Master 1 Informatique
UE M1if37 - Animation en synthèse d'image
Partie - Simulation par modèles physiques
Cours 3 - Simulation d'objets déformables

Florence Zara

LIRIS - Université Lyon 1

http://liris.cnrs.fr/florence.zara
E-mail: florence.zara@liris.cnrs.fr

Plan du cours

Simulation d'objets déformables

- Exemples d'objet déformables
- Caractéristiques des objets déformables

Modélisation physique basée sur un systèmes masses-ressorts

- Définition
- Application à une simulation de textiles
- Travail demandé en TP

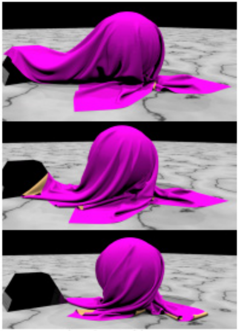
Simulation d'objets déformables : exemples (1)

- Simulation de cheveux

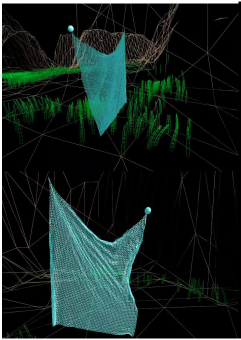
[*Bertails*, *et. al.* 2006]

Simulation d'objets déformables : exemples (2)

- Simulation de textiles



[*Bridson*, *et. al.* 2002]

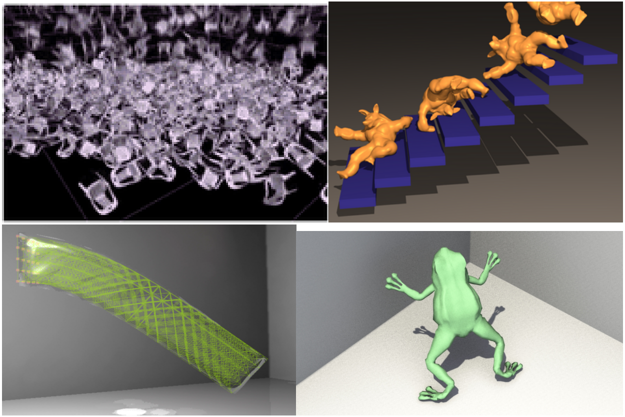


[*Zara*, *et. al.* 2003]

[*MIRALab*]

Simulation d'objets déformables : exemples (3)

- Simulation d'objets déformables divers et variés



Comment caractériser les objets déformables ?

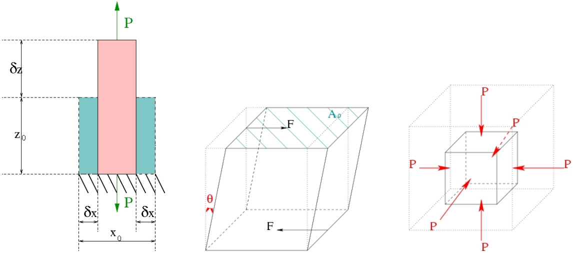
Deux notions importantes : contrainte et déformation

- Le rapport $\frac{contrainte}{déformation}$ caractérise l'objet déformable
- Plusieurs types de contraintes / déformations
  $\Rightarrow$ plusieurs **coefficients** caractérisant les objets déformables
  $\Rightarrow$ effectue des **tests** sur les matériaux pour mesurer ces coefficients

Tests pour caractériser les objets déformables

Tests de déformations mettent en avant paramètres d'élasticité :

- Etirement ⇒ module de Young, coefficient de Poisson
- Cisaillement ⇒ module de cisaillement (*shear*)
- Compression ⇒ module de compressibilité (*Bulk*)



1 - Test de traction / étirement

Contrainte de traction

- Intensité de la force appliquée divisée par l'aire de la surface sur laquelle la force est exercée : $\sigma = F/A$
- Tension importante quand :
  - Intensité de la force importante
  - Surface petite

Exemple

- Corps rigide de masse m soumis à la force de gravité $\vec{F} = m\vec{g}$
- Corps posé sur un cylindre de rayon r
- Tension sur le cylindre : $\sigma = F/A = \frac{mg}{\pi r^2}$

Test de traction / étirement - Module de Young

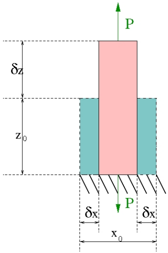
Etirement

- Applique pression F sur un côté de surface A, de longueur L

$\Rightarrow$ Longueur change de ΔL

$\Rightarrow$ Déformation ou allongement relatif : $\frac{\Delta L}{L}$

$\Rightarrow$ Contrainte de traction : $\sigma = \frac{F}{A}$



Module de Young

- Contrainte traction / déformation

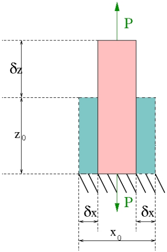
$\Rightarrow$ $E = \frac{F/A}{\Delta L / L}$

