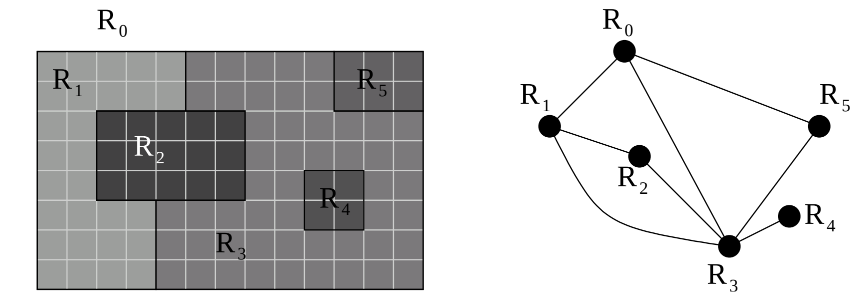
Chapitre 3

Quelques modèles en dimension 2

Le but principal de notre travail est de définir un modèle permettant la représentation d'image 3d segmentées en régions. Ce problème a été beaucoup étudié en dimension 2, et de nombreuses solutions ont été proposées. Nous avons donc commencé, dans un premier temps, à étudier ces modèles afin de connaître les solutions envisagées, mais également afin de retenir celles qui étaient les plus susceptibles d'être étendues en dimension supérieure.

Nous présentons ici quelques-uns de ces modèles. Dans un premier temps, section 3.1, nous présentons le Region Adjacency Graph (RAG) [Ros74]. C'est le premier modèle de représentation d'images 2d segmentées en régions à avoir été défini, et également la source d'inspiration de nombreux modèles différents. Nous présentons ensuite, section 3.2, les graphes duaux [Kro95, MK95, KM95, Wil95] qui sont une évolution du RAG palliant plusieurs de ses problèmes. Ensuite, section 3.3, nous présentons les cartes discrètes qui sont un modèle de représentation d'images 2d segmentées en régions, utilisant les cartes combinatoires et les frontières interpixel [Dom92, Bru96, BD97, BDB97, BB98, BD99]. Ce modèle est très proche de celui que nous présentons section 3.4, qui est le graphe topologique des frontières (TGF) [Fio95, Fio96, AFG99] également basé sur les cartes combinatoires. Ce sont ces deux derniers modèles qui ont été à la base de notre travail, même si nous avons dû redéfinir une variante de ces modèles en dimension 2, afin de pouvoir ensuite l'étendre plus facilement en dimension 3.

Nous présentons ici uniquement les quelques modèles qui sont, soit très proches de nos préoccupations, soit les principaux acteurs qui ont fait évoluer le monde de la modélisation et de la représentation d'images. Mais il existe de nombreux autres modèles, proposant pour certains des solutions qui peuvent être vues comme des variantes des quatre modèles présentés ici comme [PJ97], et d'autres qui proposent des solutions différentes. Par exemple le *medial axis transform* (MAT) [RP68, RK82] qui consiste à représenter une image par un ensemble de blocs de valeurs uniformes. Mais ce modèle ne représente pas les frontières des régions de manière explicite. De nombreuses autres solutions ont défini des modèles hiérarchiques, comme par exemple les pyramides [Bro82, PRW82, Kro95], les quadtrees [Sam80, DRS80, Sam84], ou plus récemment les pyramides combinatoires [BK99, BK00, BK01]. Ces modèles permettent la représentation d'une image à plusieurs niveaux, ce qui est intéressant notamment pour une représentation multi-échelle. Mais la plupart de ces



a. Une image segmentée en régions. b. Le RAG correspondant.

FIG. 3.1 – Une image 2d segmentée en régions et le RAG correspondant.

modèles ne permettent pas des mises à jour efficaces lors d'opérations de modifications de l'image, et nécessitent parfois de reparcourir l'ensemble du modèle afin d'accéder ou de modifier une information. Ces modèles sont plus éloignés de nos préoccupations car ils ne représentent pas de manière explicite le bord des régions de l'image.

