Synthèse d'images

Outils mathématiques de base

Florence Zara (semestre automne)

LIRIS, équipe ORIGAMI
Université Lyon 1

Outils mathématiques

Contexte : besoin mathématiques pour la synthèse d'images
- Pour décrire la scène
  - Définition d'un système de coordonnées
- Pour faire des transformations géométriques
  - Projection et transformation

Bases pour la géométrie
- Points
- Vecteurs
- Lignes
- Sphères

Matrices et transformations géométriques

Outils mathématiques

Contexte : besoin mathématiques pour la synthèse d'images

- Pour décrire la scène
  - Définition d'un système de coordonnées

- Pour faire des transformations géométriques
  - Projection et transformation

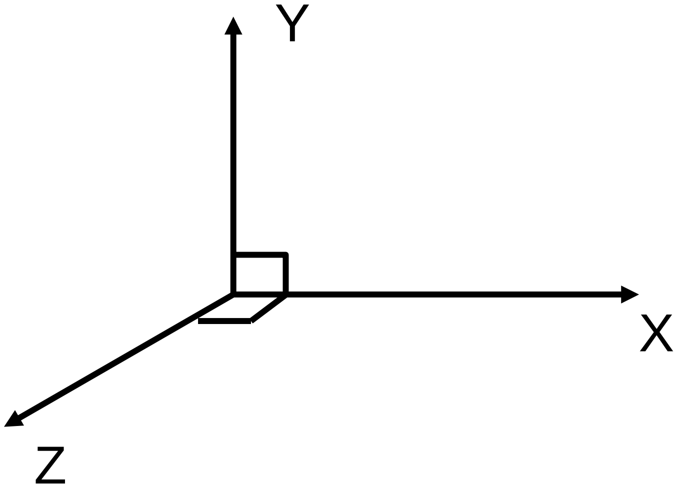
Bases pour la géométrie

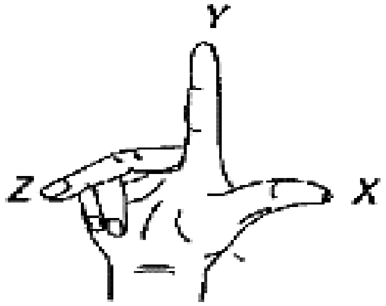
- Points
- Vecteurs
- Lignes
- Sphères

Matrices et transformations géométriques

Description de la scène

Définition d'un système de coordonnées

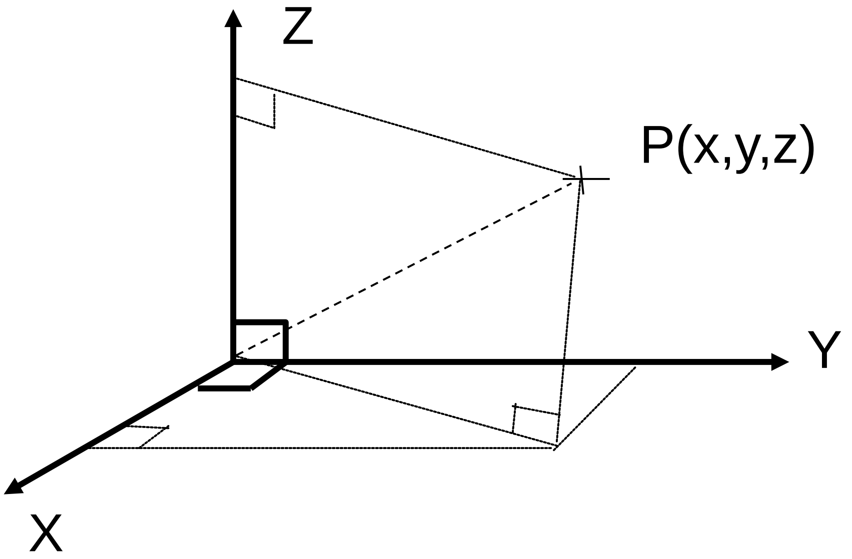




Right-Handed System
(système ortho-normé)

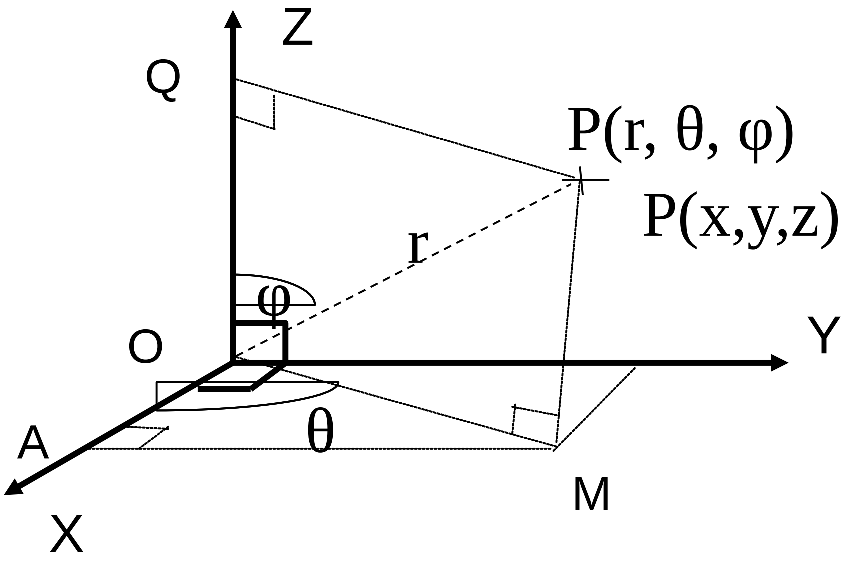
Points

P (x, y, z) : donne une **position** relative à l'origine dans notre système de coordonnées