- Loi de Hooke pour la traction :
  contrainte = module de Young × déformation
  $\Rightarrow \sigma = E\epsilon$

Test de traction / étirement - Coefficient de Poisson

Elargissement

- Quand exerce un étirement ou une compression, la largeur de la pièce varie également, à l'inverse de l'allongement



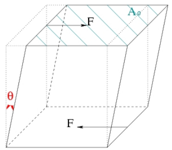
Coefficient de Poisson

- $\nu = -\dfrac{Elargissement}{D\acute{e}formation} = -\dfrac{Elargissement}{(\Delta L/L)}$

2 - Test de cisaillement - Module de Coulomb

Cisaillement

- Cisaillement : variation de l'angle, qui n'est plus droit
- Cela correspond à des forces s'exerçant parallèlement à la face
- Contrainte = scission = F / A
- Déformation = écart à l'angle droit = cisaillement



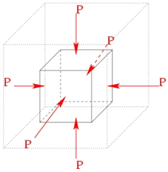
Module de cisaillement ou de Coulomb

- $G = \frac{contrainte}{d\acute{e}formation} = \frac{F/A}{\theta}$
- Si milieu isotrope (même comportement dans toutes les directions), $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$

3 - Test de compression - Bulk modulus

Compression

- Exerce une force
  - isotrope : même valeur dans toutes les directions
  - perpendiculaire en tout point de la surface
- Pression $P = F/A \Rightarrow$ variation ΔP
- Objet de volume $V \Rightarrow$ variation ΔV



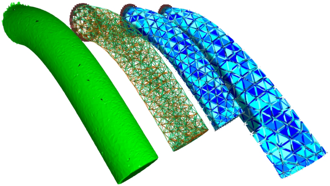
Module de compressibilité ou d'élasticité

- Contrainte volumique / déformation volumique

$$\Rightarrow B = \frac{\Delta P}{\Delta V / V}$$

Comment simuler comportement objet déformable ?

- Coefficient de Poisson, modules de Young, de compressibilité, et de cisaillement $\Rightarrow$ Mécanique des Milieux Continus (MMC)
- MMC donne une description du comportement d'un objet qui se déforme ou se déplace sous l'influence de contraintes
- Discrétisation de l'objet en éléments
  - Maille du maillage = noeuds + fonctions d'interpolation
  - Formulation déplacement de tout point à l'intérieur d'un élément en fonction des valeurs aux noeuds
- Résolution équations MMC pour obtenir déplacement U(X)



Méthodes de résolution :

- Méthode des Eléments Finis

Comment simuler comportement objet déformable ?

- Alternatives possibles pour modéliser objets déformables
  1. Basée sur des principes physiques, nécessitant résolution systèmes d'équations différentielles
     $\Rightarrow$ objet discrétisé en un ensemble de masses connectées par des ressorts (système masses-ressorts)
  2. Non basées sur des principes physiques mais solutions semblent physiquement correctes
     $\Rightarrow$ objet borné par une surface paramétrique avec des points de contrôle (B-spline, NURBS)
  3. Déformation de la région contenant l'objet déformable
     Surface de l'objet représentée par un maillage triangulaire ou par une surface paramétrique avec points de contrôle
     $\Rightarrow$ déformation de la région engendre la déformation de l'objet

Comment simuler comportement objet déformable ?

4. Objet modélisé par une région bornée par une surface définie implicitement par $F(x, y, z) = 0$

   Intérieur de l'objet = ens. des points tels que $F(x, y, z) < 0$

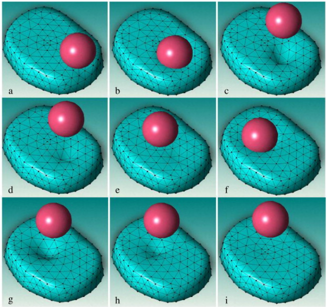
   Force exercée sur l'objet simulée par l'ajout d'une fonction de déformation $D(x, y, z)$ à $F(x, y, z)$

   $\Rightarrow$ surface déformée définie implicitement par $F(x, y, z) + D(x, y, z) = 0$

   $\Rightarrow$ intérieur de l'objet déformé défini par $F(x, y, z) + D(x, y, z) < 0$

Comment simuler comportement objet déformable ?

