ECOLE DES MINES DE PARIS
Centre de Robotique

La méthode HEML :
Calcul de déformations de corps mous en simulation interactive de chirurgie

François Goulette
Centre de Robotique (CAOR), Mines ParisTech
Courriel : francois.goulette@mines-paristech.fr

GdR STIC-Santé
6 février 2009

SOMMAIRE

1) Introduction
2) La méthode « Hyper-Elastic Mass-Links »
3) Mise en œuvre pour différentes lois de comportement
4) Comparaisons et conclusions

Simulateurs de chirurgie virtuelle

Nombreux intérêts potentiels

- Pédagogique
- Pratique
- Éthique
- Économique

Besoin en calculs de déformations de corps mous interactifs et réalistes.

Réalisme

- Modèles physiques des déformations des matériaux
  - Mécanique des Milieux Continus (MMC)
- Grandes déformations et grands déplacements
  - Hyper-élasticité (hors plasticité)
- Lois de comportement et paramètres adaptés
  - Identification expérimentale

Interactivité – calcul numérique

- Modélisation dynamique
- Discrétisation spatiale
  - E.g. découpage en tétraèdres (éléments P1 des Eléments Finis)
- Intégration d'équations différentielles du 2e ordre
  - Pas de temps Δt_{sim}
- Rapide
  - La simulation doit tenir la fréquence de rafraîchissement graphique (30 Hz)
  - Soit : $\Delta t_{calc} < 33$ ms

Modèles existants (1/3)

- Famille « Masse-ressort »
  - Très rapide
  - Réalisme pauvre (pas de MMC)
- Equation dynamique :

En chaque nœud : $$m_i \ddot{x}_i + \gamma_i \dot{x}_i + \sum_i f_{ij} = f_{ext\_i}$$

Force élastique : $$f_{ij} = k_{ij} \times \left(\|x_i - x_j\| - \|x_i - x_j\|^0 \right) \times \frac{x_i - x_j}{\|x_i - x_j\|}$$

Modèles existants (2/3)

- Famille « Méthode des Eléments Finis »
  - Bon réalisme (MMC)
  - Coûteux en temps de calcul
  - Souvent utilisé avec approximations : élasticité linéaire, petites déformations, petits déplacements, solutions statiques
- Equation dynamique :

Sur l'ensemble du maillage : $\mathrm{M}\ddot{\mathrm{X}} + \gamma(\dot{\mathrm{X}}) + \mathrm{F}(\mathrm{X}) = F_{ext}$

Modèles existants (3/3)

- Le modèle Masse-Tenseur
  - Rapide et réaliste
  - Basé sur MEF, maillage tétraédrique (P1)
  - MMC… mais limité à une seule loi de comportement (Saint Venant – Kirchhoff)
- Equation dynamique

Sur l'ensemble du maillage : $\mathrm{M}\ddot{\mathrm{X}} + \gamma(\dot{\mathrm{X}}) + \mathrm{F}(\mathrm{U}) = F_{ext}$

écarts aux valeurs initiales

SOMMAIRE

2) La méthode HEML « Hyper-Elastic Mass Links »

- Méthode rapide pour le calcul du champ de forces élastiques
  - Valable pour un maillage tétraédrique (P1 MEF)
  - Matériau homogène isotrope
  - Non linéaire, grands déplacements et grandes déformations
- Générique
  - Toute loi de comportement de matériau hyper-élastique
  - Utilise la formulation énergétique W(C)

tenseur de Cauchy-Green

Formulation des équations dynamiques (1/3)

1) En disposant d'une formulation énergétique W(C), F s'écrit :

$$\mathrm{F}(\mathrm{X}) = \frac{\partial W}{\partial X}$$

Remarque : hypothèse large incluant tous les matériaux de type « hyper-élastique »
dont Néo-Hooke, Mooney-Rivlin, Saint Venant-Kirchhoff

Formulation des équations dynamiques (2/3)