Points

P(r,θ,φ) : donne la position en coordonnées polaires



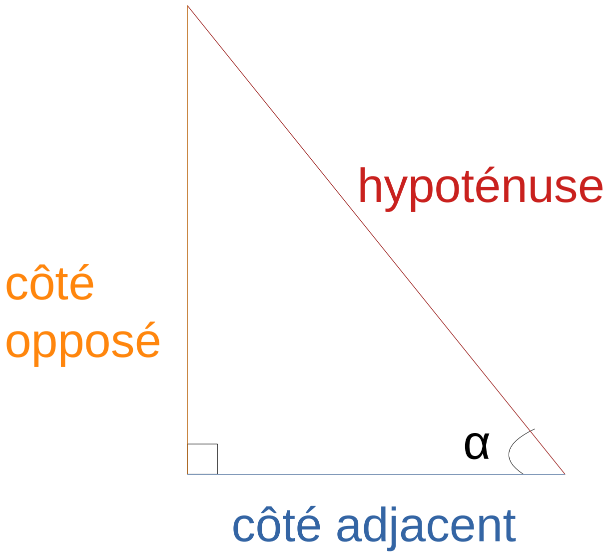
Exercice

x = ?

y = ?

z = ?

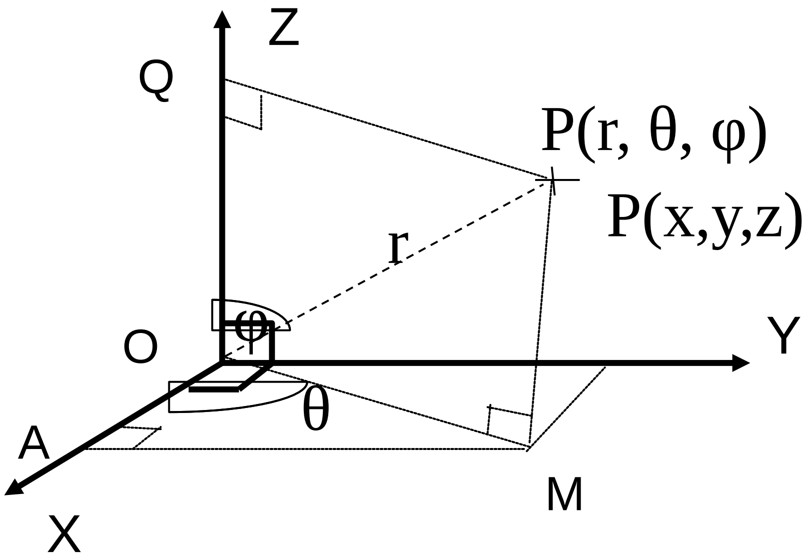
Points – petit rappel sur les angles



cos(α) = coté adjacent / hypoténuse

sinus(α) = coté opposé / hypoténuse

Points - solution



- On connaît le point P(r,θ,φ)

- <u>Triangle QOP est rectangle en Q</u>
  - cos φ = z/OP = z/r => z = r cos φ
  - sin φ = QP/r => QP = r sin φ

- <u>Triangle OAM est rectangle en A</u>
  - cos θ = OA/OM = x/OM => x = OM cos θ = QP cos θ
    => x = r sin φ cos θ
  - sin θ = AM/OM = y/OM => y = OM sin θ = QP sin θ
    => y = r sin φ sin θ

Vecteurs

$\overrightarrow{V}$ (x, y, z) : donne une **direction** dans l'espace 3D

Points != Vecteurs

- *Point – Point = ?*
- *Vecteur + Vecteur = ?*
- *Point + Vecteur = ?*
- *Point + Point = ?*

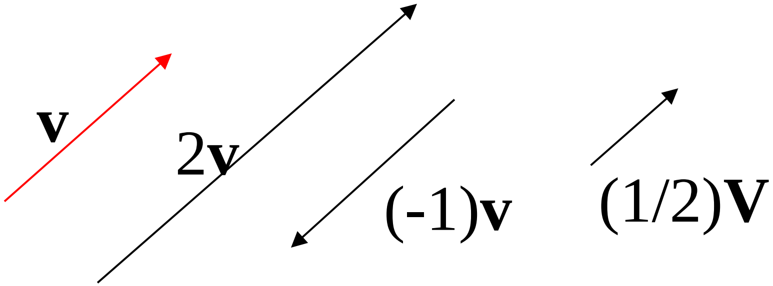
Vecteurs - solution

$\overrightarrow{V}$ (x, y, z) : donne une **direction** dans l'espace 3D

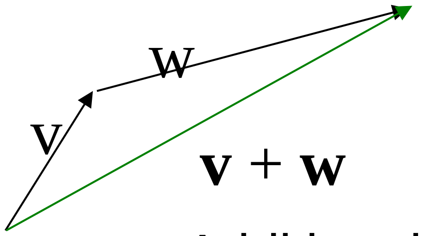
Points != Vecteurs

- *Point – Point = Vecteur ($\overrightarrow{AB}$ = **AB** = B - A)*
- *Vecteur + Vecteur = Vecteur*
- *Point + Vecteur = Point (translation du point)*
- *Point + Point = rien !*

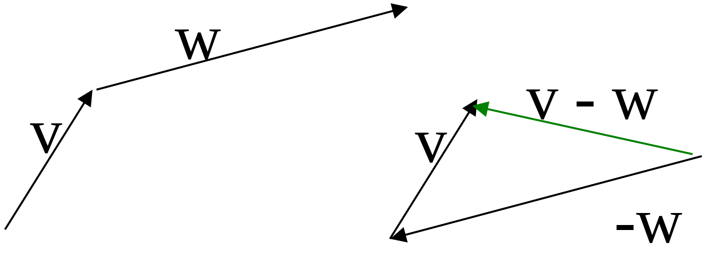
Vecteurs



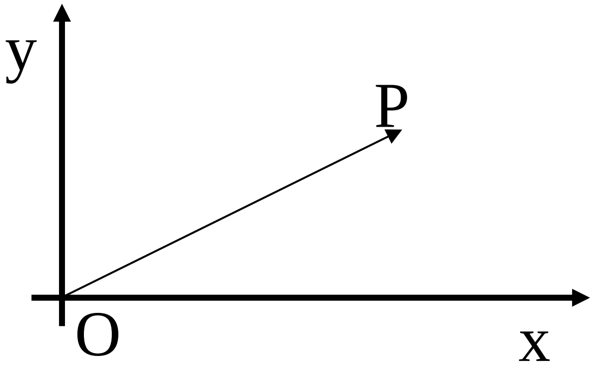
Multiplication par un scalaire
vecteurs restent //



