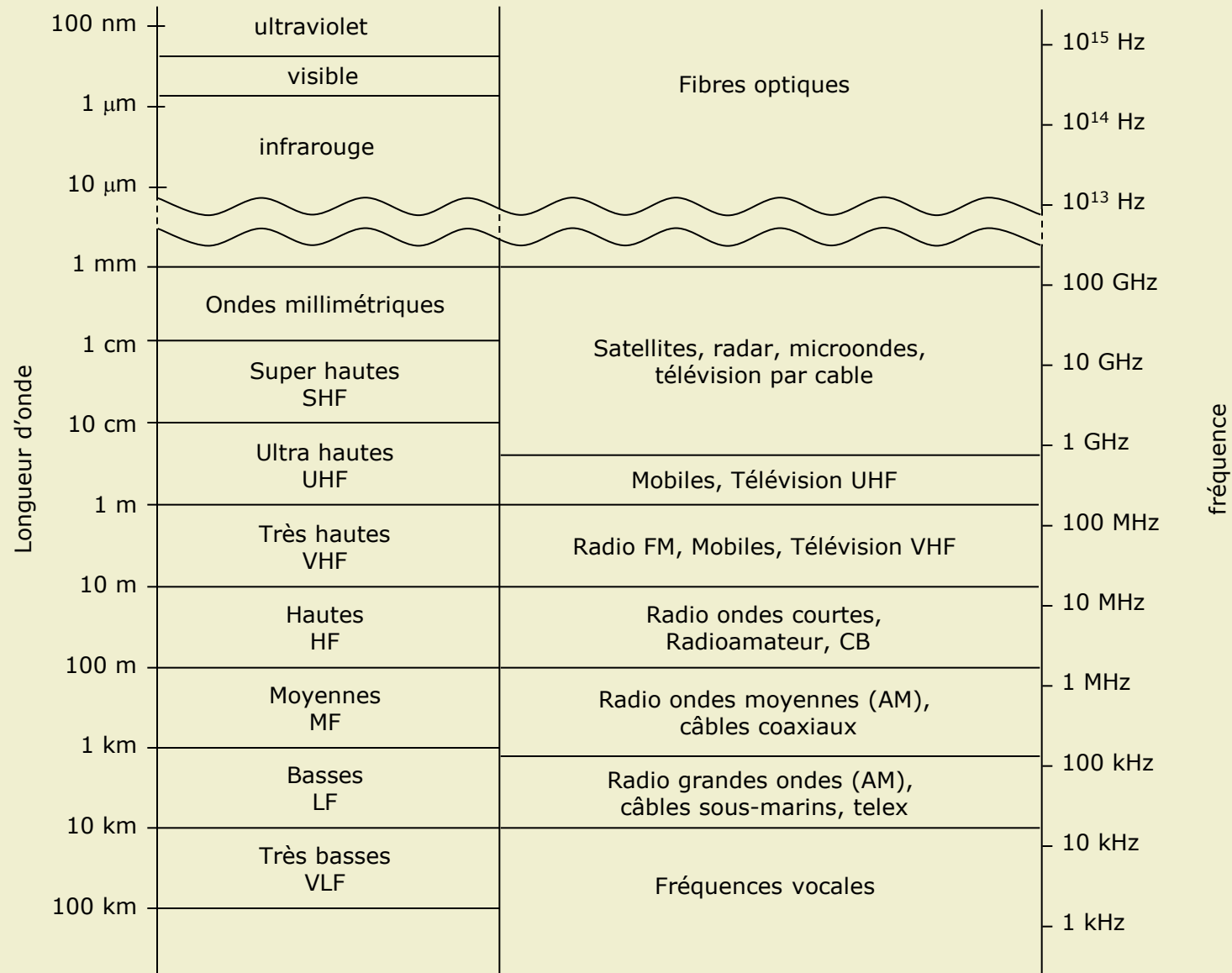


■ Application: échelon unité

$$u(t) \xrightleftharpoons[\mathcal{F}^{-1}]{\mathcal{F}} -\frac{j}{2\pi f} + \frac{1}{2}\delta(f)$$