De nombreux autres modèles de représentation par bords ont été définis, mais du point de vue topologique et non plus dans le cadre précis de la représentation d'images segmentées en régions. En dimension 2 sont définis par exemple les *winged-edge* ou arêtes ailées [Bau75, Wei85] et une de ses extensions, le graphe d'adjacence des faces [ADFF85] ou encore les *quad-edge* [GS85]. En dimension 3, nous pouvons trouver les *radial-edge* [Wei88] ou une extension des quad-edge, les *facet-edge* [DL87]. Enfin en dimension n, nous pouvons trouver les *incidence posets* [Bri89], le graphe d'incidence [Ede87] et les *selective geometric complexes* [RO89]. [Lie91] montre que ces modèles sont divisés principalement en deux classes : les graphes d'incidences et les modèles topologiques ordonnés. De plus, il effectue une comparaison entre quelques-uns de ces modèles, et montre qu'ils sont globalement équivalents en regard de la classe des objets qu'ils peuvent modéliser.

Ces quelques références montrent que le nombre de modèles existants est très important. Mais nous nous intéressons à un cadre beaucoup plus restreint que le domaine de modélisation de plusieurs de ces modèles. C'est pour cette raison que nous présentons uniquement les quatre modèles représentant les images segmentées en régions que nous avons déjà introduits en début de ce chapitre : le RAG, les graphes duaux, les cartes discrètes et le TGF.

3.1 Le RAG

Le RAG est une des premières structures permettant de représenter les images 2d segmentées en régions, en rendant compte des relations d'adjacence entre les différentes régions de l'image. Il a comme avantage principal d'être défini très simplement. En effet, c'est un graphe où chaque sommet représente une région de l'image, et une arête est présente entre deux sommets si les deux régions correspondantes sont adjacentes. La figure 3.1 présente une image segmentée en régions et le RAG correspondant.

Nous pouvons voir sur cet exemple, l'image segmentée en régions figure 3.1.a, image que nous utilisons tout au long de ce chapitre pour comparer les différents modèles, et le RAG correspondant à cette image figure 3.1.b. Nous considérons que l'image est entourée par une région infinie, R_0, contenant l'ensemble des pixels n'appartenant pas à l'image. Le RAG représente donc les relations d'adjacences des régions de l'image. Ses principaux avantages sont qu'il :

- est simple à définir ;
- peut s'étendre sans problème en dimension quelconque ;
- peut être facilement mis à jour, lorsque des régions de l'image sont fusionnées.

Mais il est facile de voir sur notre exemple que ce graphe possède également plusieurs inconvénients :

- il ne différencie pas la relation d'adjacence et d'inclusion ;
- il ne représente pas l'adjacence multiple. Sur notre exemple, la région R_1 est adjacente deux fois à la région R_3, information qui n'est pas représentée dans le RAG ;
- il n'est pas représentatif de l'image : deux images topologiquement différentes pourront avoir deux RAG identiques.

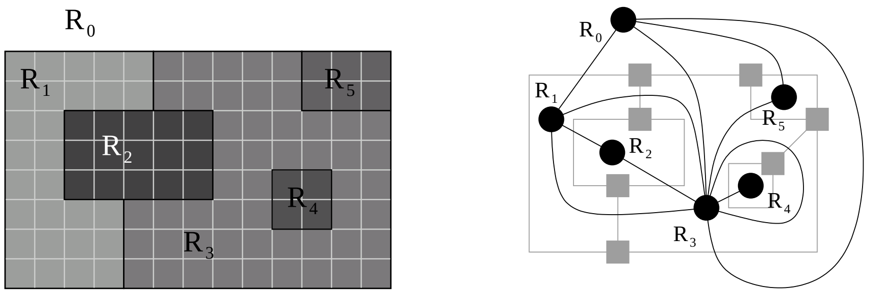
Ces inconvénients ont amené [Kro95, MK95, KM95, Wil95] à proposer une évolution du RAG, les graphes duaux.