Addition de vecteurs
v + w



Difference de vecteurs
v - **w** = **v** + (-**w**)



Vecteur **OP** = P - O

Vecteurs

Longueur (norme) d'un vecteur **V** (x, y, z) : ||**v**|| = $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Vecteur unitaire : **u** = **u** / (norme de **u**)

Produit scalaire (*Dot Product*)

a · **b** = ||**a**|| ||**b**|| cos α d'où cos α = **a** · **b** / ||**a**|| ||**b**||

a · **b** = $x_a * x_b + y_a * y_b + z_a * z_b$

Le produit scalaire est un scalaire

- Si on considère les vecteurs unitaires du repère ?

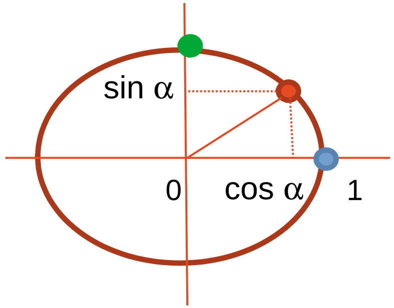
Vecteurs - Solution

- Si on considère les vecteurs unitaires du repère ?
  - Le produit scalaire de deux vecteurs perpendiculaires est nul

    => **i** . **j** = **j** . **k** = **k** . **i** = 0 (car cosinus est nul)

  - Le produit scalaire du même vecteur vaut 1

    => **i** . **i** = **j** . **j** = **k** . **k** = 1 (car cosinus vaut 1)



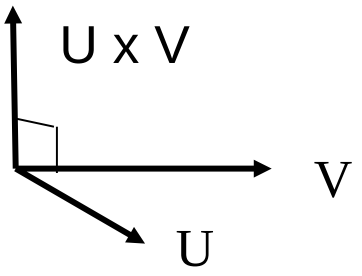
α varie de 0 à 2π

cos π/2 = 0, sin π/2 = 1
cos 0 = 1, sin 0 = 1

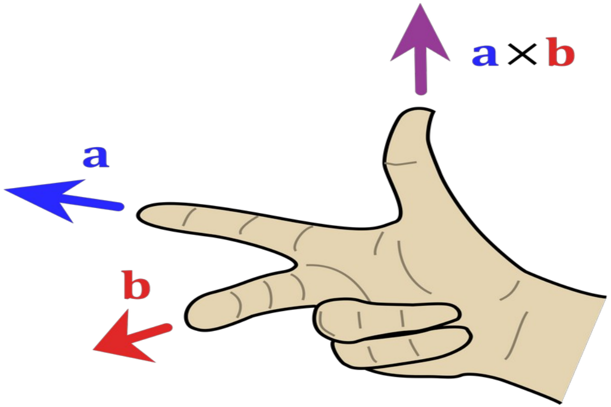
Produit vectoriel (*Cross Product*)

- Produit vectoriel = vecteur normal au 2 vecteurs

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yc - zb \\ za - xc \\ xb - ya \end{pmatrix}$$



Le produit vectoriel est un vecteur

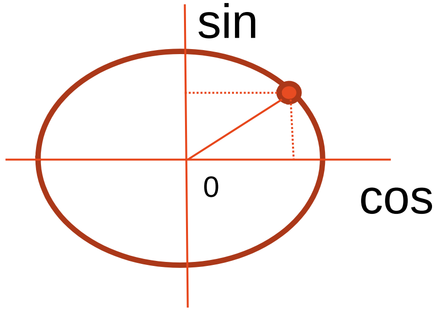


- ||**a** x **b**|| = ||**a**|| ||**b**|| |sin α|

Utile pour calculer les normales

Produit vectoriel - Solution

- Le produit vectoriel de deux vecteurs colinéaires est nul
  - $\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0$
  - $|\mathbf{i} \times \mathbf{j}| = |\mathbf{j} \times \mathbf{k}| = |\mathbf{k} \times \mathbf{i}| = 1$



Équation d’un plan

3 points non alignés forment un plan unique

- Équation : $ax + by + cz + d = 0$

Attention : 4 points ne sont pas forcement coplanaires (dans le même plan)

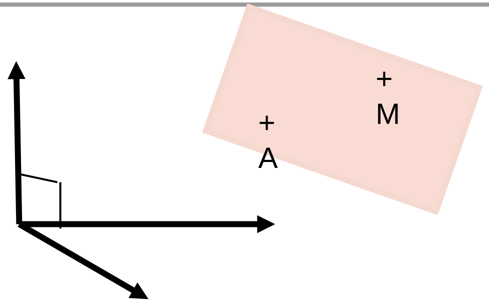
Équation d’un plan - Exercice 1

Soit un point A élément du plan

- Trouver un vecteur normal au plan

- Trouver l’équation d’un plan passant par A

Équation d'un plan - Solution



- Trouver un vecteur normal au plan
  - Plan peut être défini par un point et vecteur **n**
  - On considère le point A dans le plan
  - On considère un point M également dans le plan
    - Il représente l'ensemble des points de ce plan

  - Soit **n** la normale au plan, on a :

    n . **AM** = 0

  => **n** . (**AO** + **OM**) = **n** . (**OM** - **OA**)