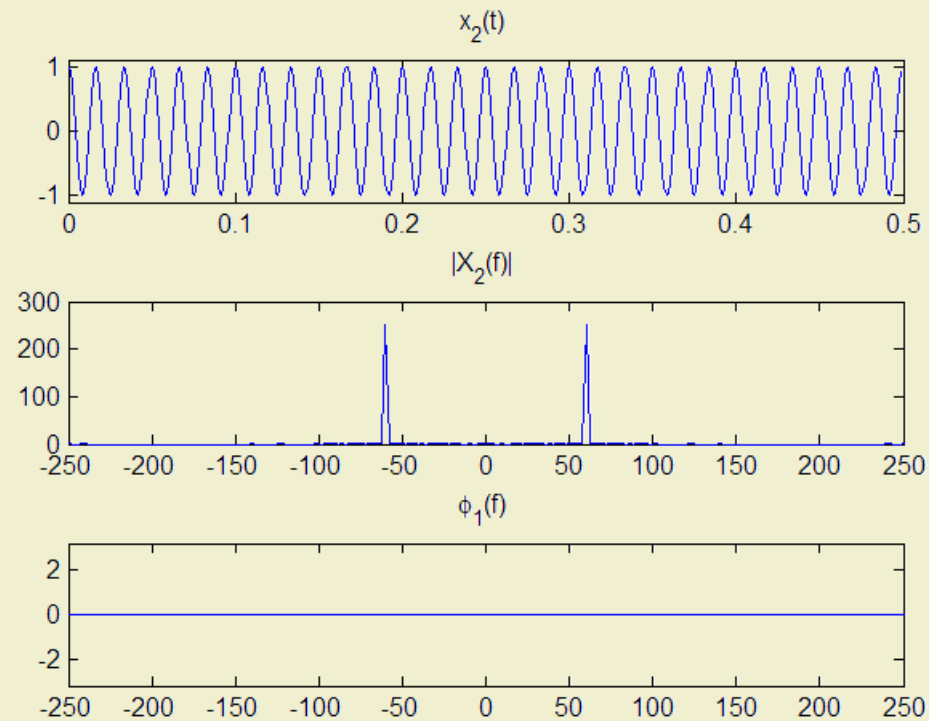
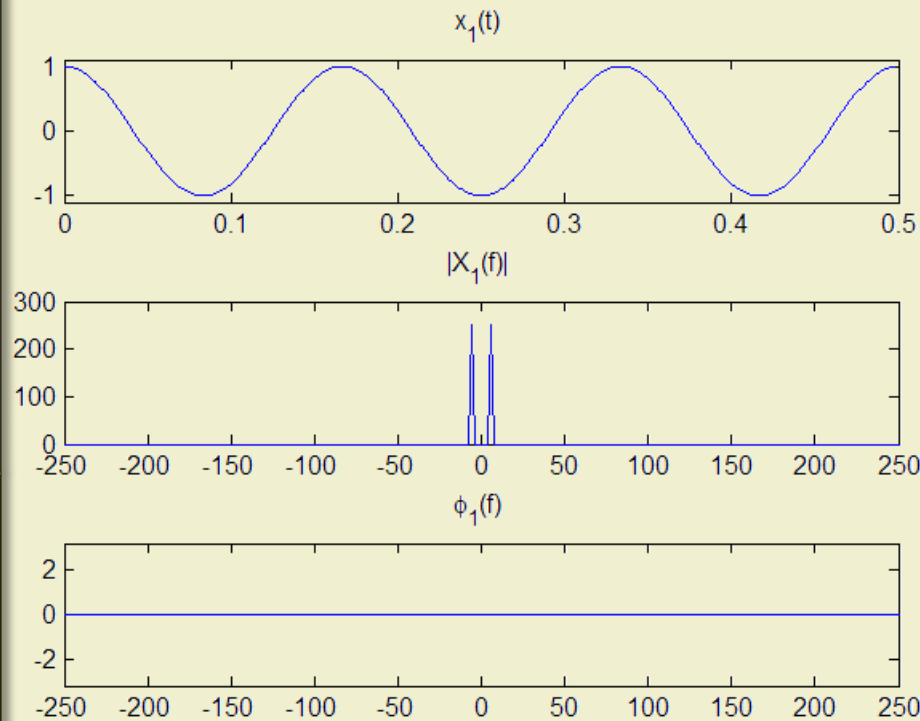
Bandes de fréquence en communication



Interprétation de la transformée de Fourier

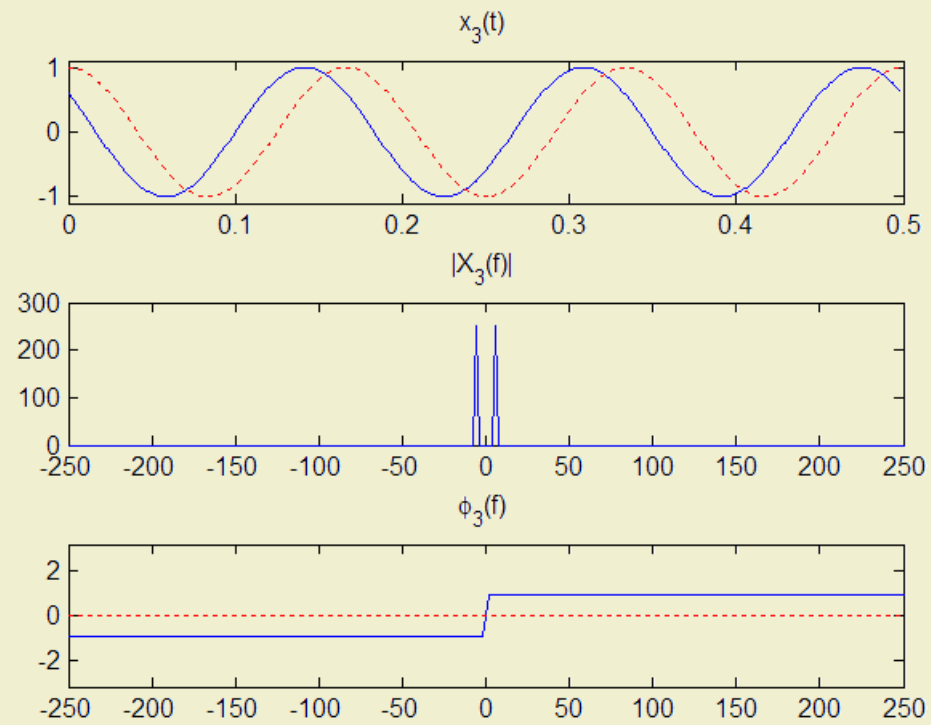
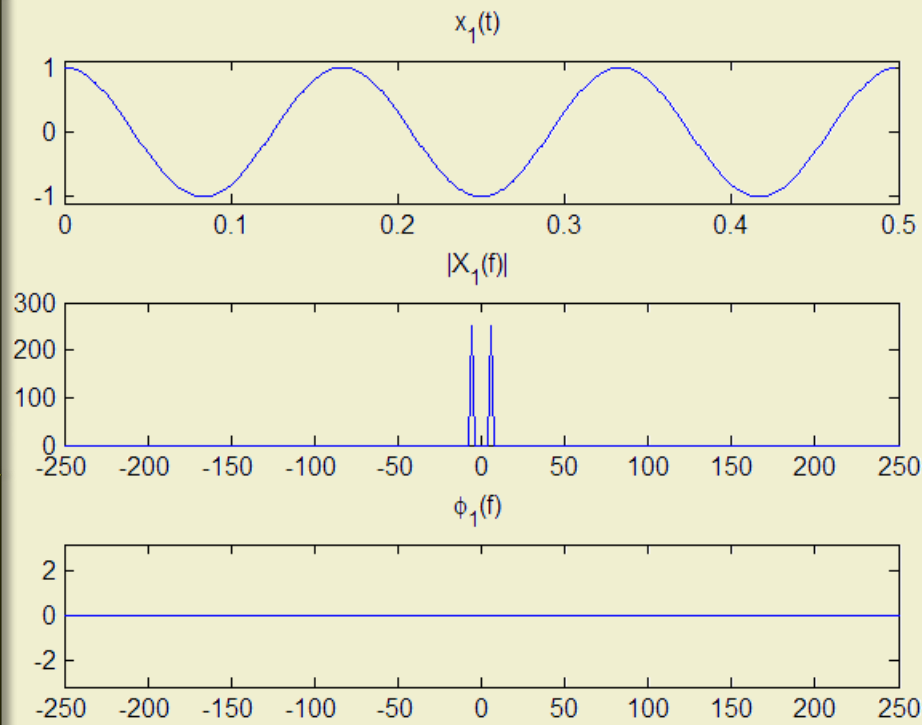
■ Fréquence

