Logique

Logique des propositions
Algèbre de Boole
Méthodes de simplification des fonctions booléennes

Objectifs

- Traiter formellement les notions de vérité et de fausseté
- Formaliser ce qu'on appelle le « raisonnement logique » ou la « déduction logique »

Exemple

- Tous les mardis je vais au cinéma
- Ce soir je vais au cinéma
- Quel jour sommes-nous ?

Une énigme policière

- Un meurtre a été commis au laboratoire, le corps se trouve dans la salle de conférences…
- On dispose des informations suivantes :
  - La secrétaire déclare qu'elle a vu l'ingénieur dans le couloir qui donne sur la salle de conférences
  - Le coup de feu a été tiré dans la salle de conférences, on l'a donc entendu de toutes les pièces voisines
  - L'ingénieur affirme n'avoir rien entendu
- On souhaite démontrer que si la secrétaire dit vrai, alors l'ingénieur ment

Logique des propositions : syntaxe

- On définit :
  - Les propositions : a, b, c, …
  - Les constantes : Vrai et Faux
  - Les connecteurs :
    - $\wedge$ (conjonction)
    - $\vee$ (disjonction)
    - $\neg$ (négation)
    - $\supset$ (implication)

Construction d'une formule

- Une proposition est une formule
- Si X et Y sont des formules,
  alors $\neg X$, $X \vee Y$, $X \wedge Y$, $X \supset Y$ sont des formules
- On utilise les parenthèses pour lever des ambiguïtés
- Exemples:
  - $a \wedge (c \vee \neg d)$
  - $(a \vee b) \supset \neg c$

Logique des propositions : sémantique

- Les formules sont interprétées dans {Vrai,Faux}
- On définit l'interprétation associée à chaque connecteur (conjonction, disjonction, implication, négation) grâce aux tables de vérité

Table de vérité de l'opérateur ET

X	Y	$X \wedge Y$
Vrai	Vrai	Vrai
Vrai	Faux	Faux
Faux	Vrai	Faux
Faux	Faux	Faux

Les deux doivent être vrais pour que le ET soit vrai

Table de vérité de l'opérateur OU

X	Y	X v Y
Vrai	Vrai	Vrai
Vrai	Faux	Vrai
Faux	Vrai	Vrai
Faux	Faux	Faux

Il suffit que l'un des deux soit vrai pour que le OU soit vrai

Table de vérité de l'opérateur NON

X	¬X
Vrai	Faux
Faux	Vrai

Table de vérité de l'opérateur implique

X	Y	$X \supset Y$
Vrai	Vrai	Vrai
Vrai	Faux	Faux
Faux	Vrai	Vrai
Faux	Faux	Vrai

$X \supset Y$ signifie que si X est vrai alors Y est vrai
Le faux implique n'importe quoi

Autre définition de l'implication

- On peut aussi définir l'implication en disant : $X \supset Y = \neg X \vee Y$
- On retrouve la même table de vérité :

X	Y	$\neg X$	$\neg X \vee Y$
Vrai	Vrai	Faux	Vrai
Vrai	Faux	Faux	Faux
Faux	Vrai	Vrai	Vrai
Faux	Faux	Vrai	Vrai

Définition de l'équivalence

- $X \Leftrightarrow Y = (X \supset Y) \wedge (Y \supset X)$
- X est une condition nécessaire et suffisante pour Y, et on dit X si et seulement si Y
- Y est une condition nécessaire et suffisante pour X, et on dit Y si et seulement si X

Conditions nécessaires et suffisantes

- Lorsqu'on écrit $X \supset Y$:
  - X est une condition suffisante de Y, et on dit X seulement si Y
  - Y est une condition nécessaire de X, et on dit Y si X
- Dérivable $\supset$ continue
  - Si une fonction est dérivable alors elle est continue
  - Mais une fonction continue n'est pas nécessairement dérivable
- Mardi $\supset$ cinéma – (Tous les mardis je vais au cinéma)
  - Si on est mardi, alors je vais au cinéma
  - Mais si je vais au cinéma, on n'est pas nécessairement mardi

Définition du OU-exclusif

- Le OU logique est dit *inclusif*.
- Le OU exclusif est celui du langage courant : fromage *ou* dessert.