3.2 Les graphes duaux

L'idée principale des graphes duaux est de conserver deux graphes en parallèle, une extension du RAG d'un côté, et son graphe dual de l'autre. Le premier graphe est une simple extension du RAG, qui est maintenant un multi-graphe, rendant donc compte des adjacences multiples, avec également des boucles lorsqu'une région contient des régions incluses. Ces boucles proviennent du fait que le graphe primal et son dual doivent tous deux être connexes. De ce fait, dans le dual, une arête fictive permet à la région incluse d'être reliée à la région la contenant. Cette arête devient, dans le primal, une boucle autour de la région contenant l'autre région.

Nous pouvons voir figure 3.2 un exemple de graphe dual de notre image d'exemple. Sur cet exemple, figure 3.2.b, nous avons représenté en noir le graphe primal, et en gris le graphe dual. Il est facile de voir que le graphe primal est l'extension du RAG tenant compte des adjacences multiples, il y a maintenant deux arêtes entre R_1 et R_3, et représentant correctement la relation d'inclusion au moyen de boucles, la région R_3 qui contient la région R_4 possède une boucle sur son sommet qui entoure le sommet de R_4.

Sur le graphe gris, nous pouvons noter la présence d'une *arête fictive* qui relie le bord de la région R_4 avec le bord de la région R_3. Cette arête est fictive car elle ne représente pas, contrairement aux autres arêtes de ce graphe, une frontière entre deux régions distinctes. Elle est nécessaire afin de conserver le graphe gris connexe. Nous pouvons noter que dans le graphe primal, représenté en noir, cette arête fictive devient la boucle autour de R_3. Cette boucle nous permet de différencier la relation d'inclusion et la relation d'adjacence. Mais pour cela, les deux graphes doivent être planaires, et il faut pouvoir reconnaître une boucle qui entoure géométriquement une autre région.



a. Une image segmentée en régions. b. Le graphe dual correspondant.

FIG. 3.2 – Une image 2d segmentée en régions et le graphe dual correspondant.

Ce modèle répond correctement aux problèmes du RAG. Ses principaux avantages sont qu'il :
- code correctement la relation d'inclusion ;
- représente toute la topologie des objets, y compris les adjacences multiples ;
- est donc caractéristique d'une image.

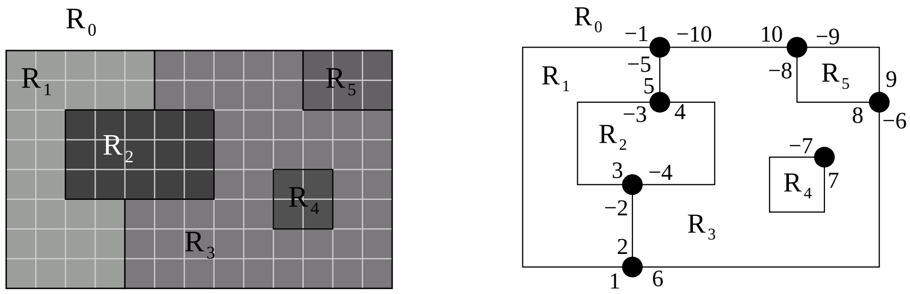
Mais il est facile de voir sur notre exemple que ce graphe possède également plusieurs inconvénients :
- il faut maintenir en parallèle deux graphes, ce qui complique et multiplie par deux les mises à jour ;
- il faut analyser la géométrie des arêtes afin de reconnaître la relation d'inclusion, c'est-à-dire trouver si une boucle entoure géométriquement un sommet du graphe ;
- la présence d'arêtes fictives et de boucles n'est pas totalement satisfaisante. En effet, ces arêtes obligent à avoir des traitements différents pour les arêtes « normales » et pour les arêtes fictives lors des différentes consultations ou mises à jour de ce modèle.