→ Rapidité des variations



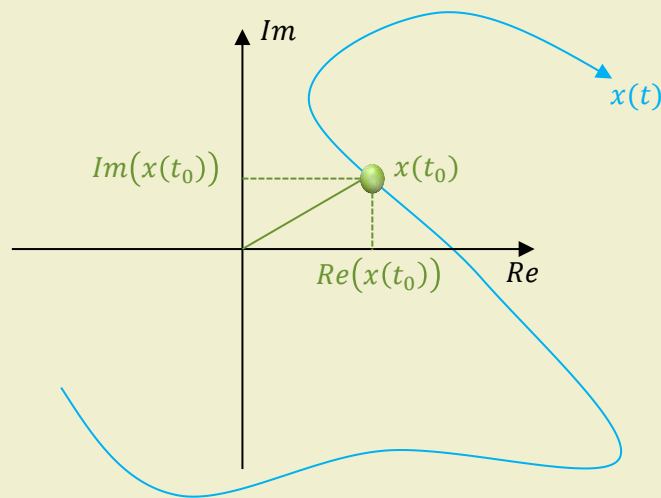
■ Phase

→ localisation

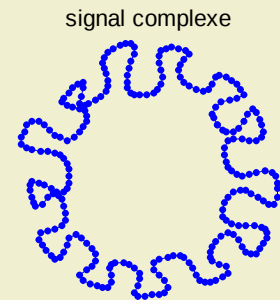
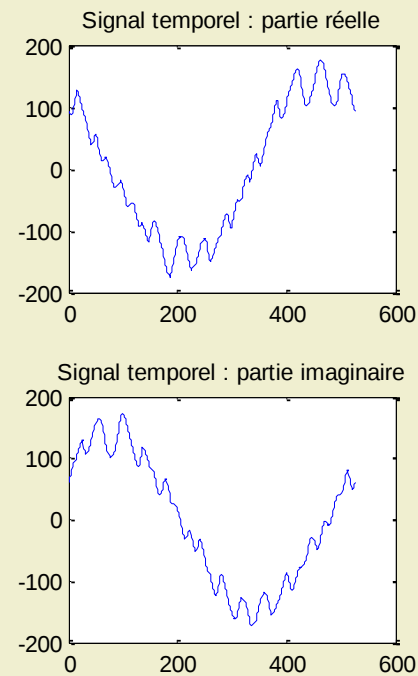


