

Analyse morphologique de maillages 3D : algorithme rapide pour le calcul de la somme de Minkowski de polyèdres convexes

BARKI Hichem DENIS Florence DUPONT Florent

Laboratoire LIRIS - UMR 5205 CNRS
Université Claude Bernard Lyon 1
43 boulevard du 11 Novembre 1918
69622 Villeurbanne Cedex, France

{Hichem.Barki, Florence.Denis, Florent.Dupont}@liris.cnrs.fr

Résumé

Nous présentons dans cet article un algorithme rapide et simple, pour le calcul de la somme de Minkowski de polyèdres convexes et fermés. Notre implantation est générale dans le sens où elle ne suppose aucune contrainte sur les positions ou sur les tailles des polyèdres opérands. Elle est plus rapide que les algorithmes basés sur l'enveloppe convexe, parce qu'elle ne traite que les sommets qui contribueront effectivement à la construction du polyèdre somme. De plus, cette méthode permettra à terme de traiter des polyèdres concaves afin de réaliser d'autres opérations de filtrage morphologique sur des maillages tridimensionnels.

Mots clefs

Morphologie mathématique, somme de Minkowski, maillage, filtrage, enveloppe convexe, construction incrémentale.

1 Introduction

La morphologie mathématique est un outil puissant pour l'analyse d'images, elle est basée sur la théorie des ensembles et a été développée pendant les années 60 à l'école des Mines de Paris par Serra [1]. Depuis, dans le domaine des images, elle a trouvé beaucoup d'applications telles que le filtrage d'images, la segmentation, la granulométrie, la squelettisation, etc. Néanmoins, cette théorie reste toujours peu ou mal exploitée dans le domaine des maillages tridimensionnels. Les solutions existantes ne sont que des solutions partielles ou non implantées.

La morphologie mathématique nous intéresse particulièrement dans le contexte du filtrage et de l'analyse des maillages, pour réduire ou éliminer le bruit, par des opérations d'érosion et de dilatation, boucher des trous, rechercher des caractéristiques particulières (opérations *hit-or-miss*), squelettiser ou segmenter des maillages. C'est dans ce cadre que nous proposons un

algorithme rapide et simple, pour le calcul de la somme de Minkowski de polyèdres convexes.

L'article est organisé comme suit : en section 2, nous présenterons un état de l'art des approches utilisées pour le calcul de la somme de Minkowski de deux polyèdres convexes ; en section 3, nous exposerons notre approche puis nous donnerons les résultats expérimentaux en section 4. Enfin, nous discuterons les perspectives à ces travaux.

2 État de l'art et définitions

La dilatation et l'érosion (opération duale) constituent les deux opérateurs de base des traitements morphologiques. La dilatation d'un objet A par un objet B est équivalente à la somme de Minkowski ou addition de ces deux objets. Elle a été définie par le mathématicien allemand Hermann Minkowski (1864-1909) comme une addition vectorielle des points de A avec les points de B :

$$A \oplus B = \{a + b / a \in A, b \in B\}$$

Cette somme peut être reformulée comme suit :

$$A \oplus B = \bigcup_{a \in A} \{a + b / b \in B\}$$

La deuxième définition correspond à un objet obtenu en prenant l'union de tous les translatsés de B suivant les points de A (voir figure 1).

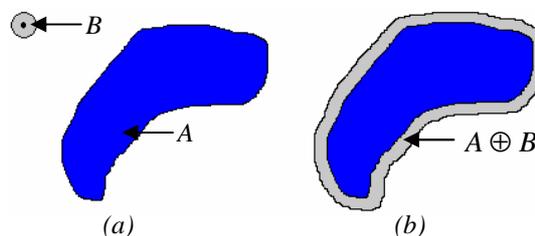


Figure 1 – Somme de Minkowski (dilatation) de deux objets A et B

La morphologie mathématique est principalement appliquée dans les espaces discrets (images ou objets volumiques voxelisés). Dans le cas des maillages, seule la

somme de Minkowski est utilisée, en particulier dans le domaine de la conception et la fabrication assistée par ordinateur [2], la planification de trajectoires sans collision de robots en translation [3], le calcul du degré de pénétration et la simulation dynamique [4], etc.

