Chapitre 2

Présentation des cartes

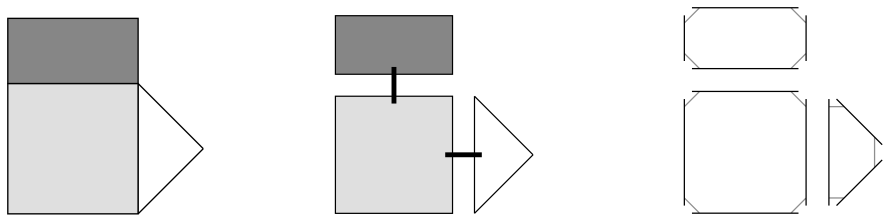
Les cartes combinatoires, qui sont à la base de ce travail, ont été initialement introduites en dimension 2 comme une extension des graphes planaires [Edm60, Tut63, Jac70], et définies ensuite par [Cor73, Cor75]. Puis, elles ont été étendues en dimension 3, sous le nom de pavage [AK88, Lie88, AK89, Spe91], avant d'être définies de manière générale en dimension n [Lie89].

Les cartes combinatoires permettent de représenter les quasi-variétés orientables de dimension n. Elles ont été généralisées [Lie89, Lie91, Lie94] afin de pouvoir représenter les quasi-variétés en dimension n, orientables ou non. Nous présentons section 2.1 nos notations et rappelons quelques notions de base, nécessaires pour la suite de ce travail. Puis nous présentons section 2.2, les cartes combinatoires, et section 2.3 les cartes généralisées, et effectuons une rapide comparaison de ces deux modèles, en montrant sous quelles conditions ils sont équivalents. Nous montrons section 2.4 comment, sous ces conditions, nous pouvons effectuer les conversions entre ces deux modèles, ce qui permet, par la suite, de travailler indifféremment avec l'un ou avec l'autre. Mais les cartes combinatoires aussi bien que les cartes généralisées représentent seulement la topologie des objets. Nous discutons section 2.5 de la géométrie et des différentes possibilités de relier un modèle géométrique aux cartes.

2.1 Rappels et notations

Soit B un ensemble non vide. Nous notons Id_B l'identité sur B. Une *permutation* sur B est une bijection de B dans B. Une *involution* sur B est une permutation f sur B telle que $f = f^{-1}$, ce qui est équivalent à $f \circ f = Id_B$.

Soit $\Phi = \{f_1, \dots, f_k\}$ des permutations sur un même ensemble B. Nous notons $< \Phi >$ le groupe de permutations engendré par Φ. C'est l'ensemble des permutations qu'il est possible d'obtenir de Φ par application de la composition et de l'inverse. Nous parlons alors de l'*orbite* de $b \in B$ relativement à Φ pour $< \Phi > (b) = \{\phi(b) | \phi \in \Phi\}$, l'ensemble des éléments de B qu'il est possible d'atteindre par application, à partir de b, de n'importe quelle suite de f_i et f_i^{-1}.



a. Un objet 2d. b. Les faces de cet objet. c. Les arêtes de ces faces.

FIG. 2.1 – La décomposition d'un objet afin d'obtenir la carte combinatoire correspondante.

2.2 Les cartes combinatoires

Les cartes combinatoires sont un modèle mathématique de représentation de la topologie des subdivisions de l'espace. Une *subdivision* de l'espace est une partition d'un espace de dimension n en $(n+1)$ sous-ensembles, où chaque élément est appelé *cellule* de dimension 0, 1, 2, 3, ... n (appelés sommets, arêtes, faces et volumes pour les dimensions 0 à 3). Nous parlons de *i-cellule* pour désigner une cellule de dimension i. Des relations de bord sont définies sur ces cellules, où le bord d'une i-cellule est un ensemble de $(j < i)$-cellules. Nous disons que deux cellules sont *incidentes* quand l'une appartient au bord de l'autre, et qu'elles sont *adjacentes* quand elles ont la même dimension i et qu'elles sont incidentes à une même $(i-1)$-cellule.