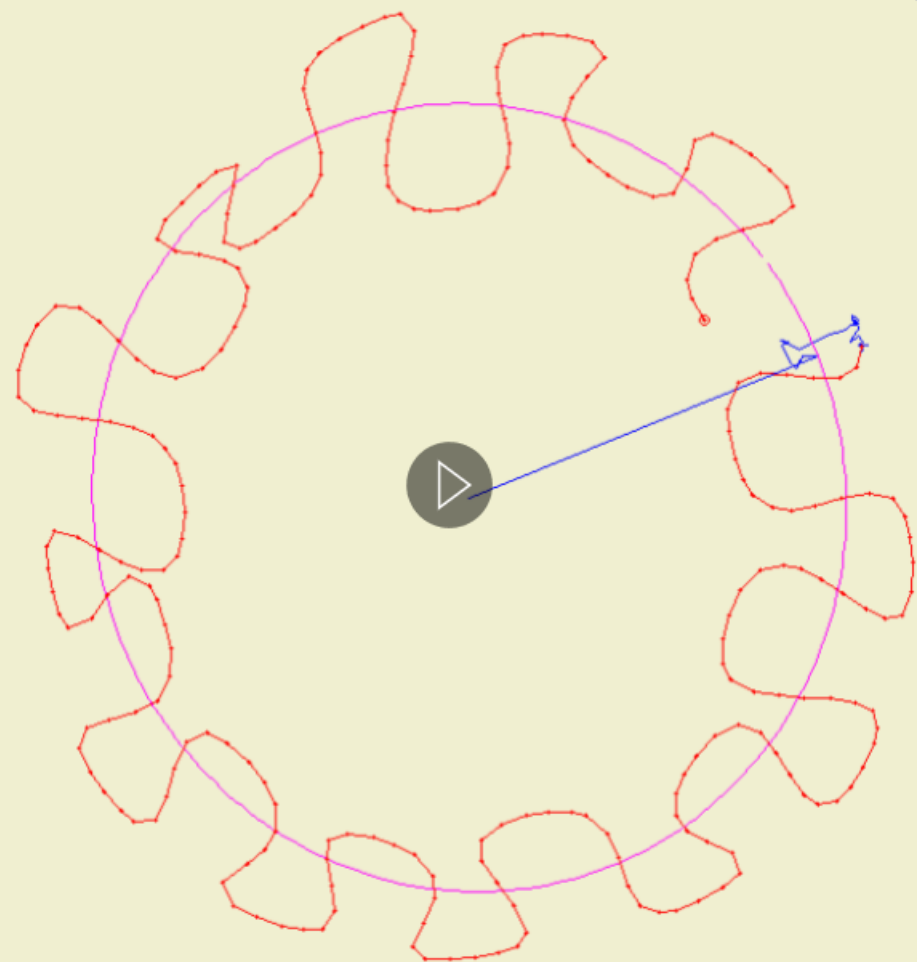
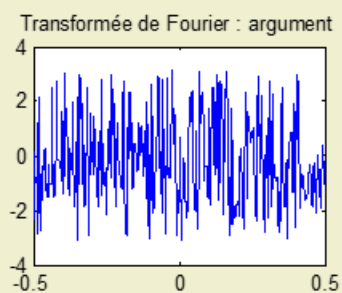
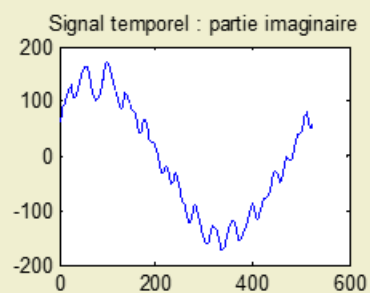
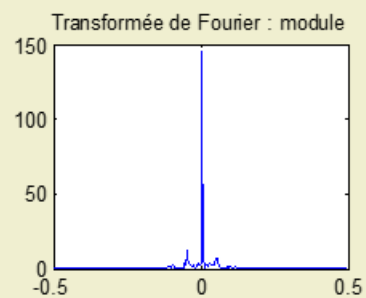
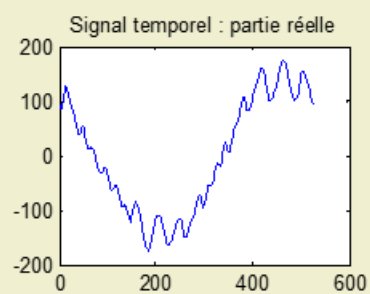
■ Signal complexe

Un signal complexe peut être vu comme une courbe plane et réciproquement :



Exemple

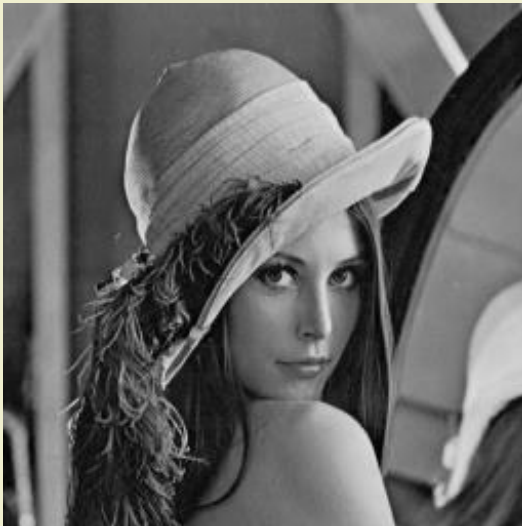




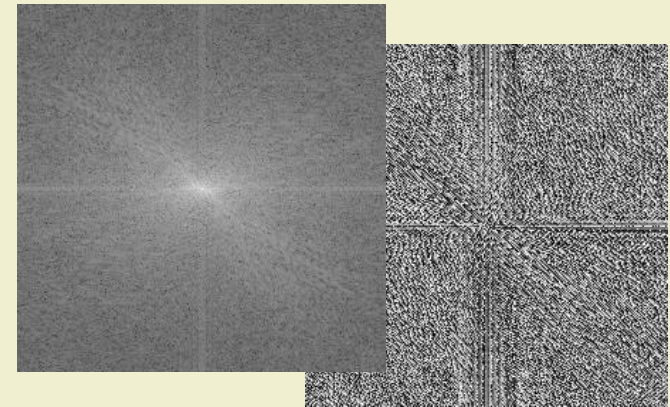
Transformée de Fourier 2D

$$f(x, y) = \int \int_{-\infty}^{+\infty} F(u, v) \cdot e^{2\pi j(ux+vy)} du \cdot dv \quad \begin{matrix} \mathcal{F} \\ \xleftrightarrow{\quad} \\ \mathcal{F}^{-1} \end{matrix} \quad F(u, v) = \int \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \cdot e^{-2\pi j(ux+vy)} dx \cdot dy$$

