Master 1 Informatique
UE M1if37 - Animation en synthèse d'image
Partie - Simulation par modèles physiques
Cours 2 - Dynamique Newtonienne

Florence Zara

LIRIS - Université Lyon 1

http://liris.cnrs.fr/florence.zara
E-mail: florence.zara@liris.cnrs.fr

Plan du cours

Dynamique Newtonienne

- Rappel de cinématique
- Lois de Newton
- Boucle de simulation
- Quelques exemples de forces

Moteur physique

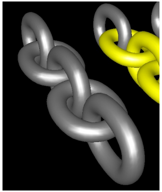
- Méthodes d'intégration numérique

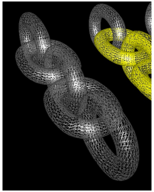
Cinématique

Point matériel : morceau de matière suffisamment petit pour repérer sa position par ses coordonnées.

Corps solide : assimilé à un point matériel si son mouvement est limité à l'étude du mouvement de son centre de masse.

Objet déformable basé sur un système de particules : discrétisation de l'objet en un nombre fini de particules (p), particule i de masse m_i et de position x_i avec $0 \leqslant i \leqslant p$.



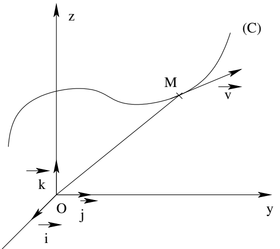


Cinématique du point matériel

Coordonnées cartésiennes en 3D

- **Position :** $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$
- **Trajectoire :** ensemble des positions successives de M lorsque ses coordonnées varient au cours du temps (courbe C)
- **Equation horaire :** $\vec{X}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$

  $\hookrightarrow$ position du point M au cours du temps



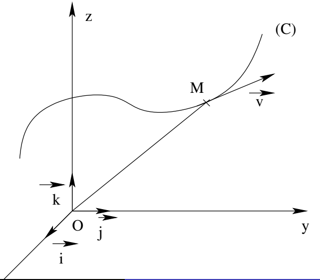
Cinématique du point matériel

Coordonnées cartésiennes en 3D

- **Vitesse :** $\vec{V}(t) = \dot{X}(t) = \dot{x}(t)\vec{i} + \dot{y}(t)\vec{j} + \dot{z}(t)\vec{k}$
- **Accélération :** $\vec{A}(t) = \dot{V}(t) = \ddot{X}(t) = \ddot{x}(t)\vec{i} + \ddot{y}(t)\vec{j} + \ddot{z}(t)\vec{k}$

Notation « point » = dérivée par rapport au temps t = d/dt

Vitesse de la particule au temps t = longueur du vecteur vitesse



Lois de Newton

Notions de masse et de force

- Mouvement d'un point caractérisé par sa position, vitesse et accélération
- Point également caractérisé par sa **masse** (en Kg) et par sa **force** (en N)
- Accélération de l'objet proportionnelle à l'intensité de la force
- Force d'un Newton = intensité de la force requise pour donner une accélération d'un mètre par seconde au carré à une masse d'un kilogramme

Lois de Newton

Première loi

- En l'absence de toute force externe, un objet au repos reste au repos.
- Si l'objet est en mouvement, et qu'aucune force extérieure ne lui est appliquée, sa vitesse reste constante
  $\hookrightarrow$ mouvement d'un objet modifié que par l'intervention d'une force

Seconde loi = principe fondamentale de la dynamique

- Soit un objet de masse constante m, accélération $\ddot{x}$, force F.
- **Equation du mouvement :** $F = m\ddot{x}$

Boucle de simulation

Simulation basée sur l'équation du mouvement : $F = m\ddot{x}$
$\Rightarrow$accélération de l'objet définie par : $\ddot{x} = F/m$

Boucle de simulation basée sur la dynamique Newtonienne

1. **Calcul des forces F appliquées sur l'objet**
   (dépend du modèle physique employé pour modéliser l'objet)
2. **Calcul de la nouvelle position x de l'objet**
   Résolution système différentielle du second ordre ($\ddot{x} = F/m$) pour obtenir le mouvement de l'objet (position x)
   ordre = degré de la plus haute dérivée

Dynamique Newtonienne

Etape 1 : Calcul des forces appliquées sur l'objet

Quelles forces peuvent être appliquées ?