  = **n** . **OM** - **n** . **OA**

  Cela équivaut à l'équation cartésienne avec M (x, y, z) et n (n1, n2, n3) :

  n1 x + n2 y + n3 z – (n1 a1 + n2 a2 + n3 a3) = 0

  ⇒ Équation ax + by + cz + d = 0

  avec a = n1, b = n2, c = n3, d = - **n** . **OA**

Équation d’un plan - Exercice 2

Soient 3 points : A(1,0,0), B(0,1,0), C(0,0,1)

- Trouver un vecteur normal au plan
- Trouver l’équation du plan A,B,C

Équation d'un plan - Solution

- Vecteur normal au plan ABC avec A(1,0,0), B(0,1,0), C(0,0,1)
  - **n** = **AB** x **AC** = (-1,1,0) x (-1,0,1) = (1, 1, 1)

  - Soit M (x, y, z) ∈ (A B C)
    - **AM** = M - A = (x-1, y, z) qui est orthogonal à n (1, 1, 1)

    - **AM** . **n** = 0

      <=> x-1 + y + z = 0

      <=> x + y + z - 1 = 0 équation du plan (ABC)

Équation d'un plan - Solution

- Autre méthode
  - On sait que l'équation du plan est de la forme $ax + by + cz + d = 0$

  - A (1, 0, 0) appartient au plan (A, B, C)
    $\Rightarrow a + d = 0$

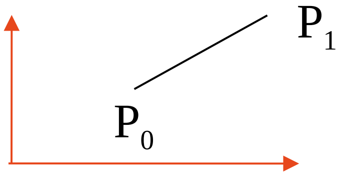
  - B (0, 1, 0) appartient au plan (A, B, C)
    $\Rightarrow b + d = 0$

  - C (0, 0, 1) appartient au plan (A, B, C)
    $\Rightarrow c + d = 0$

$\Rightarrow d = -a = -b = -c$

$\Rightarrow x + y + z - 1 = 0$ convient

Équation paramétrique d'une ligne



Soient

- P0 = (x0, y0, z0)
- P1 = (x1, y1, z1)

La ligne P passant par P0 et P1 est

$$P(t) = P_0 + t\,(P_1 - P_0) \quad = \begin{cases} x(t) = x_0 + t\,(x_1 - x_0) \\ y(t) = y_0 + t\,(y_1 - y_0) \\ z(t) = z_0 + t\,(z_1 - z_0) \end{cases}$$

avec $-\infty < t < \infty$

Si $0 < t < 1$ on a le segment [P0 P1]

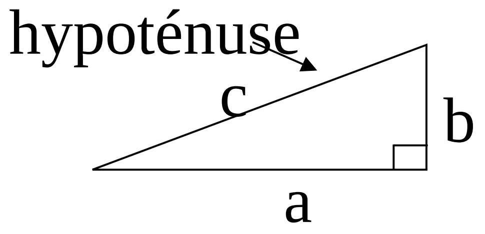
si t = 0, on a le point P0

si t = 1, on a le point P1

Équation d'un cercle

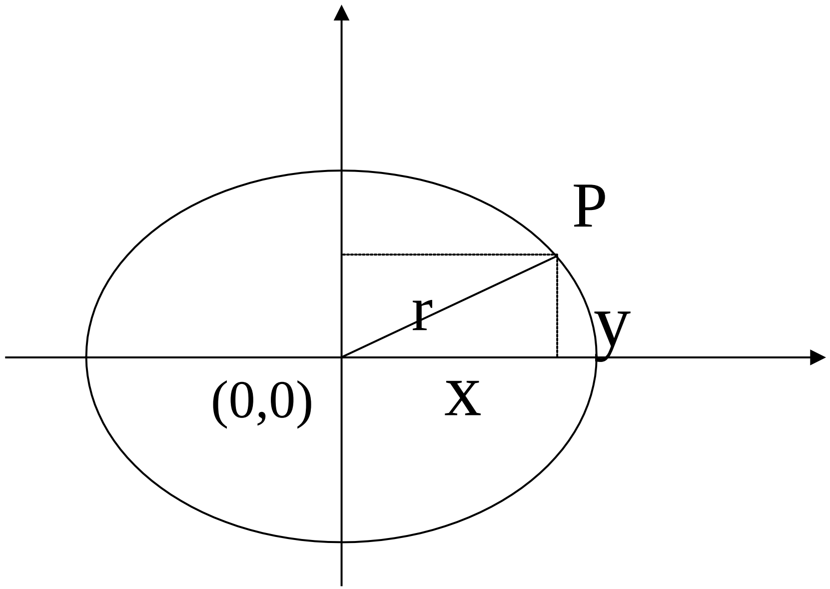
Théorème de Pythagore

$$a^2 + b^2 = c^2$$



Cercle de centre (0,0) et de rayon r,
pour tout P(x,y) sur le cercle :

$$x^2 + y^2 = r^2$$



Équation d'une sphère

Théorème de Pythagore généralisé à la 3D :

$$a^2 + b^2 + c^2 = d^2$$

Pour tout P(x,y,z) sur la sphère de centre (0,0,0) et de rayon r :

$$\boxed{x^2 + y^2 + z^2 = r^2}$$

Pour tout P(x,y,z) sur la sphère de centre (x_c, y_c, z_c) et de rayon r :

$$\boxed{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 + (z - z_c)^2 = r^2}$$

Outils mathématiques

Contexte : besoin mathématiques pour la synthèse d'images

- Pour décrire la scène
  - Définition d'un système de coordonnées

- Pour faire des transformations géométriques
  - Projection et transformation

Bases pour la géométrie

Matrices et transformations géométriques

- Définition et opérations sur les matrices
- Transformations géométriques
- Compositions de transformations

Matrices

Une Matrice est un tableau de dimensions M (lignes) par N (colonnes)