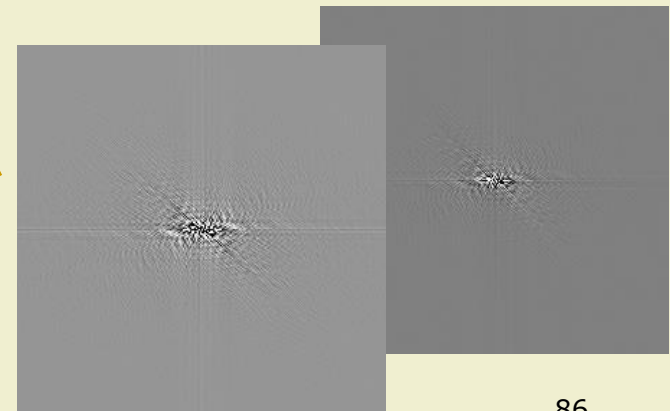
■ exemple



Module+phase

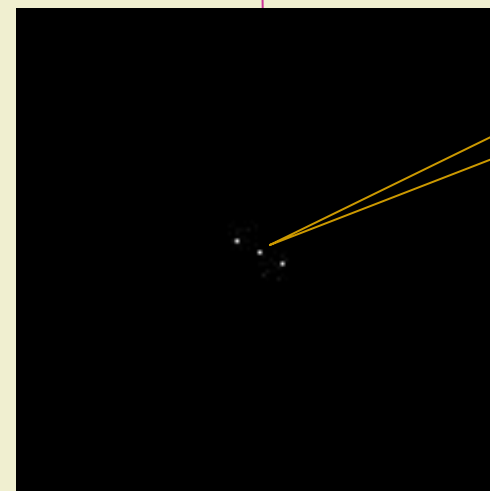
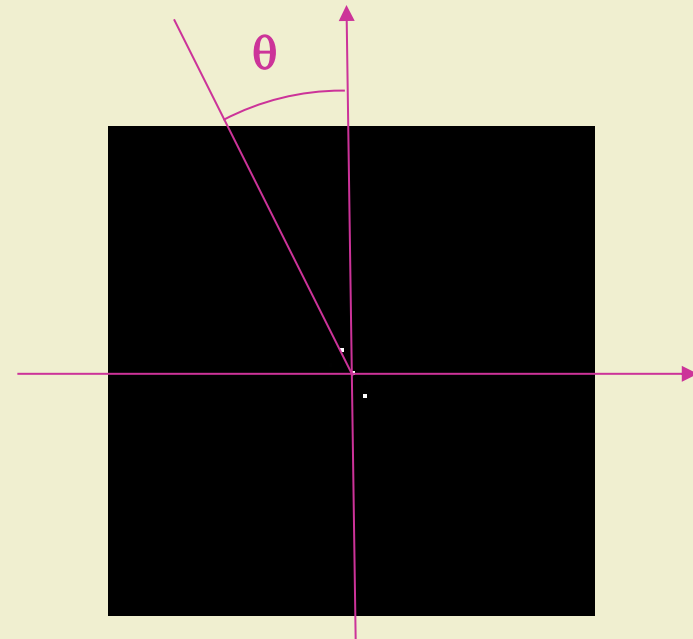
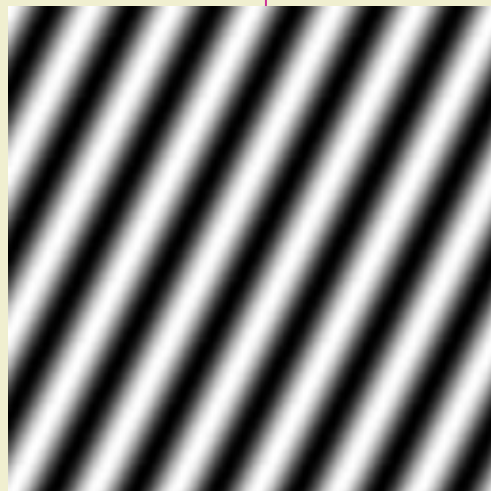
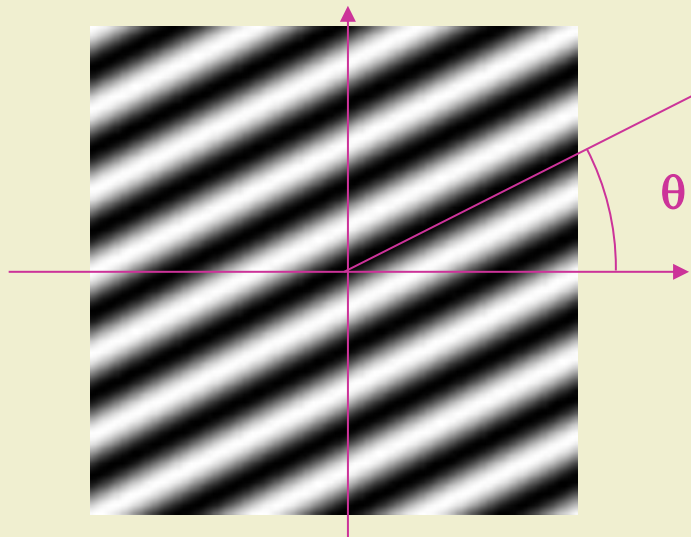