Forces de gravitation

- Soient deux masses de 1 Kg distantes de 1 m ayant des interactions gravitationnelles
- Ces deux masses s'attirent avec une force d'intensité égale mais de directions opposées

$$G = 6.67 \times 10^{-11} N.(Kg^{-2}).(m^2)$$

- De manière générale, pour deux masses m et M distantes de r, la loi universelle de la gravitation de Newton donne :

$$F_{gravité} = \frac{GmM}{r^2}$$

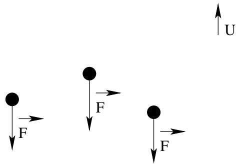
Quelles forces peuvent être appliquées ?

Constante et force de gravité

- Terre représentée par son centre de masse M
- Constante de gravité :

$$g = \frac{GM}{r^2} = 9.81 m.s^{-2} = 9.81 N$$

- **Force de gravité appliquée à un objet de masse** m : $\vec{F} = -mg\vec{u}$ (force à utiliser pour faire tomber un objet)



Quelles forces peuvent être appliquées ?

Force de gravité

- La gravité est une force sans contact
- Elle s'applique de manière uniforme à un environnement
- Un environnement soumis à la gravité est un environnement qui est toujours soumis à une force constante dans le temps et dans l'espace

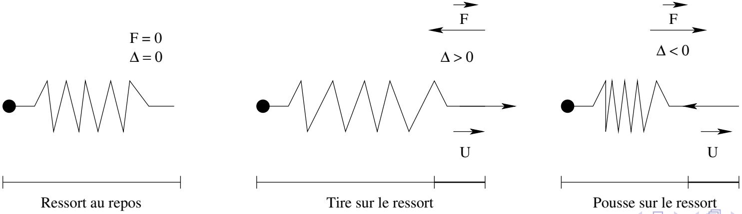
Quelles forces peuvent être appliquées ?

Force exercée par un ressort

- Un côté du ressort est fixé, l'autre est libre pour pouvoir pousser/tirer sur le ressort
- Force de rappel exercée par le ressort (loi de Hooke) :

$$\vec{F} = -k\Delta\vec{u}$$

  - Force toujours opposée à la déformation
  - Δ le déplacement du ressort
  - k la constante de raideur du ressort ($N.m^{-1}$)



Quelles forces peuvent être appliquées ?

Forces de dispersion

- Force pour laquelle l'énergie du système décroît
- Exemple : forces de friction, amortissement

Forces de friction / frottement

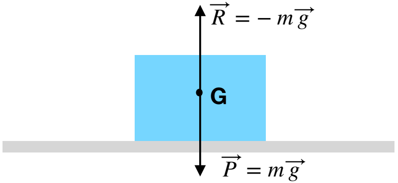
- Force de frottement entre deux objets

Quelles forces peuvent être appliquées ?

Cas sans frottement entre les deux objets

- Soit un corps posé sur un support horizontal
- En l'absence de frottement, la réaction $\vec{R}$ du support est toujours normal à la surface du support
- L'équilibre se traduit par :

$$\vec{P} + \vec{R} = \vec{0} \Rightarrow \vec{R} = -m\vec{g}$$



Quelles forces peuvent être appliquées ?

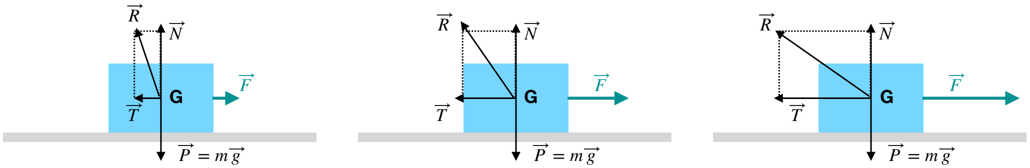
Cas avec frottement entre les deux objets

- En présence de frottement, la réaction $\vec{R}$ n'est plus normale à la surface
- Pour traduire les frottements, deux coefficients de frottement μ se distinguent :
  - **Coefficient de frottement statique** : μ_s (objet à l'arrêt)
    Force de friction statique : force minimale à appliquer pour que le solide se déplace (s'oppose au déplacement - même à l'arrêt)
  - **Coefficient de frottement dynamique** : μ_d (objet en mouvement) Force de friction dynamique s'oppose au mouvement quand l'objet bouge

Quelles forces peuvent être appliquées ?