Les cartes combinatoires permettent de représenter les quasi-variétés orientables. Une *quasi-variété* en dimension n est, de manière intuitive, un objet nd que l'on peut obtenir par assemblage de n-cellules uniquement le long de $(n-1)$-cellules, et tel que chaque $(n-1)$-cellule est incidente à au plus deux n-cellules [Elt94]. Cette notion est différente de la notion de *variété* topologique de dimension n classique [Ago76, Tak91] pour laquelle chaque point doit avoir un voisinage homéomorphe à une sphère de dimension n (ou à une demi-sphère si la variété topologique est ouverte). De ce fait, une quasi-variété n'est pas forcément une variété [Lie93], excepté en dimension 2. Un objet en dimension n est considéré comme orientable si la surface de dimension $(n-1)$ représentant son bord sépare l'espace en deux parties distinctes : l'intérieur et l'extérieur de l'objet.

Les cartes combinatoires permettent de représenter les subdivisions de l'espace ainsi que les relations d'incidence. Elles sont définies de manière formelle en dimension quelconque. Nous parlons de n-carte pour une carte combinatoire de dimension n. Nous pouvons définir, de manière intuitive, les n-cartes, par décompositions successives des différentes cellules d'un objet, comme nous pouvons voir figure 2.1 pour un objet en dimension 2. Nous partons de l'objet à représenter figure 2.1.*a*. Nous commençons par représenter les faces de cet objet de manière disjointe figure 2.1.*b*, la relation d'adjacence entre deux faces étant représentée par un trait noir. Puis nous représentons les arêtes de ces faces de manière disjointe figure 2.1.*c*, en représentant les relations d'adjacences entre ces arêtes par les traits gris.

Nous avons décomposé notre objet initial en un ensemble d'éléments appelés *brins*, qui constituent l'unique élément de la définition des cartes combinatoires. Il faut ensuite

a. Représentation totale. b. Représentation implicite.

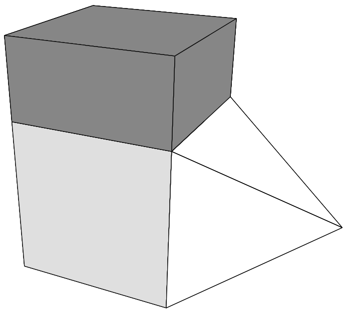
FIG. 2.2 – Deux représentations de la même carte combinatoire.

reporter les différentes relations d'adjacence sur ces éléments. La relation d'adjacence entre les arêtes est représentée par une permutation, qui pour chaque brin donne le brin suivant de la même face, en respectant l'orientation trigonométrique inverse. Cette relation est notée β_1, car elle met en relation des arêtes qui sont des cellules de dimension 1. La relation d'adjacence des faces est représentée par une involution et est notée β_2, étant donné qu'elle met en relation des cellules de dimension 2.

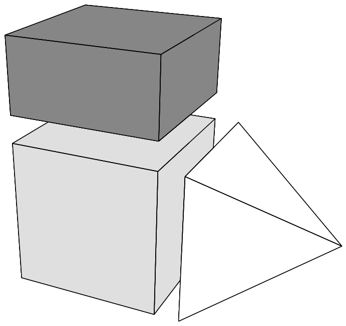
Nous pouvons voir figure 2.2.*a* la carte combinatoire de l'objet présenté figure 2.1.*a*. Sur cette figure, chaque brin est représenté par un segment de droite noir, la permutation β_1 est représentée par les flèches grises et l'involution β_2 par les flèches noires. Mais cette représentation peut devenir très vite illisible, lorsque le nombre de brins est important. Afin d'alléger les figures, il est possible de dessiner cette même carte sans représenter explicitement les applications β, comme nous pouvons le voir figure 2.2.*b*. Sur cette figure, nous représentons chaque brin par une flèche, et deux brins en relation par β_1 sont dessinés l'un à la suite de l'autre. Nous pouvons donc retrouver sans difficulté pour chaque brin son image par β_1. De même pour β_2, où deux brins en relation par β_2 seront dessinés parallèles, proches et inversés.