Pour ces raisons, les graphes duaux, même s'ils apportent une solution aux problèmes posés par le RAG, ne sont pas totalement satisfaisants. De plus, un autre problème, et non des moindres, peut être imputé aux graphes duaux : ils ne sont pas extensibles facilement en dimension supérieure, ce qui est le but principal de ce travail. Ce sont ces inconvénients qui ont fait que de nombreux travaux se sont poursuivis dans ce domaine de recherche afin de définir un modèle résolvant ces problèmes.

3.3 Les cartes discrètes

Ce modèle est le résultat du travail de thèse de Jean-Philippe Domenger [Dom92], qui a utilisé les cartes combinatoires afin de représenter les images 2d segmentées en régions. Les cartes combinatoires permettent de rendre compte de la topologie, mais ce modèle représente également la géométrie, en représentant les frontières interpixel de l'image.

Nous pouvons voir un exemple de carte discrète représentant les frontières interpixel de notre image segmentée en régions figure 3.3. La notation utilisée ici est celle définie par [Cor73, Cor75]. En dimension 2, une carte combinatoire est définie avec un ensemble de brins, une permutation σ et une involution α. Cette dernière involution est représentée en



a. Une image segmentée en régions. b. La carte discrète correspondante.

FIG. 3.3 – Une image 2d segmentée en régions et la carte discrète correspondante.

numérotant les brins par des entiers positifs et négatifs, tel que pour tout brin b, $\alpha(b) = -b$. La permutation σ représente les sommets de la carte topologique, orientés dans le sens trigonométrique inverse. Figure 3.3.b nous avons par exemple $\sigma(-1) = -5$, $\sigma(-5) = -10$ et $\sigma(-10) = -1$.

Ces notations permettent de représenter les cartes combinatoires en dimension 2, de manière duale de notre définition présentée section précédente. En effet, ici la permutation représente les sommets, alors que pour notre notation elle représente les faces. Mais la conversion entre les deux notations se fait sans aucun problème. Lorsque nous avons une 2-carte $C = (B, \beta_1, \beta_2)$, la carte combinatoire utilisant les notations de Cori est simplement définie par $C' = (B, \sigma, \alpha)$, avec $\sigma = \beta_2 \circ \beta_1$ et $\alpha = \beta_2$. La transformation inverse se définit également sans aucun problème. Lorsque nous avons une carte $C = (B, \sigma, \alpha)$, la 2-carte correspondante pour nos notations est simplement $C' = (B, \beta_1, \beta_2)$ avec $\beta_1 = \alpha \circ \sigma$ et $\beta_2 = \alpha$. Cette carte est notée $C = (B, \varphi, \alpha)$ avec les notations de Cori, où $\varphi = \beta_1$ et $\alpha = \beta_2$.

Cette carte combinatoire représente les frontières interpixel de l'image 2d segmentée en régions, comme nous pouvons le vérifier sur notre exemple. Chaque arête de la carte représente une frontière interpixel entre deux régions adjacentes, et les adjacentes multiples sont correctement représentées. Ce modèle étant basé sur les cartes combinatoires, il représente donc totalement la topologie des objets de l'image. En effet, nous pouvons retrouver facilement toutes les relations d'adjacence ainsi que toutes les relations d'incidence entre n'importe quelles cellules de l'image.

Le seul problème subsistant avec les cartes combinatoires est la représentation de la relation d'inclusion. En effet, nous pouvons voir figure 3.3.b que nous avons deux composantes connexes distinctes dans la carte combinatoire, étant donné que nous avons la région R_4 qui est totalement incluse dans la région R_3. Afin de conserver cette information, un arbre d'inclusion est ajouté à la carte combinatoire, permettant de rendre compte de toutes les relations d'inclusion, et de positionner les différentes composantes connexes de la carte les unes par rapport aux autres.