Etude des systèmes masses-ressorts



Système masses-ressorts

Définition

- Objet déformable modélisé par un ensemble de masses connectées par des ressorts
- Les objets ainsi modélisés peuvent être :
    - des courbes (cheveux, cordes, etc.) $\Rightarrow$ 1 dimension
    - des surfaces (textiles, surface de l'eau, etc.) $\Rightarrow$ 2 dimensions
    - des volumes (objets volumiques visqueux) $\Rightarrow$ 3 dimensions

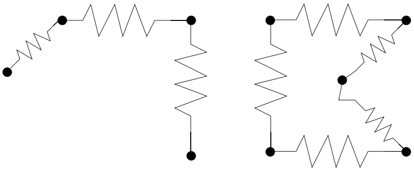
Complexité du système dépend

- du nombre de masses
- de leurs connections

Système masses-ressorts - 1D

Cas 1D : ligne polygonale

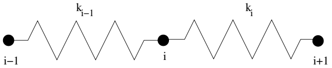
- Soit une courbe ouverte avec deux points terminaux
- Soit une courbe fermée (tous les points sont reliés)
- Chaque sommet représente une masse
- Chaque arête représente un ressort reliant les deux masses se trouvant aux deux extrémités de l'arête



Système masses-ressorts - 1D

Formulation pour une chaîne ouverte

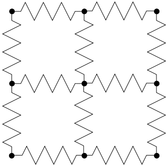
- Système avec p masses et $p-1$ ressorts les connectant
- Masses m_i de positions $\mathbf{x}_i$, pour $1 \leqslant i \leqslant p$
- Ressort i relie les masses m_i et m_{i+1}
- Point i connecté par deux ressorts aux points $i-1$ et $i+1$
  $\Rightarrow$ point i soumis aux forces exercées par ces deux ressorts



Système masses-ressorts - Animation 2D

Définition de la surface

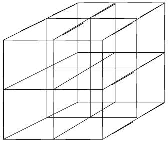
- Surface représentée par un ensemble de particules
- Particule *i* connectées à 4 particules voisines



Système masses-ressorts - Animation 3D

Définition du volume

- Volume représentée par un ensemble de particules
- Particule *i* connectées à 8 particules voisines



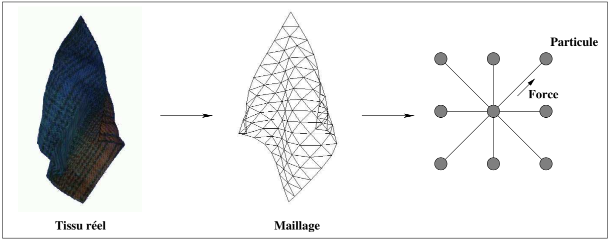
Système masses-ressorts - Généralisation

Formulation d'un système masses-ressorts

- Système contenant p particules de masses m_i, de position $\mathbf{x}_i$
- Chaque ressort relie masses m_i et m_j, de raideur $k_{ij} > 0$, de longueur au repos l_{ij}
- Soit $\mathcal{A}_i =$ ensemble des indices j tels que m_i connectée à m_j
- Equation du mouvement de la particule i :
  $m_i \ddot{\mathbf{x}}_i = \sum_{j \in \mathcal{A}_i} -k_{ij} \left(\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\| - l_{ij} \right) \vec{u}_{ij} + \mathbf{F}_i$

Application à une simulation de textiles

- Discrétisation du textile en un maillage polygonal
- Sommets correspondent aux particules
- Topologie définit les interactions

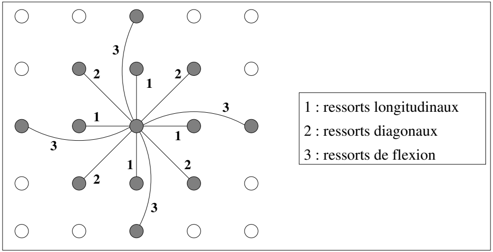


[*Breen*, *House*, *Getto* 1994]

Application à une simulation de textiles

- Système masses-ressorts définit les interactions entre particules
  - Particules connectées par des ressorts
  - Paramètres physiques des ressorts : k, l_0 et ν

[*Provot* 1995]



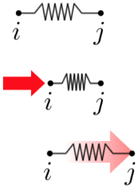
Rappel dynamique Newtonienne

Boucle d'animation

- Calcul des forces appliquées sur les particules :
  - forces exercées par les ressorts
- Calcul des accélérations :
  - principe fondamental de la dynamique
- Intégration pour obtenir les nouvelles vitesses et positions