X	Y	X OU-ex Y
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Le OU-ex est vrai si l'un des deux est vrai mais pas les deux en même temps
(c'est le contraire de l'équivalence)

Propriétés des formules

- Une formule est valide si elle est toujours vraie (quelque soit l'interprétation)
- Une formule est consistante s'il existe une interprétation dans laquelle elle est vraie. Elle est inconsistante dans le cas contraire

- Problème : étant donnée une formule,
  est-elle valide ? consistante ?

- Exemple : que dire de la formule $(a \supset b) \supset (\neg b \supset \neg a)$?

Dressons la table de vérité

Que dire de la formule $(a \supset b) \supset (\neg b \supset \neg a)$?

a	b	$a \supset b$	$\neg b$	$\neg a$	$\neg b \supset \neg a$	$(a \supset b) \supset (\neg b \supset \neg a)$
V	V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V

Conclusion

Que dire de la formule $(a \supset b) \supset (\neg b \supset \neg a)$?

- Quelles que soient les valeurs de a et b, cette formule est toujours vraie. Elle est donc valide.
- On peut montrer également que $(\neg a \supset \neg b) \supset (b \supset a)$
- C'est la contraposée des mathématiques

Règles de transformation (1)

- Toutes les formules qui suivent sont valides. Elles sont utiles pour simplifier des formules. Elles peuvent se démontrer en établissant leurs tables de vérité.

- $X \vee \neg X = V$ (tiers exclu)
- $X \wedge \neg X = F$ (contradiction)
- $\neg\neg X = X$ (involution)
- $X \vee X = X \wedge X = X$ (idempotence)

Règles de transformation (2)

- $\neg V = F$, $\neg F = V$

- $F \wedge X = F$, $V \wedge X = X$, $F \vee X = X$, $V \vee X = V$
  - Faux est élément neutre pour le OU et absorbant pour le ET
  - Vrai est élément neutre pour le ET et absorbant pour le OU

- $X \wedge (X \vee Y) = X$, $X \vee (X \wedge Y) = X$ (absorption)
- $X \vee (\neg X \wedge Y) = (X \vee \neg X) \wedge (X \vee Y) = X \vee Y$
- $X \supset Y = \neg X \vee Y$

Règles de transformation (3)

- Lois de De Morgan :
  - $\neg(X \vee Y) = \neg X \wedge \neg Y$
  - $\neg(X \wedge Y) = \neg X \vee \neg Y$
- $((X \supset Y) \wedge X) \supset Y$ (modus ponens)
- $((X \supset Y) \wedge \neg Y) \supset \neg X$ (modus tollens)
- $(X \supset Y) = (\neg Y \supset \neg X)$ (contraposition)

Règles de transformation (4)

- Commutativité et associativité de $\vee$ et $\wedge$
  - $X \vee Y = Y \vee X$, $X \wedge Y = Y \wedge X$
  - $X \vee (Y \vee Z) = (X \vee Y) \vee Z = X \vee Y \vee Z$
  - $X \wedge (Y \wedge Z) = (X \wedge Y) \wedge Z = X \wedge Y \wedge Z$
- Distributivité de $\vee$ par rapport à $\wedge$ et de $\wedge$ par rapport à $\vee$
  - $X \vee (Y \wedge Z) = (X \vee Y) \wedge (X \vee Z)$, $X \wedge (Y \vee Z) = (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z)$
- Transitivité de $\supset$
  - $((X \supset Y) \wedge (Y \supset Z)) \supset (X \supset Z)$

Règles de transformation (5)

- $F \supset X = V$ avec $F \supset X = \neg F \vee X = V \vee X$
- $V \supset X = X$ avec $V \supset X = \neg V \vee X = F \vee X$
- $X \supset F = \neg X$ avec $X \supset F = \neg X \vee F$
- $X \supset V = V$ avec $X \supset V = \neg X \vee V$

Exemple d'application des règles de transformation

- $\neg(p \supset q)$
  $= \neg(\neg p \vee q)$
  $= \neg\neg p \wedge \neg q$
  $= p \wedge \neg q$