Les algorithmes utilisés pour le calcul de la somme de Minkowski de deux polyèdres se décomposent en deux grandes classes : ceux basés sur les enveloppes convexes, qui découlent de la définition même de la somme de Minkowski et ceux basés sur les diagrammes de pente [9].

2.1 Algorithmes basés sur l'enveloppe convexe

Un ensemble $S \subset \mathcal{R}^n$ est dit convexe si pour tout $X, Y \in S$, le segment de droite $(1-t)X + tY \in S$ pour $t \in [0,1]$. L'enveloppe convexe pour un ensemble S est la plus petite enveloppe convexe qui contient S . Elle est une région bornée par un polyèdre convexe, donc sa construction revient à identifier les points de S qui constituent les sommets du polyèdre convexe. La figure 2 illustre le concept d'enveloppe convexe.

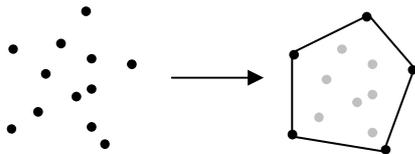


Figure 2 – Un ensemble de points en 2D à gauche, et son enveloppe convexe (polygone) à droite

Les algorithmes de calcul de la somme de Minkowski, basés sur le calcul de l'enveloppe convexe comportent les étapes suivantes :

- Addition vectorielle de tous les points de A avec tous les points de B pour construire un nuage de points (voir Figure 3).
- Calcul de l'enveloppe convexe du nuage de points et construction du polyèdre résultat.

Notons toutefois que ce traitement ne s'applique que dans le cas où A et B sont des polyèdres convexes ; dans le cas contraire, nous devons décomposer A et B en sous-polyèdres convexes, appliquer les deux étapes précédentes (addition vectorielle et calcul de l'enveloppe convexe) entre chaque paire de sous-objets de A et de B et enfin calculer l'union de toutes les sommes partielles.

La construction de l'enveloppe convexe engendre un grand coût de calcul puisqu'elle nécessite la distinction entre les points internes et ceux qui forment l'enveloppe convexe. Plusieurs algorithmes ont été développés pour le calcul de l'enveloppe convexe d'un ensemble de points ; un récapitulatif de ces algorithmes se trouve dans [5]. On

trouve par exemple : l'algorithme du papier cadeau, l'algorithme de Graham, la construction incrémentale, l'approche diviser pour régner, etc.

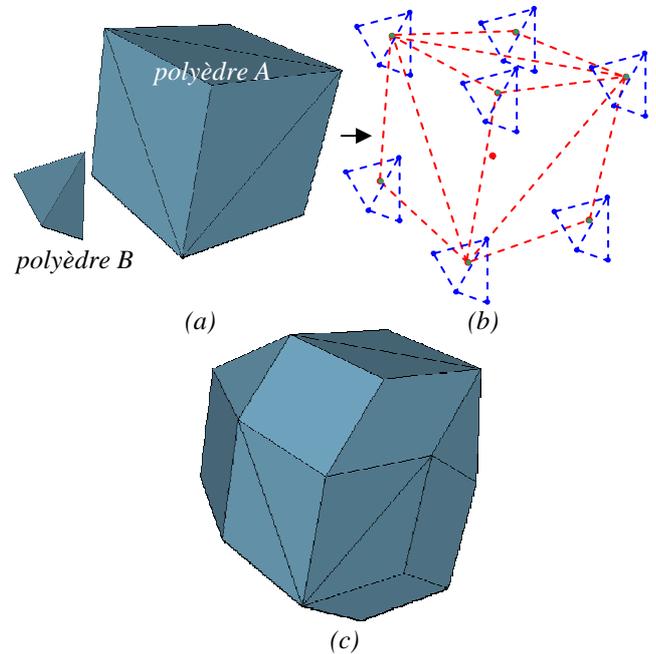


Figure 3 – Somme de Minkowski basée sur l'enveloppe convexe. (a) Polyèdres opérands A et B . (b) Addition vectorielle des points de A avec les points de B . (c) Polyèdre somme de Minkowski résultant.