2) Sous l'hypothèse P1 (maillage tétraédrique), l'énergie est décomposable par tétraèdre :

$$\mathrm{F}_i = \frac{\partial W}{\partial X_i} = \sum_{\mathrm{T}_j} \mathrm{F}_{i\_\mathrm{T}_j}$$

$$Avec : \mathrm{F}_{i\_\mathrm{T}_j} = \frac{\partial W_{T_j}}{\partial X_i}$$

3) Sous l'hypothèse P1, C ne dépend que des liaisons du tétraèdre :

$$C_j = C(L_{T_j}) \implies \mathrm{F}_{i\_\mathrm{T}_j} = \frac{\partial W_{T_j}}{\partial X_i}(L_{T_j})$$

Formulation des équations dynamiques (3/3)

Formulation du type Hyper-Elastic Mass-Links :

$$\begin{cases} M\ddot{X} + \gamma(\dot{X}) + \dfrac{\partial W}{\partial X}(L) = F_{ext} \\ \dfrac{\partial W}{\partial X_i} = \displaystyle\sum_{T_j(incidents)} \dfrac{\partial W_{T_j}}{\partial X_i}\left(L_{T_j}\right) \end{cases}$$

Expression analytique des forces à partir de l'énergie

Calcul des forces aux sommets de chaque tétraèdre :

$$F_{i\_T_j} = \frac{\partial W_{T_j}}{\partial X_i}\left(L_{T_j}\right)$$

Calcul analytique : dérivation composée

$$F_{i\_T_j} = V_{o\_T_j} \times \frac{\partial W}{\partial C}\left(L_{T_j}\right) \times \frac{\partial C_{T_j}}{\partial L}\left(L_{T_j}\right) \times \frac{\partial L}{\partial X_i}\left(L_{T_j}\right)$$

Avantages :
- Forme analytique simple des forces
- Très rapide à calculer

SOMMAIRE

a) Loi de Néo-Hooke (1/2)

Énergie Néo-Hookéenne (incompressible)

$$W = K_1 \times Tr(C)$$

Incompressibilité : adapté pour organes (eau)

Prise en compte compressibilité dans les calculs : terme additionnel

$$W = K_1 Tr(C) + K_3 \ln\left(\frac{V}{V_0}\right)$$

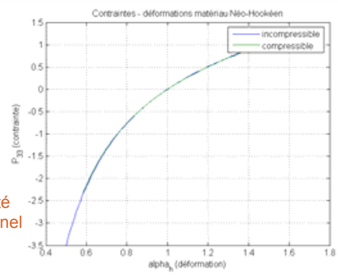


Diagramme contrainte-déformation

Néo-Hooke semi-compressible : Forces aux sommets (HEML)

Vecteur constant sur le tétraèdre

$$[F_1, F_2, F_3, F_4] = K_1 \times VTr_0 \times DLM(l_1, l_2, l_3)$$
$$+ K_3 \times \frac{V_0}{V} \times [\cdots, l_2 \wedge l_3, \cdots, \cdots]$$

Volume

Produit vectoriel des vecteurs arêtes (liaisons)

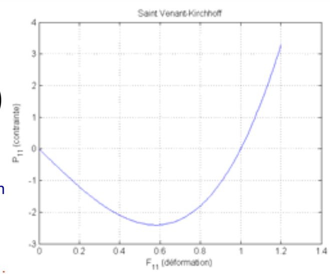
Démo saisie cube NH
Démo chute cube/rein

b) Saint Venant - Kirchhoff

Formulation énergétique :

$$W = \frac{\lambda}{2}(Tr(E))^2 + \mu Tr(E^2)$$

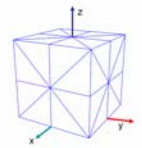
Diagramme contrainte-déformation

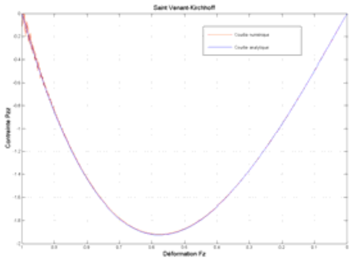


Forces aux sommets (HEML) :

$$[F_1, F_2, F_3, F_4] = \Delta L^T \times MW \times DLM(l_1, l_2, l_3)$$

Comparaison avec solution analytique





- Qualité calcul numérique
- Pertinence physique de la loi de comportement ?

