M2 Image, Développement et Technologie 3D (ID3D)
UE Animation, Corps Articulés et Moteurs Physiques
Partie - Simulation par modèles physiques
Cours 4 - Simulation de fluides

Florence Zara

LIRIS - équipe Origami
Université Claude Bernard Lyon 1

http://liris.cnrs.fr/florence.zara
E-mail: florence.zara@liris.cnrs.fr

Plan du cours

Quelques rappels mathématiques

- Fonction scalaire, vecteur
- Opérateurs différentiels

Dynamique d'un fluide

- Introduction
- Equations de la dynamique des fluides
- Présentation de la méthode SPH
- Références bibliographiques

Avant de commencer... quelques rappels mathématiques

Fonction scalaire et vecteur dans $\mathbb{R}^3$

- Soient x, y, z les 3 directions de l'espace
- **Fonction scalaire** de plusieurs variables est définie par :

$$\begin{array}{rcl} f : (x, y, z) & \rightarrow & f(x, y, z) \\ \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R} \end{array}$$

- **Vecteur** $\vec{u}$ ayant comme composantes u_x, u_y, u_z est noté :

$$\vec{u} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}$$

Avant de commencer. . . quelques rappels mathématiques

Gradient

- **Gradient d'une fonction scalaire** qui définie dans $\mathbb{R}^3$ est :

$$\overrightarrow{grad}\ f = \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{cases}$$

- **Gradient d'un vecteur** $\vec{u}$ de composantes u_x, u_y, u_z est défini par :

$$\overrightarrow{grad}\ \vec{u} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u_x}{\partial x} & \dfrac{\partial u_x}{\partial y} & \dfrac{\partial u_x}{\partial z} \\ \dfrac{\partial u_y}{\partial x} & \dfrac{\partial u_y}{\partial y} & \dfrac{\partial u_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial u_z}{\partial x} & \dfrac{\partial u_z}{\partial y} & \dfrac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Avant de commencer... quelques rappels mathématiques

Divergence

- **Divergence** d'un vecteur $\vec{u}$ de composantes u_x, u_y, u_z est :

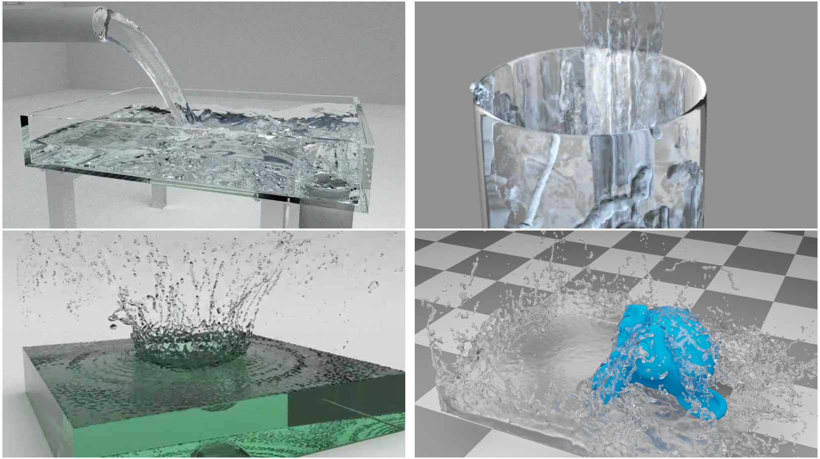
$$div\ \vec{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

- La **divergence est donc un scalaire**

Opérateur nabla noté ∇

- Nabla est un opérateur différentiel vectoriel : $\vec{\nabla} = (\frac{\partial}{\partial x}\ \frac{\partial}{\partial y}\ \frac{\partial}{\partial z})$
- Gradient d'une fonction scalaire : $\overrightarrow{grad}\ f = \vec{\nabla}\ f = (\frac{\partial f}{\partial x}\ \frac{\partial f}{\partial y}\ \frac{\partial f}{\partial z})$
- La divergence s'interpréte comme le produit scalaire de $\vec{\nabla}$ par le vecteur $\vec{u}$ avec :
$$div\vec{u} = \vec{\nabla}\,.\ \vec{u}$$

Simulation du comportement d'un fluide



Vidéo fluide

Fluide plus ou moins visqueux : terme de viscosité

Modélisation d'un fluide - Fluide vs solide

Objet déformable

- Objet solide a une forme propre
- Si on applique une force indépendante du temps à un solide élastique, il se déforme, et la déformation est indépendante du temps