Cette méthode de décomposition d'un objet peut s'utiliser pour n'importe quelle dimension. Nous pouvons voir un second exemple de construction d'une carte combinatoire à partir d'un objet figure 2.3, mais cette fois pour la dimension 3. Nous décomposons l'objet présenté figure 2.3.*a* successivement pour ses volumes figure 2.3.*b*, puis pour les faces de ces volumes figure 2.3.*c* et enfin pour les arêtes de ces faces figure 2.3.*d*. Les éléments obtenus sont les brins de la carte combinatoire représentant notre objet. Il faut maintenant reporter les relations d'adjacence entre chaque cellule sur ces brins. Il existe, comme pour la dimension 2, une permutation β_1 qui met en relation un brin et le brin suivant de la même face, et une involution β_2 qui met en relation deux brins de deux faces adjacentes d'un même volume. En outre, une involution supplémentaire β_3 met en relation deux volumes adjacents.

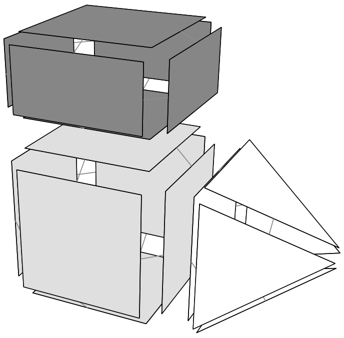
Nous pouvons voir la carte combinatoire représentée avec l'ensemble des relations entre les brins figure 2.4.*a*. Sur cette figure, nous avons représenté β_1 en vert, β_2 en bleu et β_3 en rouge. Mais comme pour la dimension 2, nous pouvons dessiner cette carte sans représenter explicitement ces relations, comme nous pouvons le voir figure 2.4.*b*, où l'on retrouve sans



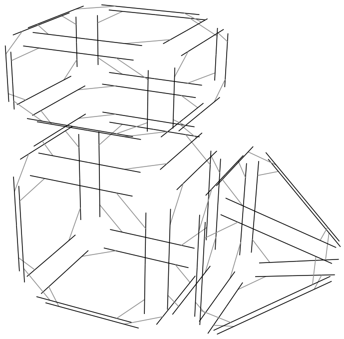
a. Un objet 3d.



b. Les volumes de cet objet.

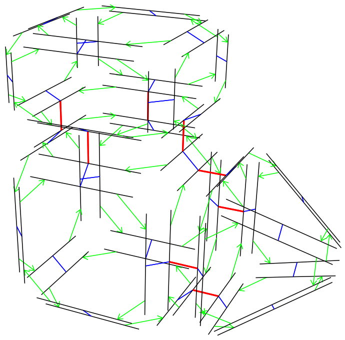


c. Les faces de ces volumes.

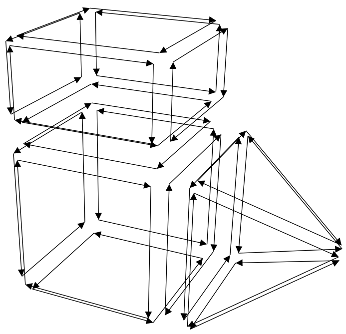


d. Les arêtes de ces faces.

Fig. 2.3 – La décomposition d'un objet 3d afin d'obtenir la carte combinatoire correspondante.



a. Représentation totale.



b. Représentation implicite.

Fig. 2.4 – Deux représentations de la même carte combinatoire.

difficulté chaque relation pour n'importe quel brin de par la manière dont est dessinée cette carte.

Cette méthode de construction permet d'appréhender les cartes combinatoires de manière intuitive. Mais dans la suite de ce travail nous avons besoin de la définition formelle des cartes combinatoires afin d'utiliser ses propriétés algébriques. Nous trouvons cette définition par exemple dans [Lie91].

Définition 1 (carte combinatoire) *Soit $n \geq 0$. Une n carte combinatoire , (ou n-carte) est une algèbre $C = (B, \beta_1, \ldots, \beta_n)$ où :*

1. *B est un ensemble fini de brins ;*
2. *β_1 est une* permutation *sur B ;*
3. *$\forall\, 2 \leq i \leq n$, β_i est une* involution *sur B ;*
4. *$\forall\, 1 \leq i \leq n-2$, $\forall\, i+2 \leq j \leq n$, $\beta_i \circ \beta_j$ est une* involution.

Les brins sont ici une notion abstraite, et servent uniquement de support pour les différentes applications. Seul β_1 est une permutation, les autres β_i sont des involutions. La dernière ligne de cette définition fixe des contraintes sur la manière dont les brins sont mis en relation afin de garantir la validité des objets représentés. Par exemple, en dimension 3, la contrainte ajoutée est que $\beta_1 \circ \beta_3$ doit être une involution, ce qui revient à dire que lorsque nous mettons deux brins de deux faces différentes en relation pour β_3, nous devons obligatoirement mettre tous les autres brins de ces deux faces en relation deux à deux par β_3.