Retour sur l'énigme policière

- Un meurtre a été commis au laboratoire, le corps se trouve dans la salle de conférences…
- On dispose des informations suivantes :
  - La secrétaire déclare qu'elle a vu l'ingénieur dans le couloir qui donne sur la salle de conférences
  - Le coup de feu a été tiré dans la salle de conférences, on l'a donc entendu de toutes les pièces voisines
  - L'ingénieur affirme n'avoir rien entendu
- On souhaite démontrer que si la secrétaire dit vrai, alors l'ingénieur ment

Formalisation en calcul des propositions

- On dispose des informations suivantes :
  - La secrétaire déclare qu'elle a vu l'ingénieur dans le couloir qui donne sur la salle de conférences
  - Le coup de feu a été tiré dans la salle de conférences, on l'a donc entendu de toutes les pièces voisines
  - L'ingénieur affirme n'avoir rien entendu
- On souhaite démontrer que si la secrétaire dit vrai, alors l'ingénieur ment

- p : la secrétaire dit vrai
- q : l'ingénieur était dans le couloir au moment du crime
- r : l'ingénieur était dans une pièce voisine de la salle de conférences
- s : l'ingénieur a entendu le coup de feu
- t : l'ingénieur dit vrai

Résolution de l'énigme

La secrétaire déclare qu'elle a vu l'ingénieur dans le couloir qui donne sur la salle de conférences : $p \supset q$ et $q \supset r$

Le coup de feu a été tiré dans la salle de conférences, on l'a donc entendu de toutes les pièces voisines : $r \supset s$

L'ingénieur affirme n'avoir rien entendu : $t \supset \neg s$

On souhaite démontrer que si la secrétaire dit vrai, alors l'ingénieur ment : $(p \supset \neg t)$

p : la secrétaire dit vrai

q : l'ingénieur était dans le couloir au moment du crime

r : l'ingénieur était dans une pièce voisine de la salle de conférences

s : l'ingénieur a entendu le coup de feu

t : l'ingénieur dit vrai

Il s'agit de prouver la validité de la formule :

$$(p \supset q \land q \supset r \land r \supset s \land t \supset \neg s) \supset (p \supset \neg t)$$

Démonstration

$$(p \supset q \land q \supset r \land r \supset s \land t \supset \neg s) \supset (p \supset \neg t)$$

- Rappel : $X \supset Y$ est faux si X vrai et Y faux (table de vérité)
- Ainsi la formule ne peut être fausse que si
  - $(p \supset \neg t)$ est faux, soit p et t vrais (avec $p \supset \neg t = \neg P \lor \neg t = \neg (P \land t)$)
  - la prémisse est vraie, soit toutes les implications vraies

Démonstration

$(p \supset q \wedge q \supset r \wedge r \supset s \wedge t \supset \neg s) \supset (p \supset \neg t)$

- Ainsi la formule ne peut être fausse que si
  - p et t vrais : la secrétaire et l'ingénieur disent vrai
  - toutes les implications vraies :
    - $t \supset \neg s$: Comme t doit être vrai (l'ingénieur dit vrai), s doit être faux (l'ingénieur n'a pas entendu le coup de feu),
    - $q \supset r$: donc r faux (l'ingénieur n'était pas dans une pièce voisine de la salle de conférences), donc q faux (l'ingénieur n'était pas dans le couloir au moment du crime)
    - $p \supset q$: donc p faux (la secrétaire ne dit pas vrai)
- il y a contradiction !!!

29

Applications de la logique en informatique

- En algorithmique : nier des conditions, spécifier des invariants, des pré-conditions et des post-conditions
- En architecture : réalisation de toute fonction de traitement de code binaire à partir des seules portes logiques binaires OU, ET, NON (électronique numérique)
- En base de données : interprétation logique des BD, logique pour l'interrogation des BD, expression des contraintes d'intégrité, BD déductives
- En Intelligence Artificielle : représentation des connaissances, systèmes experts

30

Algèbre de Boole

- En informatique, on utilise plutôt 1 (tension haute) à la place de Vrai, et 0 (tension basse) à la place de Faux