L'approche diviser pour régner est la plus rapide pour la construction de l'enveloppe convexe, avec une complexité en $O(n \log n)$ pour un nuage de n points. Son implantation relativement complexe en limite son utilisation. L'algorithme du papier cadeau [6] est le plus coûteux avec une complexité en $O(n^2)$ pour un nuage de n points. En pratique, l'algorithme de construction incrémentale [7,8] est le plus simple et le plus basique, donc le plus couramment implanté malgré sa lenteur relative (complexité en $O(n^2)$ pour un nuage de n points).

2.2 Algorithmes basés sur les diagrammes de pente

Les diagrammes de pente ont été proposés par Ghosh [9], ils sont considérés comme une variété adaptée au domaine de l'infographie, de la représentation par fonctions de support [10]. Ils sont plus rapides que les algorithmes basés sur l'enveloppe convexe du fait que le problème est traité dans une dimension inférieure (2D dans le cas de polyèdres), mais leur implémentation est très difficile ; de plus, des problèmes de précision engendrés par la projection orthographique utilisée peuvent donner de faux résultats. Ils sont aussi limités aux ensembles convexes.

3 Approche proposée

Nous allons présenter dans cette section, notre contribution qui permet la construction rapide de la somme de Minkowski de deux polyèdres convexes, manifolds et fermés ; cette approche devra permettre à terme de traiter des polyèdres concaves et réaliser des opérations de filtrage de maillage dont la taille peut être réductible pour les autres approches.

3.1 Principe de l'approche

Par la suite, nous considérons un polyèdre convexe, fermé et manifold P , ayant f_P facettes, a_P arêtes et s_P sommets, ainsi qu'un élément structurant T ayant f_T facettes, a_T arêtes, s_T sommets et un centre c . L'élément structurant considéré est un tétraèdre, donc :

$$f_T = 4, a_T = 6, s_T = 4.$$

Le polyèdre somme de Minkowski S se composera de facettes provenant de P appelées *facettes translattées*, de facettes provenant de T nommées *facettes de coin* ainsi que de facettes appelées *facettes de côté*, ces dernières provenant de la somme de Minkowski de deux arêtes non parallèles de P et de T . Cette formulation est valable pour des opérandes convexes et en accord avec [11].

Puisqu'il s'agit d'une représentation par bords, on ne s'intéresse qu'à la surface extérieure qui délimite un volume d'objet.

Pour chaque facette $f_i (1 \leq i \leq f_P)$ de normale \vec{n}_i , on appelle sommet contributeur $s_{c,i}$, le sommet $s_j (1 \leq j \leq s_T)$ (de l'élément structurant placé sur la

facette) qui vérifie : $\langle s_j - c, \vec{n}_i \rangle = \max \langle s_k - c, \vec{n}_i \rangle, k \neq j$,

cela signifie que le sommet contributeur est celui qui, parmi tous les sommets de T , engendre la plus grande translation vers l'extérieur de la facette f_i . Les facettes translattées sont le résultat de la translation de chaque facette f_i par un vecteur $s_j - c$ défini à partir du sommet contributeur $s_{c,i}$ correspondant (voir figure 4).

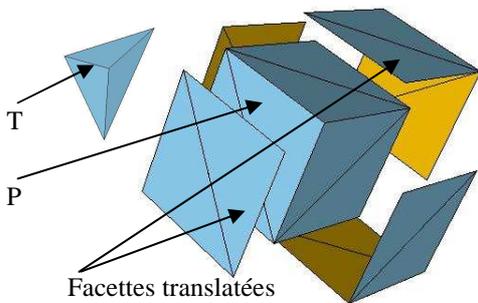


Figure 4 – Facettes translattées à partir d'un cube P

Pour deux facettes partageant une arête a_P , deux cas peuvent se présenter :

- Elles ont le même sommet contributeur : les facettes translattées correspondantes se retrouvent connectées par une arête dans le polyèdre somme (voir figure 5). Il n'y a donc pas de facette de côté à ajouter.
- Elles ont deux sommets contributeurs différents : une facette de côté vient se placer entre les deux facettes translattées correspondantes (voir figure 5).