Coefficient de frottement statique μ_s - exemple 1

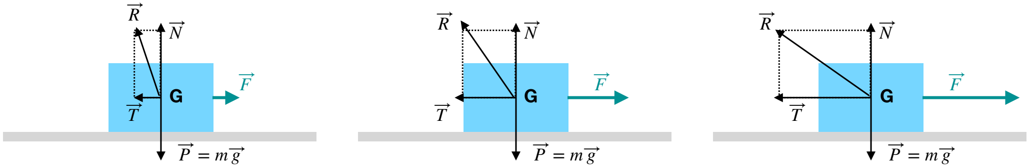
- Le corps étant à l'équilibre, une force horizontale $\vec{F}$ est appliquée
- La réaction $\vec{R}$ a alors une composante horizontale $\vec{T}$ qui s'oppose à $\vec{F}$: force tangente à la surface (**force de frottement**)
- Equilibre subsiste tant que $\vec{F}$ n'atteint pas une certaine valeur $\vec{F}_{max}$ donnée par $||\vec{F}_{max}|| = \mu_s ||\vec{N}||$ avec μ_s coefficient frottement statique (dépendant que des surfaces en contact)



Quelles forces peuvent être appliquées ?

Coefficient de frottement statique μ_s - exemple 1

- Tant que $\vec{F}$ augmente et que la masse reste à l'équilibre, $\vec{T}$ augmente est reste égale et opposée à $\vec{F}$
- Condition d'équilibre : $\|\vec{T}\| \leq \mu_s \|\vec{N}\| \Rightarrow \|\vec{F}\| \leq \mu_s mg$

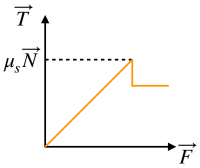


vidéo - Olivier Granier

Quelles forces peuvent être appliquées ?

Coefficient de frottement statique μ_s - exemple 1

- Si l'intensité de $\vec{F}$ augmente, l'intensité de la force de frottement $\vec{T}$ augmente aussi jusqu'à une valeur maximale $\|\vec{T}\| = \mu_s \|\vec{N}\|$ correspondant au début du glissement du bloc.
- Dès que le bloc en mouvement, l'intensité de $\|\vec{T}\|$ chute à une valeur inférieure.
- Cette force de frottement est appelée **force de frottement cinétique** et demeure approximativement constante.

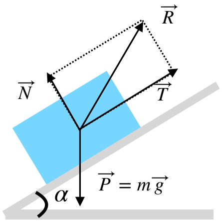


Quelles forces peuvent être appliquées ?

Coefficient de frottement statique μ_s - exemple 2

- Corps de masse m repose sur plan incliné
- Plan fait un angle α avec horizontale
- Corps glisse si l'angle d'inclinaison atteint une certaine valeur

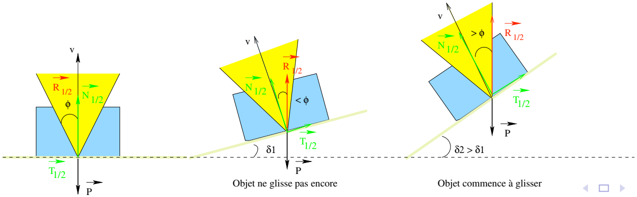
  On veut savoir à partir de quel angle α l'équilibre cesse



Quelles forces peuvent être appliquées ?

Coefficient de frottement statique μ_s - exemple 2

- Condition d'équilibre :
  - $\sum \vec{F} = \vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$
  - $\cos(\alpha) = \frac{\|\vec{N}\|}{\|\vec{P}\|}$, $\sin(\alpha) = \frac{\|\vec{T}\|}{\|\vec{P}\|}$, $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{\|\vec{T}\|}{\|\vec{N}\|}$
  - Équilibre frottement : $\|\vec{T}\| \leq \mu_s \|\vec{N}\| \Rightarrow \frac{\|\vec{T}\|}{\|\vec{N}\|} = \tan(\alpha) \leq \mu_s$
  - En jaune : cône de frottement d'adhérence
- Équilibre cesse quand : $\alpha > \alpha_{max} = arctan(\mu_s)$



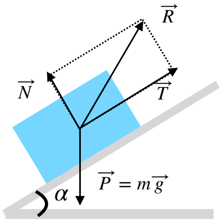
Quelles forces peuvent être appliquées ?