A	B	¬A	A∧B	A∨B
1	1	0	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	0

Les connecteurs en Algèbre de Boole

- On obtient les relations suivantes :
  - $\neg X = 1 - X$ qu'on notera $\overline{X}$
  - $X \wedge Y = X.Y$
  - $X \vee Y = \min(X+Y, 1)$ qu'on notera $X+Y$
- On remplace $X \supset Y$ par $\neg X \vee Y$, soit $\overline{X}+Y$

Ecriture des règles de transformation en algèbre de Boole (1)

- $X+\overline{X}=1$, $X.\overline{X}=0$ (tiers exclu, contradiction)
- $\overline{\overline{X}}=X$,$X+X=X$, $X.X=X$ (involution, idempotence)
- $\overline{0}=1$, $\overline{1}=0$
- $X+0=X$, $X.0=0$, $X+1=1$, $X.1=X$ (éléments neutres et absorbants)
- $X.(X+Y)=X$, $X+X.Y=X$ (absorption)
- $X+\overline{X}.Y=X+Y$
- $\overline{X+Y}=\overline{X}.\overline{Y}$, $\overline{X.Y}=\overline{X}+\overline{Y}$ (De Morgan)

Ecriture des règles de transformation en algèbre de Boole (2)

- $X+Y=Y+X$, $X.Y=Y.X$ (commutativité)

- $X+(Y+Z)=(X+Y)+Z=X+Y+Z$ (associativité)
- $X.(Y.Z)=(X.Y).Z=X.Y.Z$ (associativité)

- $X.(Y+Z)=X.Y+X.Z$ (distributivité)
- $X+Y.Z=(X+Y).(X+Z)$ (distributivité)

  $= X.X + X.Z + Y.X + Y.Z = X + Y.Z + X.(Z+Y)$

Fonctions booléennes

- En algèbre de boole, on parle de fonctions booléennes plutôt que de formules.
- Exemple : $F = a(b+\overline{c})+bc\overline{a}$
- On peut aussi définir une fonction booléenne à partir de sa table de vérité

Exemple : une fonction « majorité »

a	b	c	M
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$$M = \overline{a}bc+a\overline{b}c+ab\overline{c}+abc$$

Pourquoi simplifier une fonction booléenne ?

- Pour dresser plus facilement sa table de vérité afin de :
  - Déterminer la validité de la fonction
  - La comparer avec une autre fonction

- Pour concevoir un circuit intégré réalisant la fonction avec le moins de portes logiques possible

Exemple à l'aide des règles de l'algèbre de Boole

- Reprenons la fonction « majorité »
- $M = \overline{a}bc+a\overline{b}c+ab\overline{c}+abc$
  $= bc(\overline{a}+a)+a(\overline{b}c+b\overline{c})$
  $= bc+a(\overline{b}c+b\overline{c})$

Deuxième exemple

- $F = abc + a(b\bar{c} + \bar{b}c)$
  $= abc + ab\bar{c} + a\bar{b}c$
  $= ab(c + \bar{c}) + a\bar{b}c$
  $= ab + a\bar{b}c$
  $= a(b + \bar{b}c)$
  $= a(b + c)$

- Peut-on trouver plus simple ?

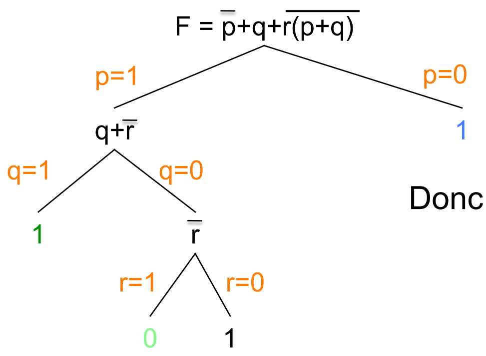
Méthodes de simplification des fonctions booléennes

- Deux méthodes permettent de simplifier plus efficacement des fonctions compliquées que la seule application des règles de l'algèbre de Boole.
- Les diagrammes de Quine
- Les tables de Karnaugh

Méthode des diagrammes de Quine

- Principe :
  - On choisit une des variables qui interviennent le plus souvent dans la fonction booléenne à simplifier
  - On considère le cas où elle vaut 0 et le cas où elle vaut 1
  - On simplifie les deux expressions obtenues
  - On itère le processus sur les deux expressions simplifiées