Notion de fluide

- A l'inverse fluide n'a pas de forme propre
- Si on applique une force indépendante du temps à un fluide, celui-ci se déforme indéfiniment : il s'écoule
- Mécanique des fluides cherche à caractériser le champ de taux de déformation, c'est-à-dire le champs de vitesse associé à des actions extérieures (forces)

Modélisation d'un fluide - Particule fluide

Notion de particule fluide

- Particule fluide = une masse de fluide définie par un volume de taille mésoscopique
- **Masse d'une particule fluide est constante dans le temps**
- Son volume peut varier, si l'écoulement est compressible
- Forme d'une particule fluide peut varier au cours du temps, avec ou sans conservation de volume
- Pour étudier mouvement d'un fluide, on peut mesurer masse et volume d'une particule fluide, ainsi que sa position, vitesse, température, et sa pression

Modélisation d'un fluide - Description des vitesses

- Le suivi des propriétés d'un fluide ou d'une particule fluide peut se faire de deux manières différentes l'une et l'autre assez intuitives mais à ne pas mélanger
- Il existe deux types de description des vitesses :
  - Description Lagrangienne
  - Description Eulérienne

Modélisation d'un fluide - Description des vitesses

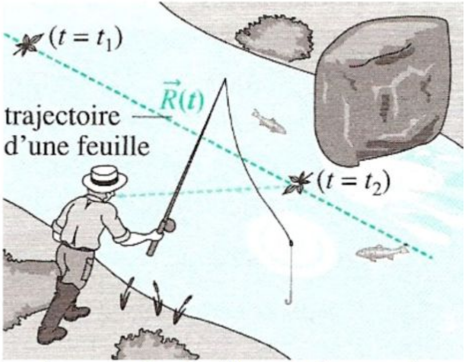
Description Lagrangienne

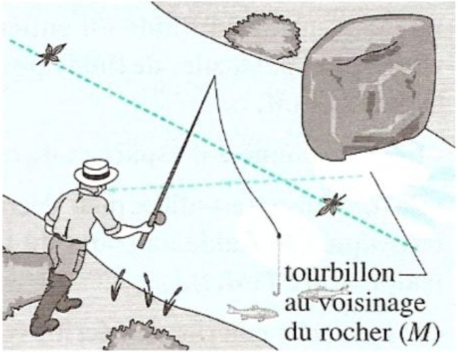
- On suit les particules de fluide au cours de leur mouvement
- Champ de vitesse est fonction de la position initiale de la particule et du temps
$$\vec{v}_{lagrange}(\vec{r}, t) = \vec{f}(\vec{r_0}, t)$$
  - Trajectoire de la particule fluide est directement fournie par la fonction $\vec{f}(\vec{r_0}, t)$

Description Eulérienne

- On donne la valeur de la vitesse en chaque point
- Vitesse en un point = vitesse de la particule fluide qui s'y trouve à l'instant considéré
- La vitesse est fonction de l'espace est du temps : $\vec{v}_{euler}(\vec{r}, t) = \vec{f}(\vec{r}, t)$
- Il faudra intégrer la vitesse sur l'intervalle de temps considéré pour obtenir la trajectoire de la particule

Modélisation d'un fluide - Description des vitesses





(gauche) Le pêcheur suivant des yeux les feuilles se place en formalisme lagrangienne
(droite) Le pêcheur observant comment s'écoule le fluide autour du rocher se place en formalise eulérien

Modélisation d'un fluide - Description des vitesses

Description eulérienne des vitesses est plus usuelle que la description lagrangienne, car il est difficile de savoir où se trouvait une particule de fluide à l'instant initial

On se placera donc dans le cadre de la **description eulérienne des vitesses**

Modélisation d'un fluide - Lois physiques

Lois de la physque appliquées à la particule fluide

- Si les lois font intervenir une dérivation, il va falloir dériver une grandeur *en suivant la particule fluide*
- On parle de dérivée particulaire : elle prend en compte les variations dues à l'évolution des champs dans le temps et au mouvement de la particule fluide