Partie réelle+partie imaginaire



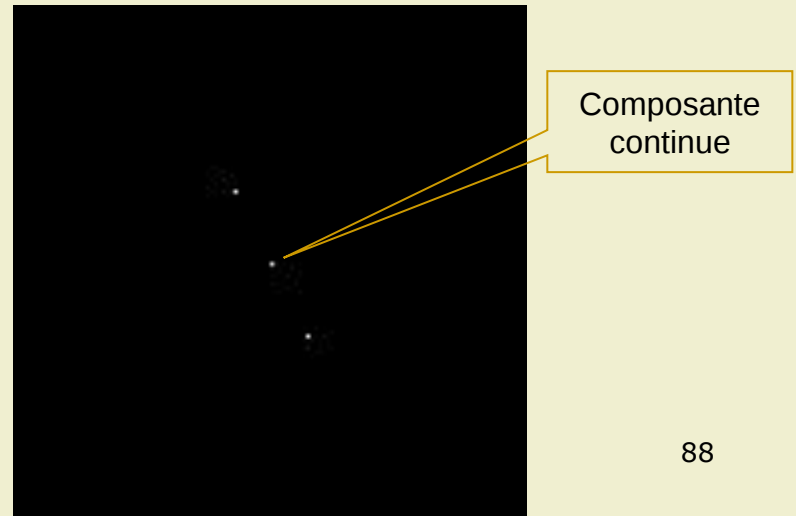
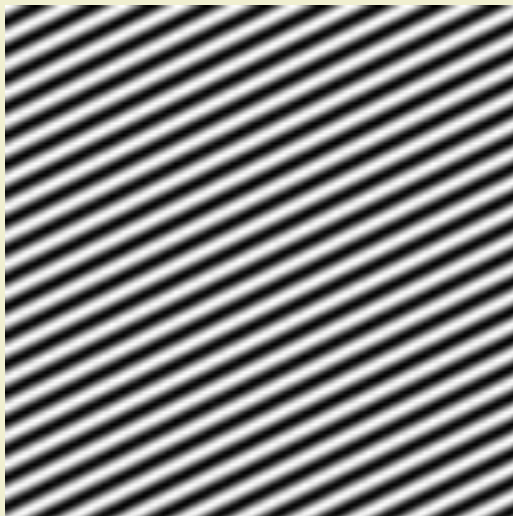
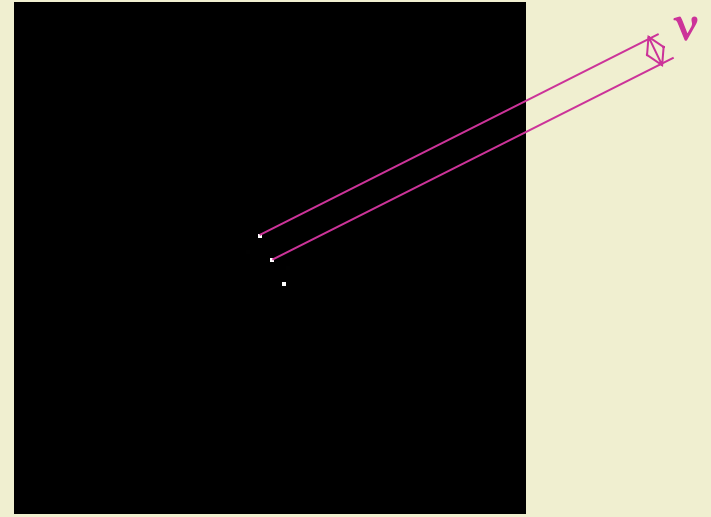
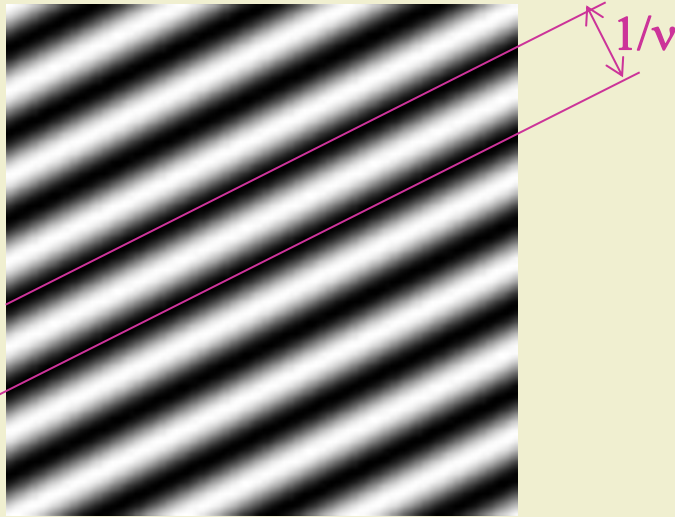
■ Interprétation