- matrice 3 par 6
- élément 2,3 est (3)

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & 1 & -1 \\ -5 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Un vecteur peut être considéré comme une matrice 1 (ligne) x M (col.)

$$v = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$$

Types de matrices

Matrices identité notée I :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrice diagonale :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Matrice symétrique :

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$$

Opérations sur les matrices

Addition de matrices :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+p & b+q \\ c+r & d+s \end{pmatrix}$$

Transposée d'une matrice : M par N devient N par M

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 5 & 2 & 8 \\ 6 & 7 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 7 \\ 9 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

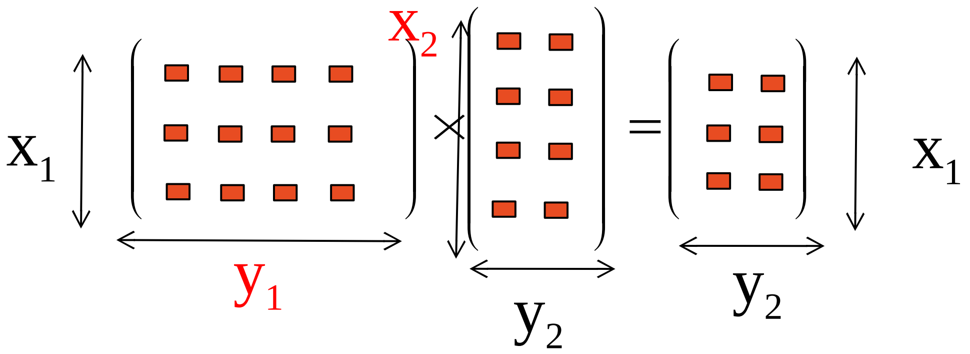
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Opérations sur les matrices

Multiplication de deux matrices

- Matrice $x_1\, y_1$ multipliée par matrice $x_2\, y_2$
  - Multiplication possible ssi $y_1 = x_2$
    - Résultat : matrice x_1 par y_2

- Attention : si A * B est possible, cela ne veut pas dire que B *A l'est aussi !!!



Opérations sur les matrices

- A est n par k , B est k par m
- C = A * B est définie par

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^{k} a_{il} b_{lj}$$

- B*A != A*B

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & & \\ * & & \\ * & & \\ * & & \\ * & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} . & * & \\ . & * & \\ . & * & \\ . & * & \\ . & * & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} . & * & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} . & . & . & . & . \\ * & * & * & * & * \\ & & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} . & * & \\ . & * & \\ . & * & \\ . & * & \\ . & * & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} . & . & \\ . & * & \\ & & \end{pmatrix}$$

Exemple de multiplications de matrices

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ \end{pmatrix}$$

Solution

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Inverse d’une matrice

- Si $A * B = I$ et $B * A = I$

  alors $A = B^{-1}$ et $B = A^{-1}$

Transformations géométriques

Les transformations géométriques sont utilisées partout

- Changement de repère
- Projection
- Déplacement dans le temps

Elles sont effectuées en utilisant des matrices de transformation

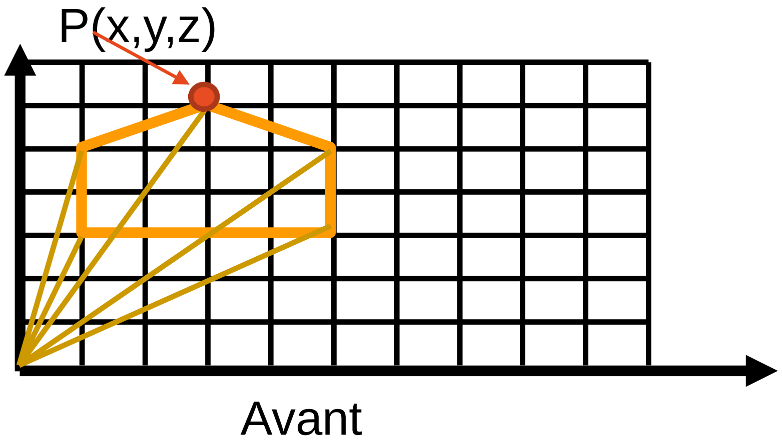
Chaque point P(x,y,z) de l'objet est multiplié par une matrice

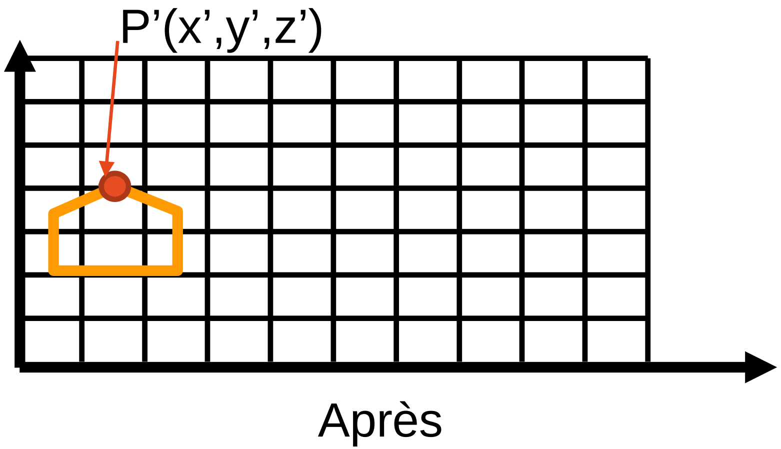
Nous obtenons une nouvelle position issue de la transformation :