Modélisation d'un fluide - Dérivée particulaire

Dérivée particulaire d'un champ scalaire A

- $\frac{DA}{Dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + v_x \frac{\partial A}{\partial x} + v_y \frac{\partial A}{\partial y} + v_z \frac{\partial A}{\partial z} = \frac{\partial A}{\partial t} + \vec{v}.\nabla A$
- $\frac{\partial A}{\partial t}$ = terme locale
- $\vec{v}.\nabla A$ = terme convectif

Dérivée particulaire de la vitesse d'une particule fluide

- $\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v}.\nabla \vec{v}$ = accélération du fluide
- $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$: accélération locale = accélération due au fait qu'au point considéré, la vitesse eulérienne dépend du temps
- $\vec{v}.\nabla \vec{v}$: accélération convective = accélération de la particule fluide due au fait qu'elle se déplace dans l'espace et que la vitesse eulérienne n'est pas homogène

Modélisation d'un fluide

Pour alléger la notation, dans la suite du cours, les termes en gras représenteront des vecteurs

Le vecteur de vitesse $\vec{v}$ sera ainsi noté $\mathbf{v}$

Modélisation d'un fluide

Comment on caractérise un fluide ?

Caractéristiques d'un fluide

- $\mathbf{v}$: **champs de vitesse** du fluide
- ρ : **densité volumique** du fluide définie par $\rho = m/V$ impliquant $m = \rho V$
- p : **champs de pression du fluide**

  c'est la force par unité de surface que le fluide exerce sur n'importe quoi

La simulation consiste à calculer l'évolution de ces quantités au cours du temps à partir de deux équations

Equations de la dynamique des fluides

Première équation assure la conservation de la masse

Conservation de la masse

- Masse du domaine reste constante pendant son mouvement :

$$\frac{d}{dt}\, m = \frac{d}{dt} \int_{D_t} \rho \, dv = 0$$

- Si nous utilisons formules dérivées particulaires d'une intégrale de volume, nous obtenons :

$$\int_{D_t} \left(\frac{\partial}{\partial t}\, \rho + div\, (\rho\, \vec{v}) \right) dv = 0 \quad \text{ou} \quad \int_{D_t} \left(\frac{\partial}{\partial t}\, \rho + \rho\, div\, \vec{v} \right) dv = 0$$

- Nous en déduisons formes locales de la conservation de la masse :

$$\frac{\partial}{\partial t}\, \rho + \nabla \cdot (\rho\, \vec{v}) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial t}\, \rho + \rho\, \nabla \cdot \vec{v} = 0$$

Equations de la dynamique des fluides

Seconde équation issue de l'équation du mouvement

Equation de Navier-Stokes pour fluide incompressible

- Seconde équation de Newton : $\mathbf{f} = m\,\mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{f}/V = m/V\,\mathbf{a} = \mathbf{f}/V = \rho\,\mathbf{a}$
- Nous avons ainsi pour le fluide : $\rho\,\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \mathbf{f}$
- Forces volumiques **f** détermine le changement $\rho\,\frac{D\mathbf{v}}{Dt}$ des particules fluides

Equation de Navier-Stokes pour fluide incompressible

$$\rho \, \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}\right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \rho \, \mathbf{g}$$

Partie de gauche : ρ * accélération du fluide $= \rho \, \frac{D\mathbf{v}}{Dt}$

$\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}\right)$: représente l'accélération du fluide $= \frac{D\mathbf{v}}{Dt}$

Partie de droite : somme des forces $= \mathbf{f}$

- $-\nabla p$: la pression - gradient de pression - fluide essaie de s'écouler loin des régions à hautes pressions
- $\mu \nabla^2 \mathbf{v}$: la viscosité - considère la dérivée seconde des vitesses cad étalement des infos dans le champs des vitesses. Terme exclus dans le cas de l'eau ou de l'air avec μ faible où μ représente la viscosité du fluide.
- $\rho \, \mathbf{g}$: les forces extérieures (ici seulement la gravité)

  avec $\mathbf{g}$ le vecteur de densité de force par unité de volume

Equation de Navier-Stokes pour fluide incompressible

$$\rho\ \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v}\right) = -\nabla p + \mu\nabla^2\mathbf{v} + \rho\ \mathbf{g}$$