Lorsque deux brins b_1 et b_2 sont tels que $\beta_i(b_1) = b_2$, nous disons que b_1 est *i-cousu* à b_2. Étant donné que les β_i, pour $i \neq 1$, sont des involutions, si b_1 est *i-cousu* à b_2 alors b_2 est *i-cousu* à b_1. Nous parlons de brin *i-libre* pour un brin b tel que $\beta_i(b) = b$. Ceci n'est pas vrai pour β_1, où un brin b tel que $\beta_1(b) = b$ n'est pas considéré comme libre, mais comme une boucle (une arête cousue avec elle-même).

Remarquons que chaque brin possède forcément une image pour chaque β_i, étant donné que ces β_i sont des permutations. L'opération consistant à mettre en relation deux brins pour β_i est appelée *i-couture*. Nous notons β_0 la permutation β_1^{-1}, et β_{ijk} la composition $\beta_k \circ \beta_j \circ \beta_i$. Nous disons qu'une carte est *i-fermée* si aucun de ses brins n'est i-libre. Une carte n'étant pas i-fermée est dite *i-ouverte*. Enfin, nous parlons de carte *fermée* (resp. *ouverte*) pour une carte i-fermée (resp. i-ouverte) pour toutes les dimensions de l'espace.

La notation utilisée ici est celle définie par [Lie91]. Nous la préférons à celle définie initialement par [Cor75] car elle est définie de manière générale en dimension n et car chaque β_i met en relation deux cellules de dimension i. Cette propriété est très intéressante et permet de définir des algorithmes ou des propriétés génériques pour n'importe quelle dimension, comme par exemple la définition des différentes cellules dans les cartes combinatoires.

En effet, nous avons vu, lors de nos exemples de constructions, que les cartes combinatoires représentent les objets par décompositions successives de leurs cellules. Mais la carte obtenue ne représente pas explicitement ces différentes cellules. Nous pouvons les retrouver à l'aide de la notion d'orbite présentée section 2.1.

Définition 2 (i-cellule) *Soit C une n-carte, b un brin de cette carte, et $i \in \{0, \ldots, n\}$. La i-cellule incidente à b est :*
- *Si $i = 0$: $< \beta_{02}, \ldots, \beta_{0n} > (b)$;*
- *Sinon : $< \beta_1, \ldots, \beta_{i-1}, \beta_{i+1}, \ldots, \beta_n > (b)$.*

Nous avons deux cas différents. L'un pour la définition des 0-cellules (les sommets), et l'autre pour les autres cellules. Cela provient du fait que β_1 est une permutation alors que les autres β sont des involutions : les cartes combinatoires n'ont pas une définition homogène. C'est une des raisons qui a amené Pascal Lienhardt à définir les cartes généralisées, que nous présentons section 2.3. Cette définition des cellules profite pleinement de la définition générique des cartes combinatoires, où n'importe quelle i-cellule est définie simplement en une seule fois, ce qui est moins évident avec les notations de [Cor75].

De manière intuitive, nous pouvons voir une i-cellule comme l'ensemble des brins que nous pouvons atteindre par un parcours en largeur d'origine b, en utilisant les β particuliers ainsi que leurs inverses. Les 0-cellules sont définies ainsi, car nous parcourons seulement un brin sur deux, afin de n'atteindre seulement les brins « sortants » du sommet incident à b. Les autres i-cellules sont simplement l'orbite composée de tous les β sauf β_i. En effet, comme β_i permet de changer de i-cellule, si nous l'interdisons nous restons, au cours de notre parcours, sur les brins de la même i-cellule. Remarquons enfin que chaque ensemble de i-cellule est une partition de l'ensemble des brins de la carte. Chaque brin appartient donc exactement une fois à chaque i-cellule.

Avec cette définition des i-cellules, nous pouvons définir de manière formelle la notion d'incidence dans le cadre des cartes combinatoires, sachant qu'une i-cellule est donc considérée comme un ensemble de brins.