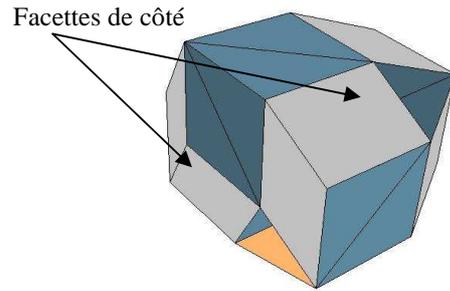


Figure 5 – Facettes de côté ajoutées dans le polyèdre somme S

Pour les facettes incidentes à un sommet s_P , trois cas peuvent se présenter :

- Elles ont le même sommet contributeur : toutes les facettes translattées correspondantes se partageront un même sommet dans le polyèdre somme (voir figure 6). Il n'y a donc pas de facette de coin à ajouter.
- Elles ont deux sommets contributeurs différents : les facettes translattées correspondantes seront incidentes à une même arête du polyèdre somme (voir figure 6). Il n'y a donc pas de facette de coin à ajouter.
- Elles ont trois sommets contributeurs différents : une facette de coin vient s'ajouter pour combler le vide entre les facettes translattées (voir figure 6).

Un cas particulier se présente lorsqu'il existe plusieurs sommets contributeurs pour une facette f_i (parallèle à une arête a_j ou à une facette f_j). Dans ce cas, le sommet contributeur est celui qui est le plus proche du barycentre de la facette, afin d'éviter des repliements de la surface du polyèdre somme S .

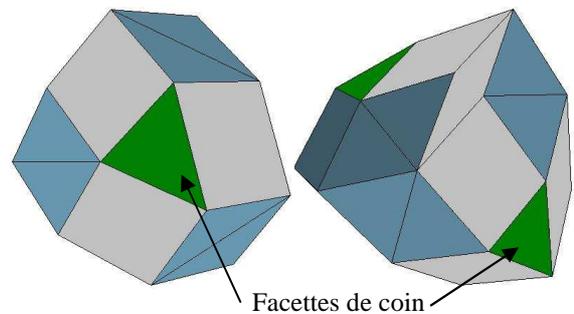


Figure 6 – Facettes de coin ajoutées dans le polyèdre somme S

Une version simplifiée de notre algorithme est présentée ci-dessous, elle se décompose en trois parties successives.

Algorithme1 : Somme de Minkowski d'un polyèdre P et d'un tétraèdre T

1. Pour chaque facette $f_i (1 \leq i \leq f_P)$
 - sommet contributeur $s'_{c,i} = s'_1$
 - Pour chaque sommet $s'_j (2 \leq j \leq s'_T)$
 - Si $\langle s'_j - c, n_i \rangle > \langle s'_{c,i} - c, n_i \rangle$ alors
 - $s'_{c,i} = s'_j$
 - Fin Si
 - Fin Pour
 - Ajouter une facette tradatée
 - Fin Pour
2. Pour chaque arête $a_i (1 \leq i \leq a_P)$
 - Si les facettes incidentes à a_i n'ont pas le même sommet contributeur, alors
 - Ajouter une facette de côté
 - Fin Si
 - Fin Pour
3. Pour chaque sommet $s_i (1 \leq i \leq s_P)$
 - Si les facettes incidentes à s_i ont trois sommets contributeurs, alors
 - Ajouter une facette de coin
 - Fin Si
 - Fin Pou

Notre méthode a été étendue à la somme de Minkowski de deux polyèdres convexes quelconques (élément structurant non tétraédrique). Dans ce cas, plusieurs facettes de coin peuvent être ajoutées pour un même sommet du polyèdre P et plusieurs facettes de côté pour une même arête du polyèdre P .

3.2 Complexité de l'algorithme

Dans le cas général (polyèdres opérands convexes quelconques), la complexité de l'algorithme est en :

$$O(f_P s'_T + s_P f'_T + a_P f'_T).$$

D'après la formule d'Euler (polyèdres manifolds et fermés) $f - a + s = 2$ et en substituant dans l'équation de complexité, le nombre d'arêtes et le nombre de sommets en fonction du nombre de facettes, la complexité de l'algorithme est en :

$$O(2(f_P + f'_T) + 5f_P f'_T / 2)$$

L'équation précédente implique que notre approche est commutative, ce qui est en accord avec la définition de la somme de Minkowski.