Définition de l'advection

- Advection est égale au produit scalaire du vecteur vitesse $\mathbf{v}$ par le vecteur gradient ∇ soit $\mathbf{v}\cdot\nabla$
- Cela représente le transport d'une quantité (scalaire ou vectorielle) d'un élément donné par le mouvement (et donc la vitesse) du milieu environnant
- $\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v}$: advection du champ de vitesse du fluide avec lui-même
- Si nous représentons le fluide par un ensemble de particules, toutes les caractéristiques des particules fluide sont advectées lors du déplacement du fluide au sein de l'écoulement
- Les particules se déplaçant avec le fluide, $\frac{D\mathbf{v}}{Dt}$ est tout simplement $\frac{d\mathbf{v}}{dt}$, cad que nous ne considérons pas le terme $\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v}$

Equation de Navier-Stokes pour fluide incompressible

Considérons une particule i

L'accélération de la particule i est donnée par :

$$\mathbf{a}_i = \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \frac{\mathbf{f}_i}{\rho_i}$$

$\mathbf{v}_i = \frac{d\mathbf{x}_i}{dt}$: vitesse de la particule i

$\mathbf{f}_i$: vecteur densité de force évalué à la position $\mathbf{x}_i$ de la particule i

ρ_i : la densité évaluée à la position $\mathbf{x}_i$ de la particule i

Equation de Navier-Stokes pour fluide incompressible

Considérons une particule i

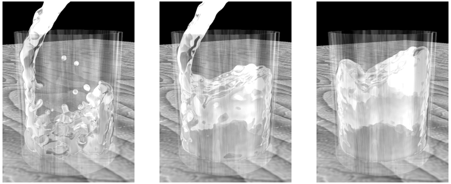
En reprenant l'équation de Navier-Stokes, nous obtenons :

$$\mathbf{a}_i = -\frac{1}{\rho_i}\nabla p_i + \frac{\mu}{\rho_i}\nabla^2 \mathbf{v}_i + \mathbf{g}$$

- $\frac{1}{\rho_i}\nabla p_i$: décrit l'accélération de la particule due aux différences de pression dans le fluide
- $\frac{\mu}{\rho_i}\nabla^2 \mathbf{v}_i$: décrit l'accélération de la particule due aux forces de friction entre les particules ayant des vitesses différentes

Simulation du comportement d'un fluide - SPH [1]

Nous allons voir comment modéliser $\mathbf{f}_i$ et ρ_i avec méthode SPH



Vidéo fluide SPH

SPH - Smoothed particle hydrodynamics

Simulation basée sur la méthode SPH publiée par Müller [1]

Fluide représenté par un ensemble de paramètres

- Densité : ρ_0 $(= 1000,0$ Kg$/m^3$ eau à 4 degrès Celsius)
- Module de Bulk : K $(= 2,2$ GPa pour l'eau)
- Viscosité : μ $(= 1,002 \times 10^{-3}$ Pa.s pour l'eau à 20 degrès)
- Choix du module de Bulk tel que la vitesse du son $c_s = \sqrt{\frac{K}{\rho_0}} >>$ vitesse de la simulation

SPH - Smoothed particle hydrodynamics

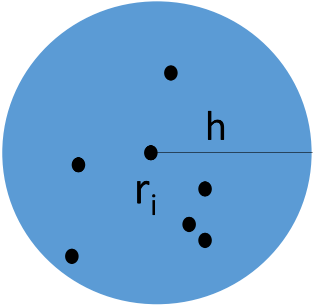
Principe de la méthode : simulation du comportement de fluides basée particules

Fluide représenté par un **ensemble de particules**

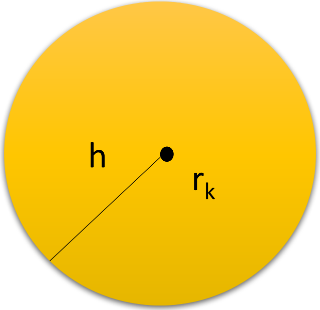
- Particules de masse m et de rayons d'interaction h
- Chaque particule i comporte des informations sur le fluide pour une petite région
  - une position $\mathbf{r}_i$
  - une vitesse $\mathbf{v}_i$
  - une densité ρ_i
- Les particules interagissent entre elles
  de façon à modéliser la dynamique d'un fluide
- Puis résolution d'un système d'équations différentielles

SPH - Smoothed particle hydrodynamics

Particule i de position $\mathbf{r}_i$ interagit avec l'ensemble N_i de particules dans le rayon h de i