Exemple – Diagramme de Quine



Donc $F = pq + p\bar{q}\bar{r} + \bar{p}$

Utilisation des diagrammes de Quine

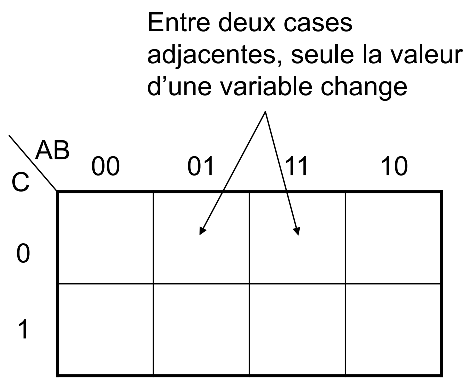
- Les diagrammes de Quine permettent de mettre une fonction booléenne sous la forme d'une somme de produits

- Ils permettent aussi de vérifier la validité d'une expression booléenne :
  toutes les feuilles sont-elles égales à 1 ?

Méthode des tables de Karnaugh

- La fonction doit être en premier lieu exprimée comme une somme de produits.
  - Pour ce faire, on utilise les règles de l'algèbre de Boole ou les diagrammes de Quine.
- On dresse ensuite une table de Karnaugh, qui est une table de vérité à deux dimensions. Sur chaque dimension on peut représenter les valeurs possibles de deux variables.

Table de Karnaugh à 3 variables



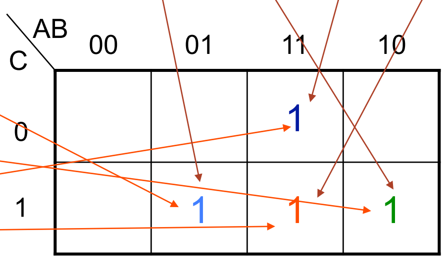
Remplir la table de Karnaugh

- On met 1 dans une case de la table si la fonction est vraie pour les valeurs des variables correspondant à cette case
- On procède à des regroupements de 1 adjacents
- On cherche à effectuer les groupements les plus grands afin de simplifier au maximum
- Les regroupements sont des rectangles de 2^n termes

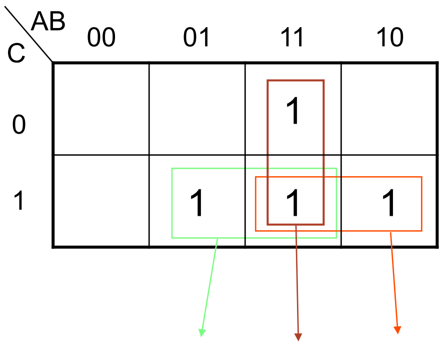
Retour sur la fonction « majorité »
1. Remplir la table

a	b	c	M
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$$M = \bar{a}bc + a\bar{b}c + ab\bar{c} + abc$$



Retour sur la fonction « majorité »
2. Simplifier



Donc F= BC + AB + AC

C'est plus simple que ce qu'on avait trouvé
avec les règles de l'algèbre de Boole

Table de Karnaugh à 4 variables

DC \ BA	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

Exemples de simplification sur des tables de Karnaugh à 4 variables (1)

DC \ BA	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	0	1	1	0
11	0	1	1	0
10	0	1	1	0

$S = A$

DC \ BA	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	0	0	0	0
11	0	0	0	0
10	1	1	1	1

$S = \overline{C}$

DC \ BA	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	0	0	0
11	0	0	1	1
10	0	0	1	1

$S = DB$

Ici les deux lignes sont bien adjacentes

Exemples de simplification sur des tables de Karnaugh à 4 variables (2)

DC \ BA	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	1	0	0	1
11	1	0	0	1
10	0	0	0	0

$S = C\bar{A}$

DC \ BA	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	0	0	0
11	0	0	0	0
10	1	0	0	1

$S = \bar{C}\bar{A}$

DC \ BA	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	1	1	0
11	0	1	1	0
10	0	0	0	0

$S = CA$

Et pour 5 variables ?

DC \ BA	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

E= 0

DC \ BA	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

E= 1