Définition 3 (incidence) *Deux cellules C_1 et C_2 sont* incidentes *si et seulement si elles sont de dimensions différentes, et $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$.*

Avec cette définition de l'incidence, nous pouvons également définir de manière formelle la notion d'adjacence puisque celle-ci s'appuie sur la notion d'incidence.

Définition 4 (adjacence) *Deux cellules C_1 et C_2 sont* adjacentes *si et seulement si elles sont de même dimension i, et s'il existe une cellule c de dimension $i-1$ incidente à C_1 et à C_2.*

Enfin nous pouvons introduire la notion de degré d'une i-cellule, qui est primordiale pour la suite de ce travail.

Définition 5 (degré d'une i-cellule) *Le* degré d'une i-cellule *C, est le nombre de $(i+1)$-cellules distinctes incidentes à C.*

Remarquons que le degré d'une n-cellule dans un espace en dimension n n'est donc pas défini. De plus, le degré d'une i-cellule ne peut jamais être égal à 0, car il existe au moins un brin dans cette cellule qui, s'il n'est cousu à aucun autre brin, est également une $(i+1)$-cellule. Enfin, le degré d'une $(n-1)$-cellule dans un espace en dimension n, est forcément égal à 1 ou 2, étant donné que nous représentons uniquement des quasi-variétés.

a. Les arêtes obtenues figure 2.1 après décompositions successives.

b. Les sommets de ces arêtes.

Fig. 2.5 – La décomposition supplémentaire d'un objet 2d afin d'obtenir une carte généralisée.

a. Représentation totale.

b. Représentation implicite.

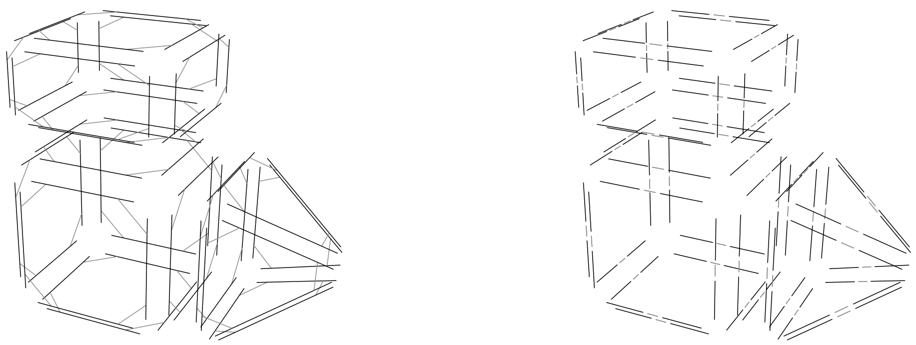
Fig. 2.6 – Deux représentations de la même carte généralisée.

2.3 Les cartes généralisées

Les cartes généralisées sont une extension des cartes combinatoires permettant de représenter les quasi-variétés orientables ou non. Leur principal avantage est que leur définition est homogène à toutes les dimensions, contrairement aux cartes combinatoires, ce qui simplifie encore les définitions et l'écriture des algorithmes.

Pour définir une carte généralisée de manière intuitive, nous appliquons le même principe de décomposition que celui utilisé pour les cartes combinatoires, mais nous effectuons une décomposition supplémentaire afin de distinguer les sommets. Si nous reprenons le premier exemple utilisé pour les cartes combinatoires présenté figure 2.1, nous avons obtenu au final la décomposition rappelée figure 2.5.a. Nous décomposons ensuite les sommets, à partir de cette décomposition en arêtes et obtenons la décomposition présentée figure 2.5.b, où les relations d'adjacence entre les sommets d'une arête sont représentées par les arcs de cercle gris. Les éléments obtenus sont les brins de la carte généralisée. Il suffit ensuite, comme pour les cartes combinatoires, de reporter les relations d'adjacence sur ces brins pour obtenir la carte généralisée présentée figure 2.6.a.

Étant donné que nous avons, pour les cartes généralisées, également séparé les sommets, nous n'avons plus besoin, comme pour les cartes combinatoires, d'utiliser une permutation pour parcourir les faces. En effet, chaque « côté » d'une arête sera lié avec l'arête suivante



a. Les arêtes obtenues figure 2.3 après décompositions successives.

b. Les sommets de ces arêtes.