Coefficient de frottement dynamique μ_d

- Force pour rompre équilibre : $\mu_s \vec{N}$
- $\mu_d \vec{N}$: force pour conserver mouvement entre les deux objets

$\Rightarrow$ Force de frottement dynamique (opposée à la vitesse) : $\vec{F_d}$

- Équation du mouvement : $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F_d}$



Quelles forces peuvent être appliquées ?

Force de frottement - récapitulatif

- Deux coefficients de frottement : statique et dynamique
- Par expérience, on a toujours :

$$\mu_d < \mu_s \Longrightarrow \mu_d \vec{N} < \mu_s \vec{N}$$

$$\Longrightarrow F_{friction_{dynamique}} < F_{friction_{statique}}$$

Quelles forces peuvent être appliquées ?

Amortissement

- Partie de l'énergie totale dispersée (souvent en chaleur) créant une force d'amortissement
- Force de direction opposée au déplacement de l'objet
- Coefficient d'amortissement : ν (> 0)
- Force : $\vec{F} = -\nu\vec{v}$

Beaucoup de forces au final

Etat d'équilibre

- Plusieurs forces sont appliquées sur un objet
- Objet est à l'équilibre si :
  - $\sum_{i=1}^{n} \vec{F_i} = 0$, avec $\vec{F_i}$ forces extérieures appliquées à l'objet
- Simulation jusqu'à cet état d'équilibre (si pas de nouvelles forces dues par exemple à des interactions)

Dynamique Newtonienne

Etape 2 : Résolution système différentielle du second ordre $\ddot{x} = F/m$

Rappel du problème

Dynamique Newtonienne

- Objet de masse m
- Position $\mathbf{x}$, vitesse $\dot{\mathbf{x}}$, accélération $\ddot{\mathbf{x}}$
- Ensemble des forces exercées sur la particule : $\mathbf{F}$
- Seconde loi de Newton : $m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F} \Rightarrow \ddot{\mathbf{x}} = F/m$

$\hookrightarrow$ Système d'équations différentielles du 2^e ordre
à résoudre pour obtenir la nouvelle position ($\mathbf{x}$)

Problème : méthodes d'intégration
pour résoudre des systèmes du 1er ordre

Reformulation du système différentielle

Passage du 2^e au 1^{er} ordre

- Système peut être reformulé en un système du 1^{er} ordre
- Considère la vitesse comme une variable du système avec $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{F}}{m}$
- Système d'équations différentielles devient alors :

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{v}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \frac{\mathbf{F}}{m} \end{bmatrix}$$

Dynamique Newtonienne

Définition du système

- Définition de la structure de l'objet : $\begin{bmatrix} x \\ v \\ F \\ m \end{bmatrix}$
- Position dans l'espace des phases : $\begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix}$
- Vitesse dans l'espace des phases : $\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ F/m \end{bmatrix}$

But de la simulation :
mettre à jour le vecteur $\mathbf{S}(t) = [\mathbf{xv}]^T$ au cours du temps
$\hookrightarrow$ mettre à jour les vitesses et les positions (état de l'objet)

Dynamique Newtonienne

Cas d'un objet discrétisé en n particules

- Définition d'une particule i : $\begin{bmatrix} x_i \\ v_i \\ F_i \\ m_i \end{bmatrix}$
- Applique la loi de Newton aux n particules

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ v_1 \\ \vdots \\ x_n \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{v}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \\ \dot{v}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \frac{F_1}{m_1} \\ \vdots \\ v_n \\ \frac{F_1}{m_n} \end{bmatrix}$$

Dynamique Newtonienne - Point de vue animation 3D

Données de départ au temps t_0

- Masse de la particule : m
- Position initiale de la particule : $\mathbf{x}(t_0)$
- Vitesse initiale de la particule : $\mathbf{v}(t_0)$
- Pas de temps de la simulation : h

Boucle de l'animation au cours du temps

1. Affichage de la particule : position au temps t_0
2. Calcul des forces exercées sur la particule au temps t_0 : $\mathbf{F}(t_0)$
3. Calcul de l'accélération au temps t_0 : $\mathbf{a}(t_0) = \mathbf{F}(t_0)/m$
4. Intégration de $\mathbf{a}(t_0)$ pour obtenir $\mathbf{v}(t_0 + h)$
5. Intégration de $\mathbf{v}(t_0)$ pour obtenir $\mathbf{x}(t_0 + h)$
6. et on boucle...