Calcul des forces des ressorts

- Considérons un réseau constitué de deux masses i et j et d'un ressort les connectant
- Quand une force est appliquée à une des masses, le ressort est compressé et il compensera en appliquant une force opposée à l'autre masse pour décompresser



Calcul des forces des ressorts

- Force appliquée à la masse i par le ressort reliant les masses i et j est définie par :

$$\vec{f^e_{i,j}}(t) = -k_{ij}\left(\|x_i(t) - x_j(t)\| - l_{ij}\right)\ \vec{u}_{i,j}, \text{ avec}$$

- $\|x_i(t) - x_j(t)\|$ la disance actuelle entre les 2 masses
- l_{ij} la longueur au repos du ressort et $k_{ij} > 0$ sa raideur
- $\vec{u}_{i,j}$ le vecteur normalisé allant de i vers j, défini par :

$$\vec{u}_{i,j} = \frac{x_j(t) - x_i(t)}{\|x_j(t) - x_i(t)\|}$$

- La force appliquée à la masse j à partir du même ressort est définie par :

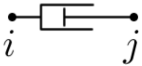
$$\vec{f^e_{j,i}}(t) = -\vec{f^e_{i,j}}(t)$$

Calcul des forces des ressorts

- Considérons le cas d'un ressort amorti avec l'ajout d'un amortisseur
- Amortisseur applique une force inverse à la vitesse qui est appliquée pour le compresser
- La force appliquée à la masse i par l'amortisseur reliant les masses i et j est ainsi défnie par :

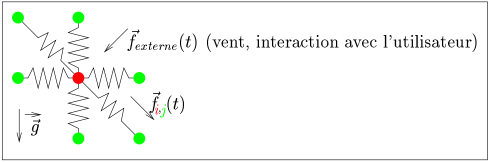
$$\vec{f}^{v}_{i,j}(t) = \left(-\nu_{ij}\,(\dot{x}_j(t) - \dot{x}_i(t)) \cdot \vec{u}_{i,j}\right) \vec{u}_{i,j}$$

- avec ν_{ij} la constante d'amortissement du ressort



Calcul des forces des ressorts

- Considérons un système masses-ressorts constitué de plusieurs masses et ressorts amortis
- La force exercée sur chaque particule i est définie par :
  - $\vec{f_i}(t) = \sum_{j | j \text{ voisin de } i} \left[\vec{f^e_{i,j}}(t) + \vec{f^v_{i,j}}(t) \right] + \text{gravité} + \text{interactions}$



$$\left\{ \begin{array}{lcll} \vec{f^e_{i,j}}(t) & = & -k_{ij} \left(\|x_i(t) - x_j(t)\| - l_{ij} \right) \; \vec{u}_{i,j} & \text{élasticité} \\ \vec{f^v_{i,j}}(t) & = & \left(-\nu_{ij} \left(\dot{x}_j(t) - \dot{x}_i(t) \right) \cdot \vec{u}_{i,j} \right) \vec{u}_{i,j} & \text{amortissement} \end{array} \right.$$

Calcul des accélérations

- Loi fondamentale de la dynamique appliquée à chaque particule i :

$$\ddot{x}_i(t) = {m_i}^{-1} f_i(x(t), \dot{x}(t))$$

  - $\ddot{x}_i(t)$: accélération de la particule i au temps t
  - m_i : masse de la particule i
  - f_i : forces exercées sur la particule i
  - $x(t)$: vecteur des positions des particules au temps t
  - $\dot{x}(t)$: vecteur des vitesses des particules au temps t

Equation du mouvement

- Système différentiel associé aux p particules

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \ddot{x}(t) & = & M^{-1} f\,(t, x(t), \dot{x}(t)) \\ \dot{x}(t_0) & = & v_0 \\ x(t_0) & = & x_0 \end{array} \right.$$

$\rightarrow$ f dépend de la définition des interactions

- Peut être transformé en système du premier ordre

$$\begin{pmatrix} \dot{v}(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M^{-1} f\,(t, x(t), v(t)) \\ v(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v(t_0) \\ x(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \\ x_0 \end{pmatrix}.$$

- Intégration pour obtenir les vitesses et les positions

Animation à réaliser en TP

Travail demandé - Regarder la page Web

- Récupérer l'archive du code existant
- Comprendre et compiler le code grâce à la doc
- Compléter le code :
  - Fonction d'affichage
  - Calcul des forces, accélérations, vitesses et des positions
  - Rajouter de l'interaction (mouvement coin du tissu)
  - Collision du tissu avec le sol
  - ...