4 Résultats expérimentaux et discussion

Notre approche a été implantée sur un processeur Intel Pentium 4 de fréquence 3.00 GHZ, avec une mémoire vive de 1Go. Nous avons utilisé la librairie CGAL [12] pour développer notre algorithme et pour le calcul de l'enveloppe convexe. Le tableau 1 donne les temps d'exécution des deux approches pour plusieurs polyèdres opérands P et T .

Polyèdre P (# facettes)	Polyèdre T (# facettes)	Temps d'exécution (s.)	
		Approche proposée	Enveloppe convexe
RTIcosHe(62)	Tetra(4)	0.016	3.250
Sphere(1280)	Tetra(4)	0.344	19.440001
Hedra(8)	Sphere(320)	0.125	7.657
Hedra(8)	Sphere(1280)	0.563	36.844
Cube(6)	Sphere(320)	0.109	8.548
Cube(6)	Sphere(1280)	0.594	38.345
Sphere(80)	Sphere(320)	0.578	36.158
Sphere(320)	Sphere(1280)	7.063	687.099

Tableau 1 Temps d'exécution lors du calcul de la somme de Minkowski

La figure 8 montre des polyèdres somme de Minkowski obtenus à l'aide de notre méthode. La variation de la taille d'un polyèdre opérande par rapport à l'autre polyèdre opérande permet de réaliser du morphing grâce à la somme de Minkowski appliquée à ces polyèdres.

Le tableau 1 montre que notre algorithme est plus rapide que l'approche par enveloppe convexe. Ceci se justifie par le fait que seuls les sommets qui contribueront effectivement à la somme de Minkowski seront traités ; ainsi, le coût de mise à jour de l'enveloppe convexe (détermination des facettes visibles pour un sommet, suppression des facettes invisibles, construction de facettes temporaires à chaque introduction d'un nouveau sommet,...) est éliminé et la simplicité du traitement est accrue. De plus, notre approche préserve le degré des facettes, ce qui n'est pas le cas avec l'enveloppe convexe (figure 7).

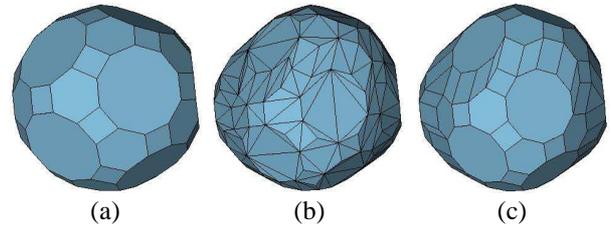


Figure 7 – (a) Polyèdre P . (b) Polyèdre somme par l'enveloppe convexe. (c) Polyèdre somme par l'approche proposée, le degré des facettes est préservé

Notre méthode est également générale dans le sens où elle ne suppose aucune contrainte sur les positions ou sur les tailles des deux polyèdres opérands.