Suite du cours - Comment on intègre ?

Moteur Physique

- Différentes méthodes d'intégration numérique
  - Méthode d'Euler
  - Taylor
  - Runge-Kutta
  - Verlet
- Critère pour choisir : la stabilité des méthodes d'intégration

Etude des méthodes d'intégration numérique

Formulation abstraite du système EDO du 1^{er} ordre

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f\left(t, x(t)\right), t \geqslant t_0 \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

avec $\dot{x}(t)$ dérivée de $x(t)$ par rapport à t

Connaissant $\dot{x}(t)$ pour tout t, on cherche $x(t)$

- Intégration de la vitesse $\dot{x}(t)$ pour obtenir la position $x(t)$
- $x(t) = \int \dot{x}(t)dt = \int f\left(t, x(t)\right) dt$
- Etude des méthodes sur cette formulation abstraite

Méthodes d'intégration numérique

Choix de la méthode d'intégration

- Il existe de nombreuses méthodes d'intégration
- Compromis entre le temps de calcul et la précision / stabilité
- Deux grandes classes :
  - méthodes explicites
  - méthodes implicites

Théorème de Taylor

■ Si $x(t)$ et ses dérivées $x^{(k)}(t)$, pour $1 \leqslant k \leqslant n$ sont continues sur l'intervalle fermé $[t_0, t_1]$ avec $x^{(n)}(t)$ dérivable sur l'intervalle ouvert (t_0, t_1), alors il existe un $\tau \in [t_0, t_1]$ tel que :

$$\begin{aligned} x(t_1) &= x(t_0) + \frac{\dot{x}(t_0)}{1!}(t_1 - t_0) + \frac{\ddot{x}(t_0)}{2!}(t_1 - t_0)^2 + \ldots + \frac{x^{(n)}(t_0)}{n!}(t_1 - t_0)^n + R(t_1) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{(k)}(t_0)}{k!}(t_1 - t_0)^k + R(t_1) \end{aligned}$$

avec $R(t_1) = \frac{x^{(n+1)}(\tau)}{(n+1)!}(t_1 - t_0)^{n+1}$ (erreur généralement bornée)

et $\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{(k)}(t_0)}{k!}(t_1 - t_0)^k$ polynôme de Taylor de degré n.■

Méthode d'Euler explicite

Présentation de la méthode pour $\dot{x}(t_i) = f\,(t_i, x(t_i))$

- Méthode d'Euler utilise le théorème de Taylor avec $n = 1$ sur l'intervalle $[t_i, t_{i+1}]$, avec $h = t_{i+1} - t_i > 0$ et $\tau \in [t_i, t_{i+1}]$:

$$\begin{aligned} x(t_{i+1}) &= x(t_i) + \dot{x}(t_i)h + \ddot{x}(\tau)\frac{h^2}{2} \\ &= x(t_i) + h\, f(t_i, x(t_i)) + \ddot{x}(\tau)\frac{h^2}{2} \end{aligned}$$

Méthode d'Euler explicite

Reformulation

- Soit $x_i = x(t_i)$ pour tout i avec x_i valeur exacte de la solution de l'équation différentielle au temps t_i
- Soit y_i l'approximation de x_i
- Ne tient pas compte du terme de l'erreur
- La méthode d'Euler explicite s'écrit sous la forme :

$$y_{i+1} = y_i + h\, f(t_i, y_i), i \geqslant 0, y_0 = x_0$$

Méthode d'Euler explicite

Concrétement

- Au temps t_0, x_0 connu
  - $y_0 = x_0$
- Au temps t_1, première approximation :
  - $y_1 = y_0 + h\, f(t_0, y_0)$
- Au temps t_2, on continue à partir de cette approximation :
  - $y_2 = y_1 + h\, f(t_1, y_1)$
- etc.