- Module : orientation

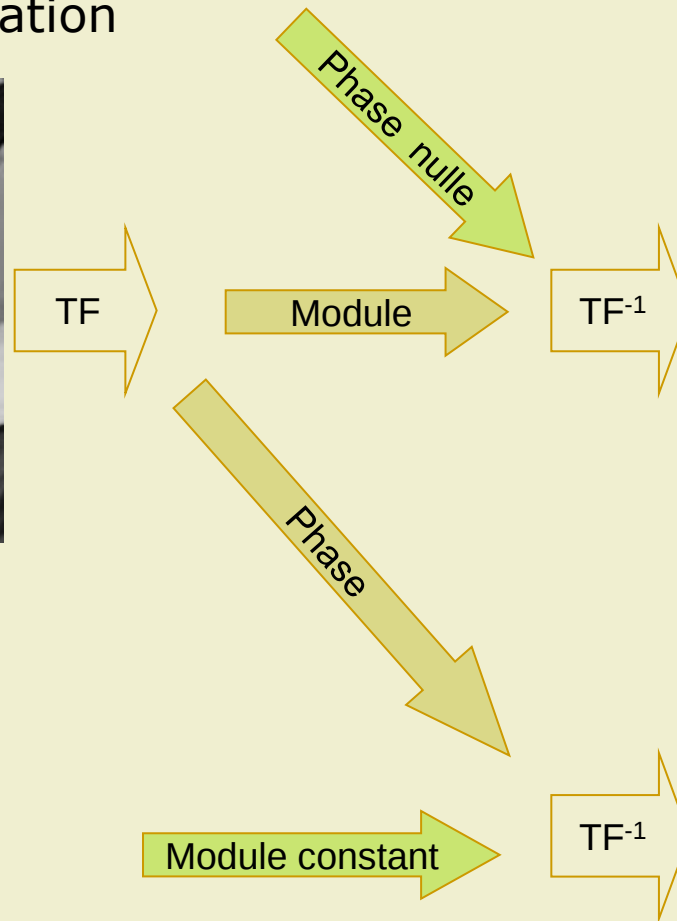
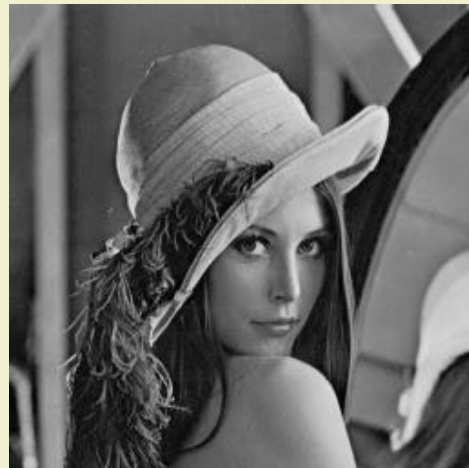


Composante
continue

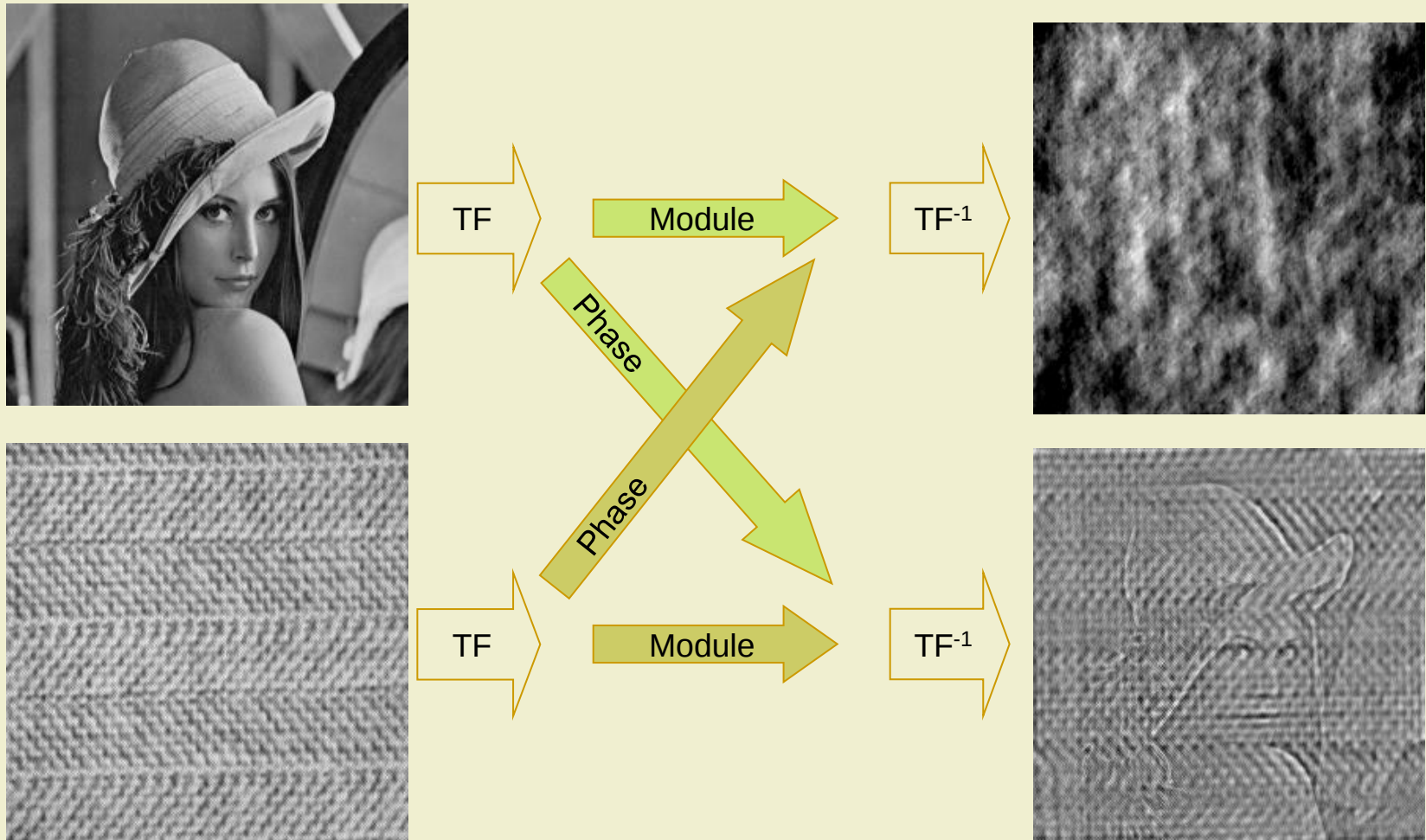
■ Module : fréquence



■ Phase : localisation



■ Phase : localisation



Exercices

Calculer à partir de la définition, les transformées de Fourier des signaux suivants :