P'(x', y', z') **= matrice de transformation * P**

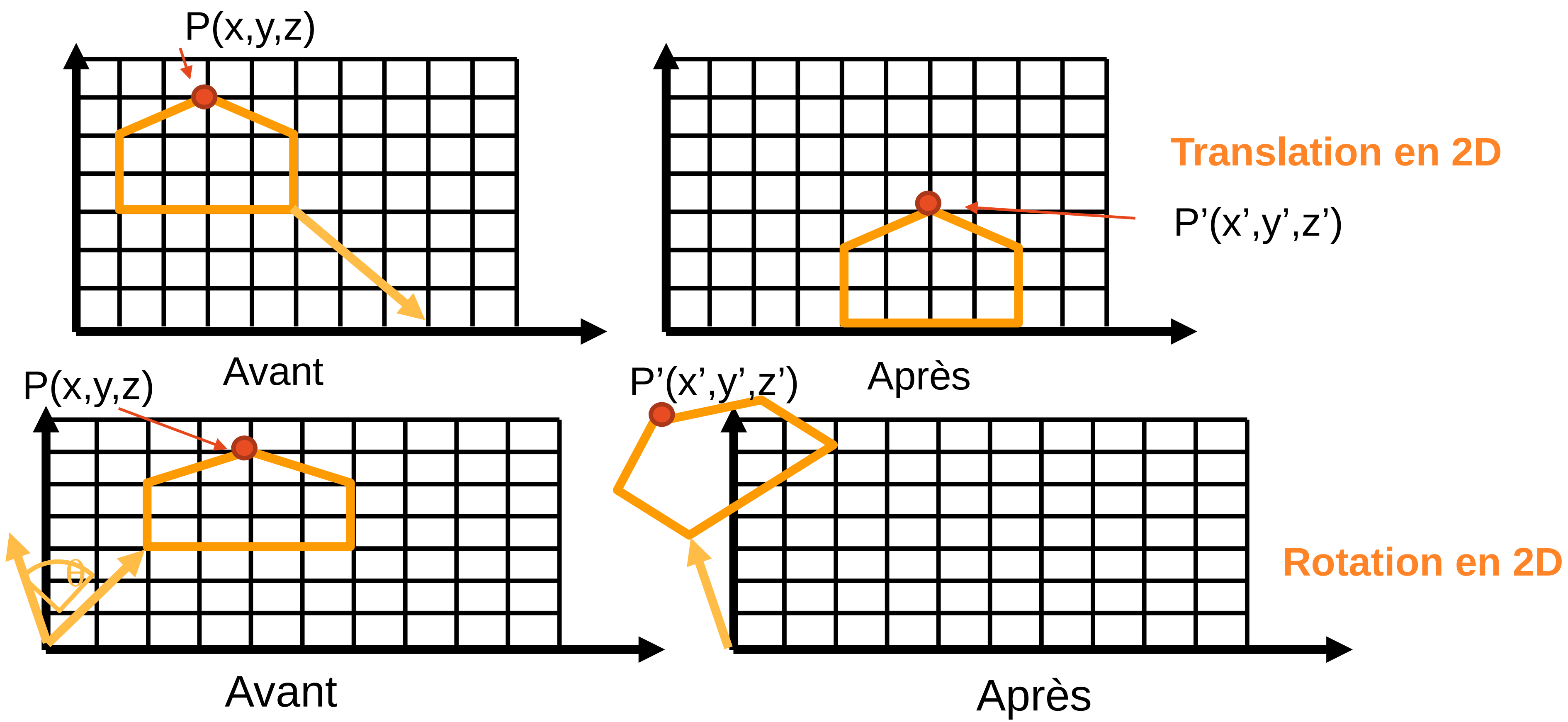
Transformations géométriques en 2D

Changement d'échelle en 2D





Transformations géométriques en 2D



Matrice de transformation en 3D

En 3D, un vecteur est transformé <u>en le multipliant</u> par une matrice 3x3 appelée <u>matrice de transformation</u>

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by + cz \\ dx + ey + fz \\ gx + hy + iz \end{pmatrix}$$

Matrice de transformation

Vecteur P qui subit la transformation

Vecteur P’ transformé

Matrice de changement d'échelle

C'est une matrice diagonale de la forme suivante

(avec a, b, c les facteurs d'échelle) :

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax \\ by \\ cz \end{pmatrix}$$

Matrice de changement d'échelle

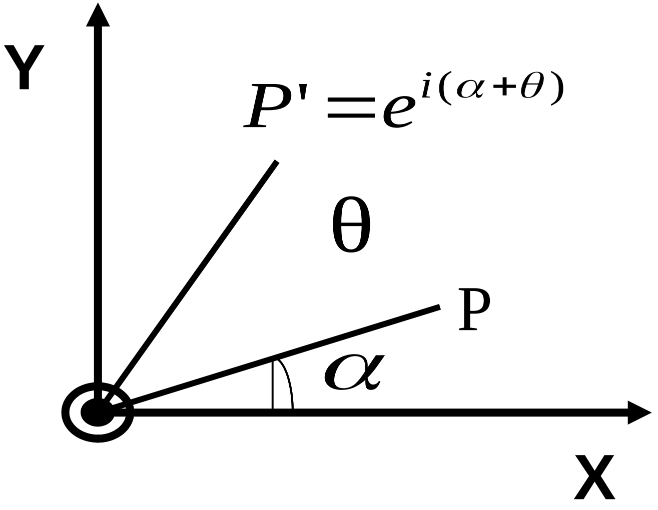
Exemple :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -10 \end{pmatrix}$$

Rotation autour d’un axe : exercice

On veut faire une rotation autour de l’axe des z

Quelle est la matrice de transformation correspondante ?