FIG. 2.7 – La décomposition supplémentaire d'un objet 3d afin d'obtenir la carte généralisée correspondante.

de la face pour ce sommet. Il existe donc une involution α_0 qui met en relation les deux brins de la même face et de la même arête (représentée par les arcs de cercle gris), une involution α_1 qui met en relation les deux brins de la même face et du même sommet (représentée par les segments gris clair), et une involution α_2 qui met en relation les deux brins de la même arête et du même sommet.

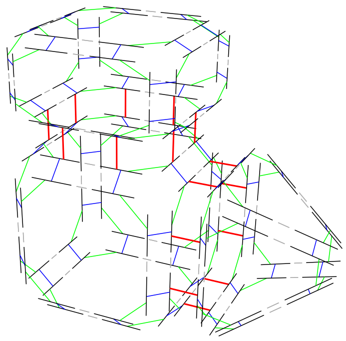
Comme pour les cartes combinatoires, nous ne représentons pas de manière explicite toutes les involutions et utilisons la représentation intuitive présentée figure 2.6.*b*. Deux brins cousus par α_0 sont représentés par un seul segment portant une petite barre en son milieu, deux brins cousus par α_1 sont représentés de manière contiguë, et deux brins cousus par α_2 sont représentés parallèles et proches, avec la barre représentant α_0 traversant les deux arêtes.

Nous pouvons voir figure 2.7 le même principe appliqué en dimension 3 à notre exemple de la figure 2.3. Pour les cartes combinatoires, nous avons obtenu au final la décomposition en arêtes rappelée figure 2.7.*a*. La décomposition des sommets des arêtes de cette figure est présentée figure 2.7.*b*, et la carte généralisée correspondante figure 2.8.*a*. Sur cette figure, nous avons représenté α_0 en gris, α_1 en vert, α_2 en bleu et α_3 en rouge. Mais comme pour les cartes combinatoires, nous préférons utiliser la représentation implicite présentée figure 2.8.*b*. En effet, bien que les α ne soient pas représentés explicitement, nous pouvons les retrouver sans difficulté de par la manière dont est dessinée la carte.

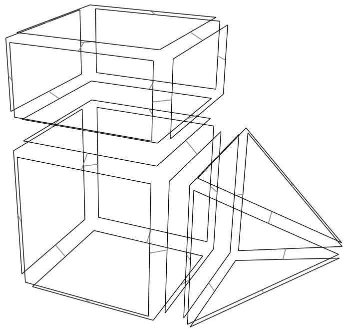
[Lie91] définit les cartes généralisées en dimension n de manière simple et générique :

Définition 6 (carte généralisée) *Soit $n \geq -1$. Une n carte généralisée, (ou n-G-carte) est une algèbre $G = (B, \alpha_0, \ldots, \alpha_n)$ où :*

1. *B est un ensemble fini de brins ;*
2. *$\forall\, 0 \leq i \leq n$, α_i est une* involution *sur B ;*
3. *$\forall\, 0 \leq i \leq n-2$, $\forall\, i+2 \leq j \leq n$, $\alpha_i \circ \alpha_j$ est une* involution.



a. Représentation totale.



b. Représentation implicite.

FIG. 2.8 – Deux représentations de la même carte généralisée.

En comparaison avec les cartes combinatoires, il existe une involution supplémentaire, et il n'y a plus de différence entre les α qui sont tous des involutions. Les n-G-cartes sont définies à partir de $n = -1$, afin de pouvoir définir la G-carte vide, composée uniquement d'un ensemble de brins sans aucune involution. Les G-cartes sont totalement homogènes, ce qui simplifie les définitions et les algorithmes comme nous pouvons le voir, par exemple, pour la définition des cellules.

Définition 7 (i-cellule) *Soit G une n-G-carte, b un brin de cette carte, et $i \in \{0, \ldots, n\}$. La i-cellule incidente à b est* $< \alpha_0, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n > (b)$.

Mais les G-cartes sont deux fois plus coûteuses en espace mémoire que les cartes combinatoires. Ce surcoût en mémoire peut être prohibitif, et c'est pour cette raison que nous avons décidé d'utiliser les cartes combinatoires, dans le cadre de ce travail. Mais nous allons par moment utiliser le formalisme des cartes généralisées pour profiter de leur définition homogène.