Ce modèle répond, comme les graphes duaux, à tous les problèmes du RAG. Mais il présente des avantages supplémentaires qui résolvent également les problèmes de ces derniers. En effet, les cartes combinatoires ont l'avantage de conserver les mêmes informations que les graphes duaux, mais avec une seule et même structure. Nous n'avons donc ici plus besoin de conserver deux structures en parallèles, ce qui évite des doubles mises à jour. De plus, les cartes combinatoires ajoutent la notion de face, notion qui n'apparaît pas pour les graphes duaux. Il n'y a pas d'élément fictif, et donc les traitements en sont plus homogènes. La relation d'inclusion est codée correctement, et même si c'est dans une structure annexe, l'arbre d'inclusion, cela facilite les parcours et les mises à jour en évitant d'avoir, pour chaque traitement, des cas particuliers afin de gérer les éventuels éléments fictifs. Enfin, il est facile d'associer à ce type particulier de carte, un modèle géométrique rendant compte de la forme des régions de l'image. Pour cela, il est possible d'associer à chaque arête de la carte une suite de 1-cellules représentant la courbe de dimension 1 correspondant à la frontière entre les deux régions. Mais d'autres solutions sont envisageables, comme nous pourrons le voir dans la suite de ce travail.

3.4 Le TGF

Le graphe topologique des frontières (TGF) est un des résultats du travail de thèse de Christophe Fiorio [Fio95]. Comme pour le modèle précédent, ce modèle est basé sur les cartes combinatoires, et représente les frontières interpixel des régions de l'image.

Ce TGF est en fait une carte combinatoire avec un arbre d'inclusion des régions, de manière totalement similaire au modèle présenté à la section précédente. Il est très intéressant de constater que les deux approches de Jean-Philippe Domenger et de Christophe Fiorio, les ont amenés à la définition de structures totalement équivalentes. Il existe seulement deux petites différences entre ces deux structures :

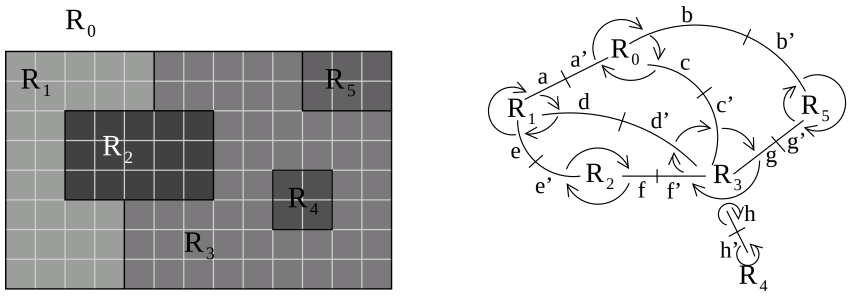
- l'arbre d'inclusion du TGF est représenté de manière implicite, chaque région conservant son bord extérieur et une liste de ses éventuels bords intérieurs, ces listes étant simplement une manière particulière de représenter un arbre ;
- pour représenter le TGF, au lieu de dessiner les brins d'une région sur les frontières interpixel correspondantes, ils sont dessinés de manière similaire au RAG, entre les sommets représentants les régions de l'image.

Mais ces deux différences sont minimes. En effet, le fait de coder l'arbre d'inclusion avec des listes, ou de manière plus classique n'a pas de conséquences sur l'utilisation de la structure. La deuxième différence porte simplement sur la manière habituelle de représenter les deux modèles, et n'a donc clairement aucune conséquence sur leur définitions. Le TGF est défini par exemple dans [Fio95], par :

Définition 11 (TGF) *Le* graphe topologique des frontières *est le quadruplet* $G = (V, D, \alpha, \sigma)$ *avec :*

- V *est l'ensemble des régions de l'image segmentée, plus une région infinie ;*
- D *est l'ensemble des brins de la carte combinatoire ;*
- α *est une involution sur* D *;*
- σ *est une permutation sur* D*.*

Chaque brin connaît sa région d'appartenance, et chaque région conserve un brin de son bord extérieur, et une liste de brin, un par bord intérieur. Ces informations permettent



a. Une image segmentée en régions. b. Le TGF correspondant.