Méthode d'Euler explicite

Autre manière de l'appréhender

- Temps est décomposé en intervalles de longueur h
- Solution au temps t va fournir la solution au temps $(t+h)$
- Dérivée $y'(t)$ remplacée par son approximation mathématique

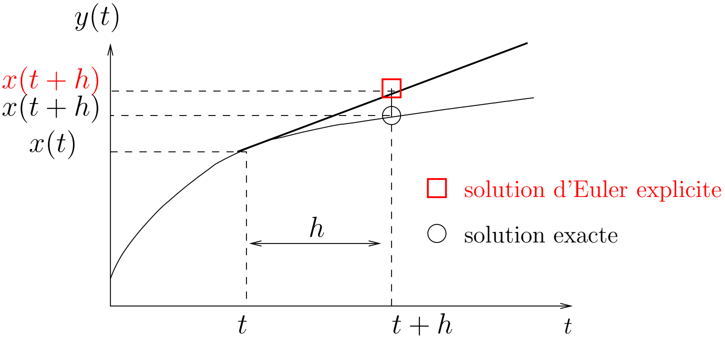
$$\frac{y(t+h)-y(t)}{h} \approx y'(t) = f(t, y(t))$$

Formulation du schéma pour un avancement h dans le temps

$$y(t+h) = y(t) + h\, f(t, y(t))$$

Méthode d'Euler explicite - Interprétation géométrique

- Revient à calculer la tangente à la solution au temps t pour obtenir la solution au temps $t + h$
- Séquence d'approximations $Y_n \approx y(t_n) = y(t_0 + nh)$



$\rightarrow$ Attention à la taille des intervalles de temps

Méthode d'Euler explicite - Point de vue animation 3D

Données

Forces au temps t : $f\,(t, x(t), v(t))$
Vitesse au temps t : v(t)
Position au temps t : x(t)

Schéma d'intégration numérique

$$\begin{aligned}
\text{Accélération au temps } t: \quad \dot{v}(t) &= M^{-1} f\,(t, x(t), v(t)) \\
\text{Vitesse au temps } t+h: \quad v(t+h) &= v(t) + h\,\dot{v}(t) \\
\text{Position au temps } t+h: \quad x(t+h) &= x(t) + h\,v(t)
\end{aligned}$$

Bilan

- Méthode très simple et beaucoup utilisée
- Mais méthode instable et peu précise

Méthode d'Euler semi-implicite - Point de vue animation 3D

En pratique, utilise schéma d'Euler semi-implicite :

- Encore plus facile à mettre en oeuvre
- Plus stable

Données

Forces au temps t : $f\,(t, x(t), v(t))$
Vitesse au temps t : v(t)
Position au temps t : x(t)

Schéma d'intégration numérique

$$
\begin{array}{lrcl}
\text{Accélération au temps } t : & \dot{v}(t) & = & M^{-1} f\,(t, x(t), v(t)) \\
\text{Vitesse au temps } t+h : & v(t+h) & = & v(t) + h\,\dot{v}(t) \\
\text{Position au temps } t+h : & x(t+h) & = & x(t) + h\,\color{red}{v(t+h)}
\end{array}
$$

Méthode avec une formulation intégrale

Formulation initial

- Problème initial : $\dot{x} = f(t, x), t \geqslant t_0, x(t_0) = x_0$
- On cherche : $x(t) = \int f(t, x)dt$
- Sur intervalle $[t_i, t_{i+1}]$,
  $x(t) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, x)dt = [F(t, x)]_{t_i}^{t_{i+1}} = F(t_{i+1}) - F(t_i)$
  avec $F(t, x) = x(t)$ la primitive de $\dot{x}(t)$
- On a donc : $\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, x)dt = x(t_{i+1}) - x(t_i)$
  $\Rightarrow x(t_{i+1}) = x(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, x(t))dt$

Reformulation

- Soit $\phi(t) = f(t, x(t))$, $\phi(t) > 0$
  $\Rightarrow x(t_{i+1}) = x(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \phi(t)$
- Intégrale = surface bornée par courbe de $\phi(t)$, axe t, et lignes verticales $t = t_i$ et $t = t_{i+1}$

Méthode avec une formulation intégrale

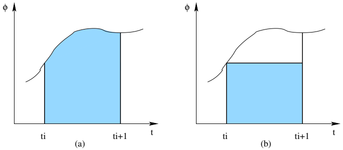
Approximation de l'intégrale par un rectangle