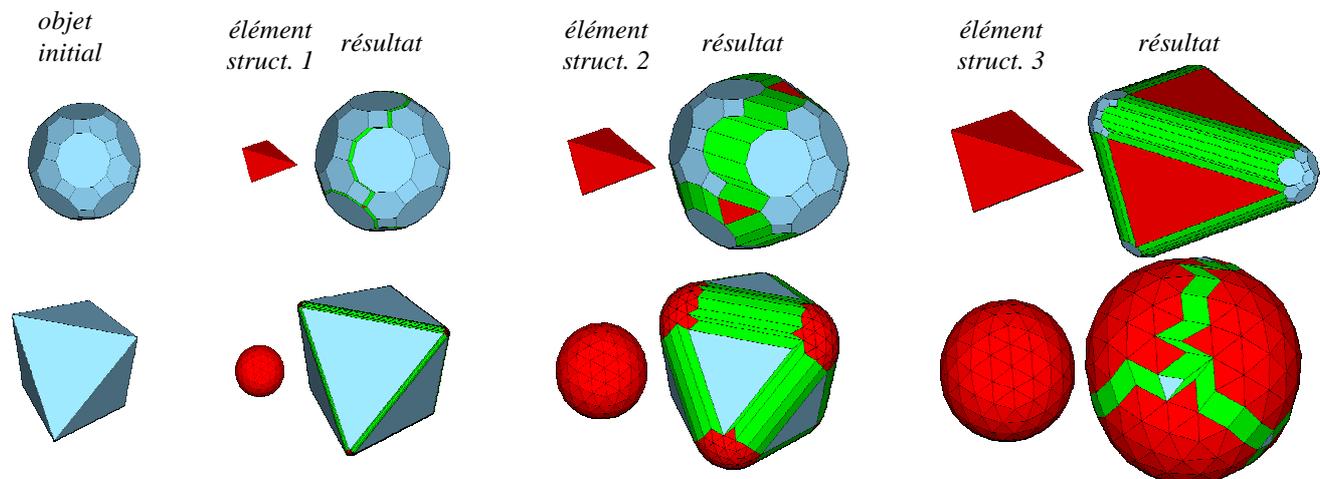


Figure 8 – Résultats obtenus avec l'approche proposée pour le calcul de la somme de Minkowski de polyèdres de différentes tailles (morphing).

5 Conclusion et perspectives

Nous avons présenté un nouvel algorithme à la fois rapide, simple à implanter et général pour la construction de la somme de Minkowski de polyèdres convexes. Les résultats obtenus montrent que notre approche est plus rapide que l'algorithme de l'enveloppe convexe. Notre méthode peut être utilisée pour des objets convexes ou pour accélérer le calcul de la somme de Minkowski d'objets concaves (voir section 2.1).

Les travaux en cours portent sur la généralisation de cet algorithme pour des objets concaves sans passer par une décomposition. Ceci ouvrira alors une nouvelle voie pour réaliser des opérations de filtrage de maillages de grande taille (dilatation, érosion, *hit-or-miss*, etc.).

6 Remerciements

Ce travail est partiellement soutenu par le cluster 2 de la région Rhône-Alpes dans le cadre du projet LIMA.

Références

[1] J. Serra. Image analysis and mathematical morphology. Vol. 1, Academic Press, London, 1982.
 [2] I.K. Lee, M.S. Kim, and G. Elber. Polynomial/rational approximation of Minkowski sum boundary curves. Graphical Models and Image Processing, Vol. 60, No. 2, 136–165, 1998.
 [3] T. Lozano-Pérez. Spatial planning: a configuration space approach. IEEE Transaction on Computers, Vol. C-32, No. 2, 108–120, 1983.

[4] Y. Kim, M. Otaduy, M. Lin, and D. Manocha. Fast penetration depth computation using rasterization hardware and hierarchical refinement. Workshop on Algorithmic Foundations of Robotics, 2002.
 [5] J. O'Rourke. Computational geometry in C, 2nd ed. Cambridge University Press, Cambridge, England, 1998.
 [6] D.R. Chand and S.S. Kapur. An algorithm for convex polytopes. Journal of ACM, Vol. 17, No. 1, 78–86, 1970.
 [7] R. Seidel. Output-size sensitive algorithms for constructive problems in computational geometry. Report TR 86–784, Ithaca, NY: Department of Computer Science, Cornell University, 1986.
 [8] M. Kallay. The complexity of incremental convex hull algorithm in \mathbb{R}^d . Information Processing Letters, Vol. 17, No. 4, 197, 1984.
 [9] P.K. Ghosh. A unified computational framework for Minkowski operations. Computers and Graphics, Vol. 17, No. 4, 357–378, 1993.
 [10] P.K. Ghosh and K.V. Kumar. Support function representation of convex bodies, its application in geometric computing, and some related representations. Computer Vision And Image Understanding, Vol. 72, No. 3, 379–403, 1998.
 [11] H. Bekker and J.B.T.M. Roerdink. An efficient algorithm to calculate the Minkowski sum of convex 3D polyhedra. Proceedings of the International Conference on Computational Sciences-Part I, Lecture Notes in Computer Science, Springer-Verlag, Vol. 2073, 619–628, 2001.
 [12] The CGAL project homepage. <http://www.cgal.org/>.