En effet, lorsque nous travaillons avec des G-cartes orientables, nous savons effectuer facilement la transformation permettant de passer aux cartes combinatoires, et lorsque nous travaillons avec une carte combinatoire, nous pouvons définir sans problème la carte généralisée correspondante. Nous devons donc être en mesure de savoir si une G-carte est orientable ou non. Nous trouvons la définition suivante dans [Lie91] :

Définition 8 (G-carte orientable) *Soit $G = (B, \alpha_0, \ldots, \alpha_n)$ une n-G-carte fermée. G est* orientable *si et seulement si la n-carte $HG = (B, \alpha_{01}, \ldots, \alpha_{0n})$ a exactement deux composantes connexes distinctes. G est* non orientable *sinon.*

Cette définition permet facilement de tester, étant donné une G-carte, si elle est orientable ou non. De manière intuitive, une G-carte orientable contient les deux orientations possibles de la carte combinatoire correspondante. Cette définition est valable uniquement pour les G-cartes fermées, mais s'étend aisément aux G-cartes ouvertes.

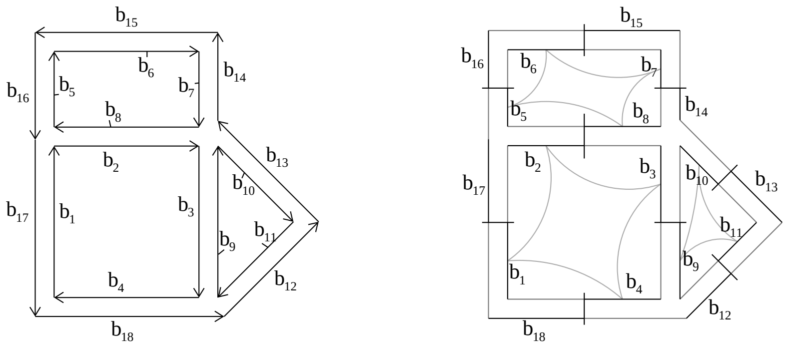


FIG. 2.9 – Un exemple de conversion de carte en G-carte.

Nous pouvons remarquer que nous n'avons pas besoin de redéfinir les notions d'incidence, d'adjacence, et de degré d'une i-cellule, dans ce cadre particulier des G-cartes. En effet, ces définitions s'appuient uniquement sur la définition d'une i-cellule, définition que nous venons de donner. Elles restent donc valides dans le cadre des G-cartes étant donné qu'elles utilisent seulement les brins appartenant aux différentes cellules.

2.4 Conversions entre carte combinatoire et carte généralisée

La conversion entre une carte combinatoire et une carte généralisée peut s'effectuer sans contrainte, étant donné que le domaine de modélisation des cartes généralisées inclut celui des cartes combinatoires. Comme pour la notion de G-carte orientable, la conversion de carte en G-carte est définie uniquement pour les cartes fermées. Mais nous pouvons étendre cette définition aux cartes ouvertes, par exemple en commençant par fermer la carte, puis en la convertissant en G-carte, et enfin en supprimant les brins n'appartenant pas à la carte originale avant sa fermeture.

Définition 9 (conversion carte → G-carte) *Soit $C = (B, \beta_1, \ldots, \beta_n)$ une n-carte fermée. Nous notons $B = \{b_1, \ldots, b_k\}$. La n-G-carte représentant la même subdivision que C est $G = (B', \alpha_0, \ldots, \alpha_n)$ où $B' = \{b_1, \ldots, b_k, c_1, \ldots, c_k\}$, où les c_i sont des nouveaux brins. Alors $\forall 1 \leq i \leq k$:*

1. $\alpha_0(b_i) = c_i$ *et* $\alpha_0(c_i) = b_i$;
2. $\alpha_1(b_i) = \alpha_0(\beta_0(b_i))$ *et* $\alpha_1(c_i) = \beta_1(b_i)$;
3. $\forall 2 \leq j \leq n : \alpha_j(b_i) = \alpha_0(\beta_j(b_i))$ *et* $\alpha_j(c_i) = \beta_j(b_i)$.