- Figure (b) : approximation de l'intégrale par un rectangle

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, x(t))dt = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \phi(t)dt \doteq (t_{i+1} - t_i)\phi(t_i) = (t_{i+1} - t_i)f(t_i, x_i)$$

$$\Rightarrow x(t_{i+1}) = x(t_i) + (t_{i+1} - t_i)f(t_i, x_i)$$

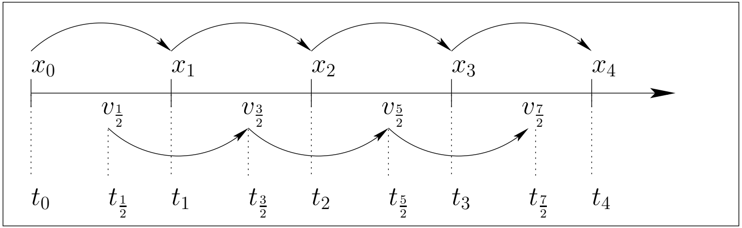
- Soient : $x(t_i) = x_i$, y_i approximation de x_i et $h = t_{i+1} - t_i$
  $\Rightarrow$ **méthode d'Euler explicite** : $y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i)$



Méthode de Stormer-Verlet / leapfrog

Idée

- Schéma non applicable sur système du premier ordre
- Considère système du second ordre $\ddot{x}(t) = M^{-1}f(t, x(t))$
- Approxime la vitesse v au temps $t + \frac{h}{2}$
- Approxime la position x au temps $t + h$



Méthode de Stormer-Verlet / leapfrog

- **Calcul de la vitesse au milieu de l'intervalle :**

Utilise le théorème de Taylor :

$$\dot{x}(t+h) = \dot{x}(t) + h\,\ddot{x}(t) + \frac{h^2}{2}x^{(3)}(t) + \frac{h^3}{6}x^{(4)}(t) + \frac{h^4}{24}x^{(5)}(t) + O(h^5)$$
$$\dot{x}(t-h) = \dot{x}(t) - h\,\ddot{x}(t) + \frac{h^2}{2}x^{(3)}(t) - \frac{h^3}{6}x^{(4)}(t) + \frac{h^4}{24}x^{(5)}(t) + O(h^5)$$

$$\Rightarrow \dot{x}(t+h) - \dot{x}(t-h) = 2h\,\ddot{x}(t) + \frac{h^3}{3}x^{(4)}(t) + O(h^5)$$
$$\Rightarrow \dot{x}(t+h) = \dot{x}(t-h) + 2h\,\ddot{x}(t) + O(h^3)$$

$$\Rightarrow \dot{x}(t+\tfrac{h}{2}) = \dot{x}(t-\tfrac{h}{2}) + h\,\ddot{x}(t) + O(h^3)$$
$$\Rightarrow v(t+\tfrac{h}{2}) = v(t-\tfrac{h}{2}) + h\,a(t)$$

Méthode de Stormer-Verlet / leapfrog

- **Calcul de la position :**

Position calculée sur l'intervalle $[t, t+h]$ en utilisant l'approximation de la vitesse au milieu de l'intervalle (*midpoint method*) :

$$\frac{x(t+h) - x(t)}{h} = v(t + \frac{h}{2})$$

$$\Rightarrow x(t+h) = x(t) + h\, v(t + \frac{h}{2})$$

Méthode de leapfrog - Point de vue animation 3D

Données de départ

Position au temps t_0 : $x(t_0)$
Vitesse au temps t_0 : $v(t_0)$
Accélération au temps t_0 : $M^{-1}f\,(t_0, x(t_0), v(t_0))$

Vitesse au temps $t_0 + h/2$: $v(t_{1/2}) = v(t_0) + h/2\ \dot{v}(t_0)$
Vitesse au temps $t_0 + h$: $v(t_1) = v(t_0) + h\ \dot{v}(t_0)$

Position au temps $t_0 + h$: $x(t_1) = x(t_0) + h\ v(t_{1/2})$

Schéma d'intégration numérique

Accélération au temps t :	$\dot{v}(t)$	$=$	$M^{-1}f(t, x(t), v(t))$
Vitesse au temps t+$\frac{h}{2}$:	$v(t+\frac{h}{2})$	$=$	$v(t-\frac{h}{2}) + h\ \dot{v}(t)$
Vitesse au temps t+h :	$v(t+h)$	$=$	$v(t+\frac{h}{2}) + h/2\ \dot{v}(t)$
Position au temps t+h :	$x(t+h)$	$=$	$x(t) + h\ v(t+\frac{h}{2})$