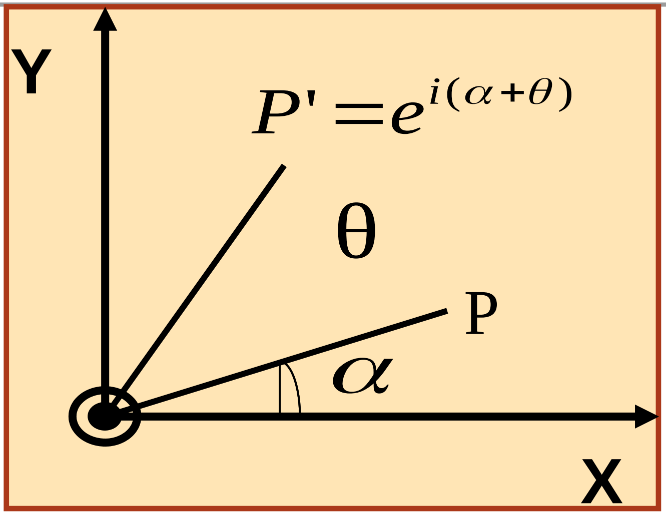


Point initial :

$$
\begin{aligned}
P &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} r\cos(\alpha) & r\sin(\alpha) \end{pmatrix} \\
&= r(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)) \\
&= re^{i\alpha}
\end{aligned}
$$

Matrice de rotation en 2D

Point P’ issu de la rotation de P autour de l’axe des z :



$$P' = re^{i(\alpha+\theta)} = re^{i\alpha}e^{i\theta}$$

$$= (x + iy)(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$$

$$= x\cos(\theta) + xi\sin(\theta) + iy\cos(\theta) + iyi\sin(\theta)$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$i^2=-1$

Matrice de transformation

Point P

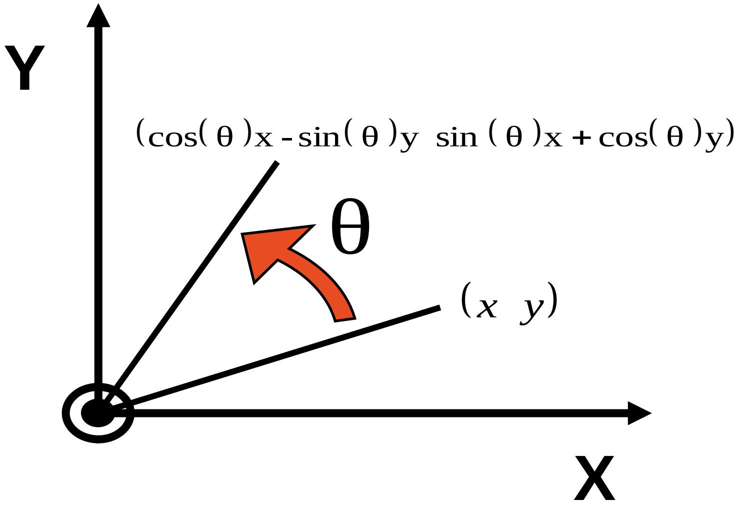
Remarque : Z ne change pas

Matrice de rotation en 3D

Matrice de rotation autour de l'axe des z :

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

car Z ne change pas



Matrice de rotation en 3D

Rotation autour de X :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

X ne change pas

Rotation autour de Y :

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Y ne change pas

Matrice de translation

Trouver la matrice qui translate un point P ?

- P = $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ P' = $\begin{pmatrix} x+a \\ y+b \\ z+c \end{pmatrix}$

On cherche la matrice de transformation M tq P' = M * P

Introduction de la notion de coordonnées dites homogènes

Matrice de translation en 4D

Translation en coordonnées homogènes : matrice 4x4

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+a \\ y+b \\ z+c \\ 1 \end{pmatrix}$$

On ajoute une 4e dimension « fictive » que l'on appelle **coordonnée homogène**

Pourquoi ceci ?

4D permet d'inclure translation/projection dans la matrice

Matrice 4x4 : représentation la plus utilisée pour les transformations (rotation, translation, changement d'échelle)

Plus de détails sur les coordonnées homogènes

Un point en 3 dimensions est représenté par un **vecteur de 4 éléments**

Le 4e élément est utilisé pour le calcul d'une coordonnée en espace projectif (calcul de projection)

La coordonnée du point est obtenue en divisant les 3 premiers éléments par le 4e élément

(x, y, z, w) = (x/w, y/w, z/w)   donc le plus simple : w=1

Deux points (x, y, z, w) et (x', y', z', w') sont égaux ssi

x/w = x'/w', y/w = y'/w', z/w = z'/w'

Si w=0, on a un point à l'infini (utile pour les projections)

Coordonnées homogènes

Homogène veut dire qu'un point de l'espace 3D peut être représenté par une infinité de points homogènes 4D

- (2 3 4 1) = (4 6 8 2) = (3 4.5 6 1.5)

On peut contraindre le 4e élément à être égale à 1 : (x,y,z,1)

Passage en coordonnées homogènes

Coordonnées cartésiennes

Coordonnées homogènes

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x'/w \\ y'/w \\ z'/w \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$$

w est le facteur d'échelle

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix}$$

cas avec w=1

Matrices de transformation en 4D

- Translation

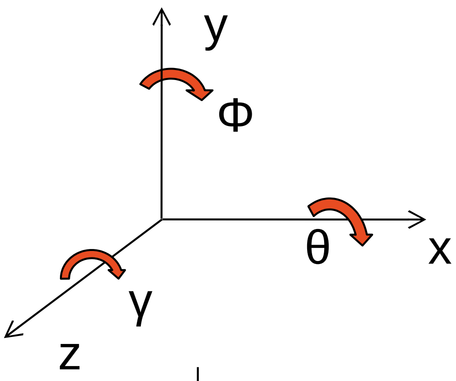
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & 0 & T_y \\ 0 & 0 & 1 & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x' = x + wT_x \\ y' = y + wT_y \\ z' = z + wT_z \\ w' = w \end{cases}$$

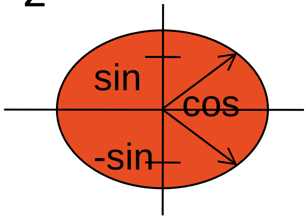
- Changement d'échelle

$$\begin{pmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x' = xS_x \\ y' = yS_y \\ z' = zS_z \\ w' = w \end{cases}$$