Ensemble Ni de particules en interaction avec particule i



SPH - Smoothed particle hydrodynamics

Boucle de simulation issue de la dynamique Newtonienne

1. **Calcul des forces appliquées aux particules**
   - Force d'interaction entre particules : $\mathbf{f}_{ij}^{\text{interact}}(t)$
   - Force de gravité : $\mathbf{f}_g = m\ \mathbf{g}$
2. **Calcul des accélérations des particules :**
   - Principe fondamental de la dynamique : $\sum F_i = m\ \mathbf{a}_i = \rho\ V\ \mathbf{a}_i$

     $\Rightarrow \mathbf{a}_i(t) = \sum F_i(t)/m \ = \frac{1}{\rho_i} \sum_{j \in N_i} \mathbf{f}_{ij}^{\text{interact}}(t) + \mathbf{g}$
3. **Intégration pour obtenir les nouvelles vitesses et positions**
   - $\mathbf{v}_i(t+dt) = \mathbf{v}_i(t) + dt\ \mathbf{a}_i(t)$
   - $\mathbf{x}_i(t+dt) = \mathbf{x}_i(t) + dt\ \mathbf{v}_i(t+dt)$

Calcul au niveau des particules

Il faut calculer les forces d'interaction et la densité des particules

A chaque pas de temps

- **La densité de chaque particule** i est donnée par :

$$\rho_i = \frac{4m}{\pi h^8} \sum_{j \in N_i} (h^2 - r^2)^3$$

- Recherche des voisins $j \in N_i$ de la particule i
- Solution la plus simple (mais pas la plus efficace) :
  - Parcours de toutes les particules
  - Considère les particules tq : $h^2 - r^2 > 0$
    où $r^2 = \|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|^2$ distance au carré entre les particules i et j

Calcul de la densité de chaque particule

Considérons un fluide modélisé en n particules

- **Parcours de toutes les particules i de 0 à $n-1$**

  // Pour considérer la particule i elle-même
  - Accumulation dans ρ_i de $4m/\pi h^2$ (cas $r^2 = 0$)

  // Pour considérer les voisins j de i
  - **Parcours de toutes les particules j de $i+1$ à $n-1$**
    - Si $h^2 - r^2 > 0$:
      - calcul de $\rho_{ij} = \frac{4m}{\pi h^8} \sum_{j \in N_i} (h^2 - r^2)^3$
      - ajout de ρ_{ij} à ρ_i et à ρ_j

Calcul des forces d'interaction entre les particules

A chaque pas de temps

- **Force d'interaction entre particules** i **et** j définie par :

$$\mathbf{f}_{ij}^{\text{interact}} = \frac{m_j}{\pi h^4 \rho_j}(1 - q_{ij})\left[15\ K(\rho_i + \rho_j - 2\rho_0)\frac{(1-q_{ij})}{q_{ij}}\mathbf{r}_{ij} - 40\mu\ \mathbf{v}_{ij}\right]$$

- $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$
- $\mathbf{v}_{ij} = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j$
- $q_{ij} = \|\mathbf{r}_{ij}\|/h$

Symétrie des forces d'interaction avec :

$$\mathbf{f}_{ij}^{\text{interact}}(t) = -\mathbf{f}_{ji}^{\text{interact}}(t)$$

Rappel : calcul effectué ssi $h^2 - r^2 > 0$

Calcul des forces d'interaction entre les particules

Remarque par rapport au code du TP :

- Calcul direct de $\mathbf{f}_{ij}^{\text{interact}}/\rho_i$
- Modification à faire au niveau du solveur dans le cas SPH :

  `void SolveurExpl::CalculAccel_ForceGravite(...)`

  // On a calculé dans Force[i] : fij / rho_i

  // Il ne reste qu'à ajouter le vecteur **g**

  A[i] = Force[i] + g;

Simulation de fluide - code TP

Récupération du code SPH

- Base de code du TP à récupérer

Simulation à faire

- Simulation d'un fluide représenté par un ensemble de particules
- Considère que ce fluide est contenu dans une boite
- Collision à gérer avec les frontières de cette boite
- Modification du signe des vitesses des particules en collision pour qu'elles rebondissent

Vidéo fluide dans boîte

Références bibliographiques

- M. Müller, D. Charypar, and M. Gross. *Particle-based fluid simulation for interactive applications*, in Proceedings of Eurographics/SIGGRAPH Symposium on Computer Animation, 2003.
- Bindel, Fall. *Applications of Parallel Computers (CS 5220)*, 2011.