De manière informelle, pour convertir une carte en G-carte, nous « coupons » chaque brin b_i de C en deux brins b_i et c_i. Nous pouvons voir figure 2.9 un exemple de conversion d'une carte en G-carte. Chaque brin b_i de la carte reste, dans la G-carte, le brin incident à la même face, à la même arête et au même sommet. Le brin de la même face, de la même arête et du sommet opposé est c_i, qui est donc α_0-cousu à b_i. La définition des involutions de la G-carte se fait ensuite sans difficulté, en différenciant à chaque fois deux cas, suivant si le brin concerné est un brin de la carte, donc possédant des β coutures, ou un nouveau brin. De plus, il faut différencier la définition de α_1 de la définition des autres α, du fait que les cartes ne sont pas homogènes et qu'il nous faut alors considérer différemment β_1 des autres β.

La transformation inverse se fait avec encore moins de difficultés, étant donné que nous pouvons définir chaque β comme une composition de certains α. Mais pour cela, il faut nécessairement que la G-carte soit orientable. En effet, si elle ne l'est pas, il n'existe pas de carte représentant la même subdivision de l'espace. De plus, cette définition est, comme la précédente, valable uniquement pour les G-cartes fermées.

Définition 10 (conversion G-carte $\rightarrow$ carte) *Soit $G = (B, \alpha_0, \ldots, \alpha_n)$ une n-G-carte orientable et fermée, et b un brin de G. La n-carte représentant la même subdivision que G, et contenant b, est $C = (B', \beta_1, \ldots, \beta_n)$ où*
- *$B' = < \alpha_{01}, \ldots, \alpha_{0n} > (b)$;*
- *$\forall 1 \leq i \leq n$, $\forall c \in B'$, $\beta_i(c) = \alpha_{0i}(c)$*

La carte C est définie en conservant un brin sur deux de la G-carte. En effet, comme nous savons que la G-carte est orientable et fermée, l'orbite $< \alpha_{01}, \ldots, \alpha_{0n} > (b)$ va contenir un brin sur deux de la G-carte, ce qui n'est pas le cas sinon. La définition des différentes applications β sur cet ensemble de brins se fait sans problème, chaque β_i étant simplement la composition de α_0 avec α_i. Remarquons que la carte ainsi définie représente une orientation de la G-carte. Il est possible de définir la carte représentant l'autre orientation possible, en prenant comme brin de départ pour la définition de B', un brin n'appartenant pas à la première carte.

Ces méthodes de conversion nous permettent, dans la suite de cette présentation, de travailler indifféremment avec une carte combinatoire ou une carte généralisée orientable. Cela nous permettra, par exemple, de travailler avec des G-cartes pour définir formellement l'opération de fusion en dimension quelconque, afin de profiter de leur homogénéité, puis de travailler avec des cartes combinatoires pour définir nos algorithmes d'extractions, qui ont besoin d'être implantés avec le modèle des cartes combinatoires pour des contraintes d'espace mémoire.

2.5 Plongement des cartes

Les cartes combinatoires et les cartes généralisées, représentent seulement la topologie des objets. Mais la plupart des applications ont besoin également de représenter la géométrie de ces objets, par exemple pour les afficher, pour calculer des caractéristiques de forme, de taille... Il nous faut donc associer un modèle géométrique aux cartes. Pour cela, nous pouvons associer un élément géométrique de dimension i à chaque i-cellule de la carte. Nous appelons *plonger* l'opération qui consiste à associer un modèle géométrique à un modèle topologique, et nous parlons du *plongement* d'un modèle topologique pour désigner le modèle géométrique associé.

Par exemple, en dimension 2, nous pouvons associer à chaque sommet topologique (0-cellule) les coordonnées d'un sommet géométrique. Ce plongement peut suffire pour représenter totalement la géométrie des objets modélisés, si chaque arête de la carte est plongée par un segment de droite.

Mais dans le cas général, en dimension n, lorsqu'il n'y a pas de lien entre le plongement des cellules de dimension i et le plongement des cellules de dimension $i-1$, nous devons alors plonger chaque i-cellule topologique par un objet géométrique ouvert de dimension i. Cet objet doit être ouvert, car le plongement du bord de la i-cellule topologique est représenté par les plongements de ses $(i-1)$-cellules topologiques incidentes. Nous parlons plus en détail, dans la suite de cette présentation, du plongement dans le cadre plus précis de ce travail et présentons quelques modèles géométriques pouvant s'associer à notre utilisation particulière des cartes.