1. $\Pi(t)$
2. $\Pi(\frac{t}{T})$
3. $e^{2\pi j f_0 t}$
4. $\delta(t)$
5. $\delta(t - T)$

Calculer les transformées de Fourier inverses des signaux suivants :

1. $\text{sinc}(f)$,
2. $\delta(f)$
3. $\delta(f - F)$
4. 1

Soit le signal $x(t) = t \cdot \Pi(\frac{t}{T} - 0.5)$

1. Tracer $x(t)$
2. Calculer sa transformée de Fourier $X(f)$ par la formule de transformée de Fourier (utiliser l'intégration par partie)
3. Tracer $x_1(t) = x'(t)$ et donner son expression analytique
4. Calculer la transformée de Fourier $X_1(f)$ de $x_1(t)$

Exercices

- Soit $X(f)$ (resp. $Y(f)$) la transformée de Fourier de $x(t)$ (resp $y(t)$)

Calculer les transformées de Fourier de :

- $a.x(t) + b.y(t)$

- $x(-t)$

- $x(at)$

- $x(t - t_0)$

- $X(t)$

- $x(t) * y(t)$

- $\frac{dx(t)}{dt}$

- $x(at + b)$

Exercices

Calculer la transformée de Fourier $X(f)$ de :

1. $x(t) = \Pi(t/T)$ en utilisant la formule du changement d'échelle
2. $x(t) = \Lambda(t/T)$ (signal triangulaire)
3. $x(t) = y(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t)$
4. $x(t) = y(t) \cdot \sin(2\pi f_0 t)$
5. $x(t) = e^{2\pi j f_1 t} + e^{2\pi j f_2 t}$

Des questions précédentes déduire les transformées de Fourier de :

1. $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$
2. $x(t) = \sin(2\pi f_0 t)$

Exercices

- Soit $X(f)$ la transformée de Fourier du signal $x(t)$. Donner l'expression de la transformée de Fourier de $x(2 - 5t)$
- L'entrée $x(t)$ et la sortie $y(t)$ d'un système linéaire et invariant sont liées par la relation :

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot z(t - \tau) d\tau - x(t)$$

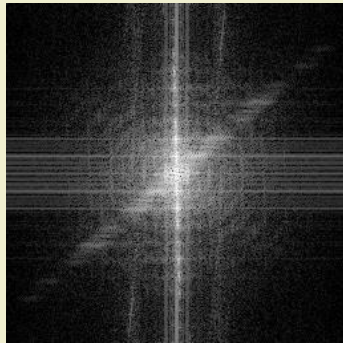
où $z(t) = e^{-t}u(t) + 3\delta(t)$

Trouver la réponse fréquentielle de ce système $H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)}$

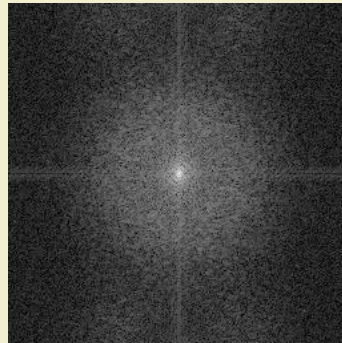
Exercices

- Les images a-d ci-dessous représentent le module du spectre de Fourier des différentes images e-h. Indiquer, dans chaque cas à quelle image il correspond (Justifier chaque réponse par les caractéristiques présentes dans l'image)

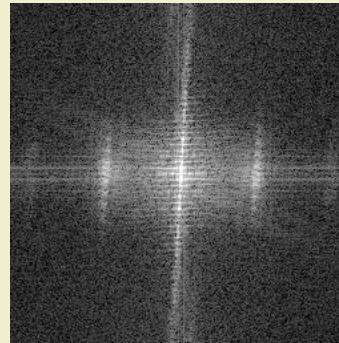
a)



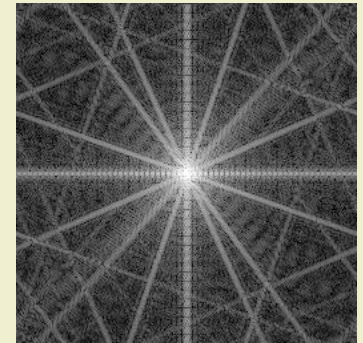
b)



c)



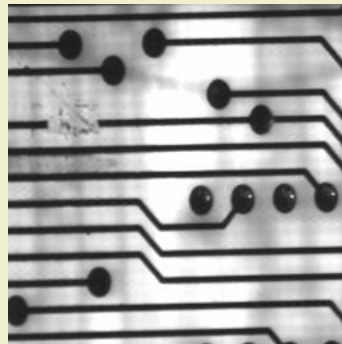
d)



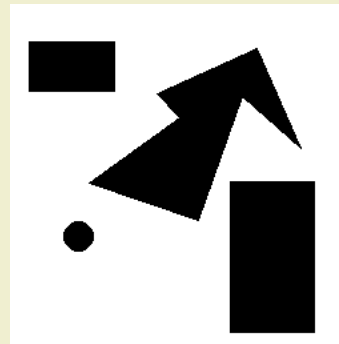
e)



f)



g)



h)