FIG. 3.4 – Une image 2d segmentée en régions et le graphe topologique des frontières correspondant.

de basculer entre la carte combinatoire proprement dite, et l'arbre d'inclusion afin de retrouver, par exemple, l'ensemble des régions incluses dans une région particulière. L'arbre d'inclusion est donc représenté uniquement par les différentes listes de brins représentant les éventuels bords intérieurs.

Lorsque nous avons un graphe topologique des frontières, définir la carte combinatoire correspondante, avec nos notations, se fait sans problème. En effet, contrairement au modèle précédent, nous avons simplement $\beta_1 = \sigma$ et $\beta_2 = \alpha$. Le TGF conserve la même permutation et la même involution que notre notation des cartes combinatoires, l'unique différence se situant au niveau de la représentation habituelle et non pas de la structure.

Nous pouvons voir un exemple de graphe topologique des frontières représentant la topologie de notre image segmentée en régions figure 3.4. L'involution α est représentée de manière induite, deux brins cousus par cette involution étant dessinés bout à bout, avec une petite barre en travers de l'arête. La permutation σ est représentée par les arcs de cercles orientés autour des régions. Nous pouvons voir que la région R_3 possède deux permutations distinctes, l'une pour représenter son bord extérieur : (f', d', c', g), et l'autre pour représenter son bord intérieur, composé uniquement d'un seul brin : (h), qui est donc cousu sur lui-même pour σ. En effet, il existe une seule et unique frontière entre R_3 et R_4, ce qui se traduit donc dans la carte combinatoire par un brin cousu sur lui-même. Si la région R_3 incluait d'autres régions, elle aurait alors autant de permutations distinctes que de composantes connexes totalement incluses, c'est-à-dire une par bord intérieur.

3.5 Conclusion

L'étude de ces quelques modèles nous a permis de mieux comprendre les différents problèmes que pose la définition d'un modèle de représentation d'image, et de voir quelles étaient les solutions habituellement utilisées afin de les résoudre. Nous en avons conclu que les modèles basés sur les cartes combinatoires semblaient être les plus intéressants à étudier afin d'en envisager l'extension en dimension supérieure.

En effet, les cartes combinatoires sont définies de manière formelle en dimension n, et sont utilisées depuis de nombreuses années en modélisation géométrique [Ber92, BDFL92, Lie97]. Même si les problématiques ne sont pas identiques, de nombreux points communs apparaissent et des thématiques connexes indiquent que nous avons tout intérêt à étudier les liens existants entre ces différents travaux.

De plus, les avantages des cartes combinatoires ou généralisées sont nombreux. Leur définition est simple et générique. Différents travaux ont défini des algorithmes de traitements efficaces et ont montré que ces algorithmes pouvaient de surcroît être écrits simplement. Enfin, bien que ces cartes soient uniquement un modèle topologique, il est facile de leur associer un modèle géométrique, point très important pour notre travail étant donné que nous voulons absolument traiter les deux modèles parallèlement.

Ces nombreux avantages nous ont conduit à nous intéresser en priorité aux deux derniers modèles présentés : les cartes discrètes et le TGF, qui sont deux modèles de représentation d'images 2d segmentées en régions basés sur les cartes combinatoires. Mais cette étude nous a amené à constater que la définition de ces deux modèles ainsi que les algorithmes permettant leurs extractions à partir d'une image étaient très complexes et techniques, et rendaient très difficile leurs extensions en dimension supérieure. Nous avons donc commencé à étudier ce problème de la définition d'un modèle de représentation d'images segmentées tout d'abord en dimension 2, afin de définir un nouveau modèle, ou de redéfinir de manière différente un modèle existant, en ayant comme préoccupation principale de pouvoir l'étendre en dimension supérieure.