Matrices de transformation en 4D

- Rotation dépend d'un axe et d'un angle





Rotation autour de l'axe X :
(coordonnée en x non modifiée)

$$R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rotation autour de l'axe Y :
(coordonnée en y non modifiée)

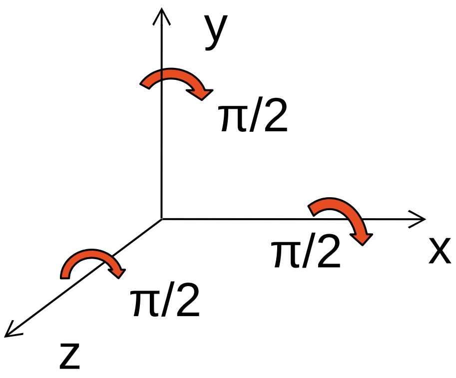
$$R_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\phi & 0 & \sin\phi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\phi & 0 & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rotation autour de l'axe Z :
(coordonnée en z non modifiée)

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrices de transformation en 4D

- **Rotation de l'angle π /2 :**



Rotation autour de l'axe X :
(coordonnée en x non modifiée
coordonnée en y changée en z
coordonnée en z changée en -y)

$$R_x(\frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rotation autour de l'axe Y :
(coordonnée en y non modifiée
coordonnée en z changée en x
coordonnée en x changée en –z)

$$R_y(\frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rotation autour de l'axe Z :
(coordonnée en z non modifiée
coordonnée en x changée en y
coordonnée en y changée en -x)

$$R_z(\frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Composition de transformations en 4D

Rotation et/ou changement d'échelle puis translation

$$\begin{pmatrix} R_1 & R_2 & R_3 & T_1 \\ R_4 & R_5 & R_6 & T_2 \\ R_7 & R_8 & R_9 & T_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = T.R$$

- R (matrice 3x3) = rotation et/ou changement d'échelle
- T (matrice 3x1) = translation

Composition de transformations : exercice

Translation suivie d’une rotation *versus* rotation suivie d’une translation

- P(3,1,0) => (3, 1, 0, 1) en coordonnées homogènes
- R = rot(Z, Pi/2)
- T = trans(2,0,0)
- Il faut calculer P’ = R T P et P” = T R P

Composition de transformations : solution

- P(3,1,0)
- R=rot(Z,Pi/2) => matrice de rotation

$$R_z(\frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- T=trans(2,0,0) => matrice de translation

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Composition de transformations : solution

Translation suivie d’une rotation

Calculer P’= R T P = R * (5,1,0,1) = (-1,5,0, 1)

Rotation suivie d’une translation

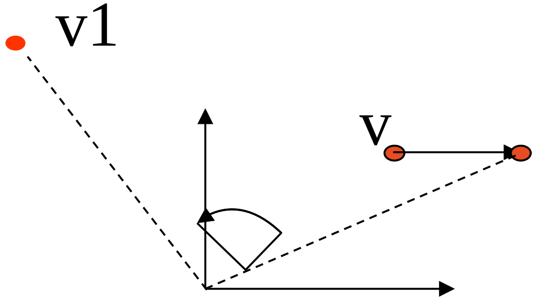
Calculer P” = T R P = = T * (-1,3,0,1) = (1,3,0,1)

P’ n’est pas égal à P”

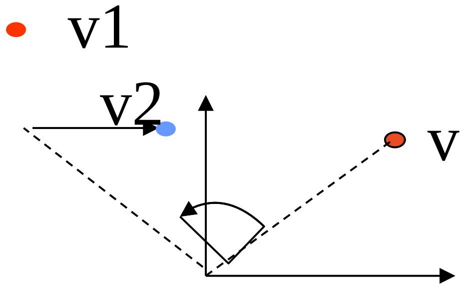
Attention : l’ordre des transformations n’est pas commutatif

Composition de transformations

- L'ordre a de l'importance
  - Translation suivie d'une rotation **!=** rotation suivie d'une translation
  - (RT) v != (TR) v



T puis R = R.T.v = v1

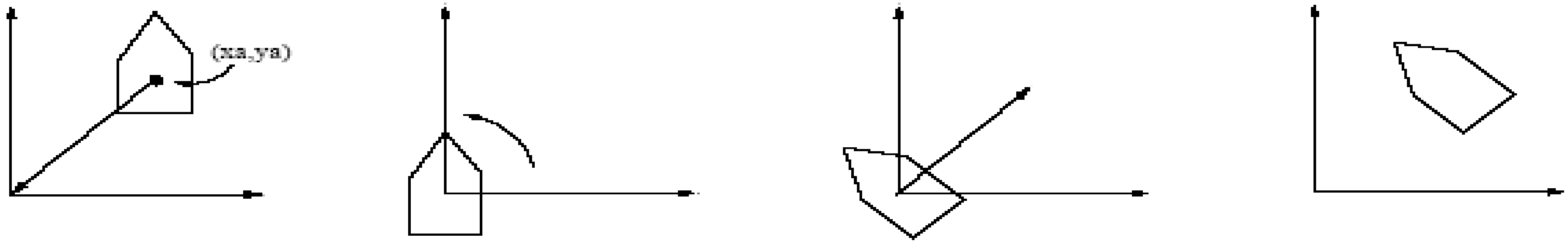


R puis T = T.R.v = v2

La multiplication de matrices n'est pas commutative (M1M2 ≠ M2M1)
L'ordre des transformations est donc important

Rotation de l’objet

- Pour faire une rotation de l’objet



$$X' = MX,$$

$$M = T(x_a, y_a) \cdot R(\theta) \cdot T(-x_a, -y_a).$$

Ouf !!! …

- On a la base …