Comparaison courbes contrainte-déformation analytique et numérique (cube unitaire)

Démo saisie cube STVK

c) Cas général – loi hyper-élastique

- La méthode s'adapte à TOUTE loi de comportement hyper-élastique isotrope
  - Mooney-Rivlin, Saint-Venant Kirchhoff, Fung and Demiray…
  - Formulation par les « Invariants principaux de C »

$$W = f(C_I, C_{II}, C_{III})$$

$$F_{i\_T_j} = \sum_{j \in \{I,II,III\}} \frac{\partial W}{\partial C_j}(L_{T_j}) \times \frac{\partial C_j}{\partial X_i}(L_{T_j})$$

[Gou06] MICCAI CBM

SOMMAIRE

1) Introduction
2) La méthode « Hyper-Elastic Mass-Links »
3) Mise en œuvre pour différentes lois de comportement
4) Comparaisons et conclusions

a) HEML vs. Masse-Tenseur

- Points communs
  - Formulation énergétique
  - Dérivation aux nœuds
- Méthodes de calcul numérique différentes
  - Masse-tenseur : utilise les déplacements de nœuds par rapport à position initiale
- Masse–tenseur limité à la seule loi de Saint Venant-Kircchoff

Comparaison du nombre d'opérations

Nombre exact d'opérations (+ x) effectuées par les deux algorithmes pour le calcul du champ de forces, pour différents maillages

	Reg. Cube1	Reg. Cube2	Irreg.Cube	Kidney	Uterus
Mass-Tensor	2 999	36 198	3 935	96 292	318 707
HEML	70	787	89	449	2 500
Gain ratio	43,0	46,0	44,3	214,3	127,5

b) HEML vs. Masse-Ressort

- Masse-Ressort : cas particulier « dégénéré » de HEML :
  - Formulation des forces (termes croisés des liaisons)
  - Matrice de masse diagonale

Masse-Ressort

$$\begin{cases} m_i \ddot{x}_i + \gamma_i \dot{x}_i + \sum_j f_{ij} = f_{ext\_i} \\ f_{ij} = k_{ij} \times \left(\|x_i - x_j\| - \|x_i - x_j\|^0 \right) \times \dfrac{x_i - x_j}{\|x_i - x_j\|} \end{cases}$$

HEML

$$\begin{cases} M\ddot{X} + \gamma(\dot{X}) + \dfrac{\partial W}{\partial X}(L) = F_{ext} \\ \dfrac{\partial W}{\partial X_i} = \sum_{T_j (incidents)} \dfrac{\partial W_{T_j}}{\partial X_i}(L_{T_j}) \end{cases}$$

c) Conclusion

Méthode de calcul du champ de forces qui ne dépend que des liaisons du maillage

- Prend en compte toute loi de comportement hyper-élastique
- Aboutit à une formulation des eq. diff. du type MEF avec une matrice de masse

Avantages :

- Gain de temps par rapport aux méthodes existantes,
- Généricité (non linéaire, hyper-élastique)

Perspectives

- Développements possibles
  - Anisotropie, plasticité
- Comparaisons avec codes de calcul MEF
  - Résultats statiques, dynamiques
  - Temps de calcul

Temps de calcul

	Reg. Cube1	Reg. Cube2	Irreg.Cube	Kidney	Uterus
Nodes	125	1000	151	829	4362
Tetrahedra	320	3645	407	2053	11445
Comp. time (ms)	0.25	3.5	0.34	2.1	20.0