Chapitre 6

Fusion et évolution des caractéristiques topologiques

Chapitre 5, nous avons défini la carte topologique en dimension 3. Cette définition utilise l'opération de fusion, que nous avons présentée et pour laquelle nous avons donné les différents algorithmes. Nous définissons maintenant section 6.1 l'opération de fusion de manière algébrique. Cela permet de prouver que cette opération est valide, et formalise son cadre d'utilisation. Pour cela, nous utilisons le formalisme des cartes généralisées, (présentées section 2.3) afin de profiter de leur homogénéité qui simplifie les différents cas à traiter. Sachant que les cartes combinatoires et les cartes généralisées sont équivalentes lorsque les subdivisions considérées sont orientables et fermées, cela valide cette étude pour les cartes combinatoires fermées. Nous nous intéressons ici uniquement à la dimension 3, la dimension 2 étant plus simple à traiter et qu'elle peut être considérée comme un cas particulier de la dimension 3.

Section 6.2 nous nous intéressons aux fusions dans le cadre de la construction de la carte topologique. Nous avons vu que pour construire cette carte, nous partons de la carte « complète », le niveau 0, où chaque volume représente un voxel de l'image. Nous effectuons ensuite certaines fusions, suivant les contraintes déjà présentées, et arrivons finalement à la carte topologique. Nous allons considérer la suite des fusions effectuées pour arriver à cette carte, et montrer qu'il est possible de la « réorganiser » afin de commencer par les fusions de plus grande dimension, tout en arrivant finalement au même résultat.

Cette possibilité de « réorganisation » est importante, car elle nous permet section 6.3 d'étudier l'évolution des caractéristiques topologiques lors de l'opération de fusion, en étudiant un nombre de cas raisonnable. Cela nous permet de prouver que la carte topologique conserve bien toute les informations topologiques des objets qu'elle représente, ce qui est primordial pour valider ce modèle. Cela nous permet également de prouver que les 5 niveaux de simplification représentent tous les mêmes informations topologiques. Enfin, cette étude exhaustive des cas pouvant se produire pour l'opération de fusion permet de nous assurer d'avoir traité tous les cas de déconnexion possibles.

6.1 Définition algébrique de l'opération de fusion

Nous avons déjà présenté l'opération de fusion lors de la définition de la carte topologique en dimensions 2 et 3. Nous rappelons ici brièvement les points importants. L'opération de fusion consiste à remplacer une ou deux $(i+1)$-cellules adjacentes par une seule $(i+1)$-cellule représentant l'union des deux. Cette modification s'effectue en supprimant la i-cellule incidente aux deux $(i+1)$-cellules, et en mettant à jour les liaisons entre ces cellules. Nous parlons ici de fusion de dimension i lorsque nous supprimons une i-cellule, et disons que nous fusionnons les deux $(i+1)$-cellules le long de cette i-cellule. De manière générale, en dimension n, il existe exactement $n-1$ types de fusions possibles, qui sont les fusions de dimension 0 à $n-1$.

Pour pouvoir effectuer la fusion de deux $(i+1)$-cellules le long d'une i-cellule, nous fixons des contraintes sur cette i-cellule afin de pouvoir garantir la validité de la fusion. Cette i-cellule doit être *localement de degré deux*. Intuitivement, le degré local d'une i-cellule est le nombre de demi-$(i+1)$-cellules qui lui sont incidentes. L'avantage de cette notion est de regrouper les deux cas où la i-cellule est de degré 1 ou 2. Cela évite de les différencier, sachant que la fusion est identique dans les deux cas.

Définition 33 (Cellule localement de degré deux) *Soit une i-cellule $C =< \{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} - \alpha_i > (b)$, $0 \leq i \leq 2$. Nous notons*
- $E_1 =< \{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} - \{\alpha_i, \alpha_{(i+1)}\} > (b)$;
- $E_2 =< \{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} - \{\alpha_i, \alpha_{(i+1)}\} > (\alpha_{(i+1)}(b))$.

La i-cellule C est localement de degré deux *ssi*

1. $E_1 \cup E_2 = C$;
2. $E_1 \cap E_2 = \emptyset$;
3. $\forall b \in C$,
   - *Si* $i = 0$, $\alpha_{12}(b) = \alpha_{21}(b)$;
   - *Si* $i = 1$, $\alpha_{23}(b) = \alpha_{32}(b)$.

De manière intuitive, les deux ensembles E_1 et E_2 correspondent aux deux demi-i-cellules incidentes à C. Si C est localement de degré deux, alors ces deux demi-i-cellules doivent être disjointes, sinon C serait localement de degré 1, et leur union doit être C, sinon C serait localement de degré supérieur à 2. La troisième contrainte est nécessaire afin d'être sûr de pouvoir effectuer cette fusion, et conserver les contraintes des G-cartes après celle-ci. Remarquons que C, E_1 et E_2 ne peuvent jamais être des ensembles vides, étant donné qu'ils contiennent au moins chacun le brin b. Par la suite, nous notons α_j et α_k les deux éléments de $\{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} - \{\alpha_i, \alpha_{(i+1)}\}$, ce qui permet de simplifier l'écriture des deux ensembles E_1 et E_2. Nous présentons maintenant quelques propriétés découlant de la définition des cellules localement de degré deux. Ces propriétés sont nécessaires pour la preuve de la validité de l'opération de fusion.

Remarque *Soit C une i-cellule localement de degré deux. Pour tout brin b de C nous avons $\alpha_{(i+1)}\alpha_j(b) = \alpha_j\alpha_{(i+1)}(b)$ et $\alpha_{(i+1)}\alpha_k(b) = \alpha_k\alpha_{(i+1)}(b)$.*

Cela peut se vérifier exhaustivement pour les trois différentes valeurs de i possibles.

- Pour $i = 0$: $\alpha_j = \alpha_2$ et $\alpha_k = \alpha_3$. Alors, $\alpha_1\alpha_2 = \alpha_2\alpha_1$ est vérifiée par la définition des i-cellules localement de degré 2, et $\alpha_1\alpha_3 = \alpha_3\alpha_1$ est toujours vérifiée par définition des G-cartes.
- Pour $i = 1$: $\alpha_j = \alpha_0$ et $\alpha_k = \alpha_3$. Alors $\alpha_2\alpha_0 = \alpha_0\alpha_2$ est vraie par définition des G-cartes, et $\alpha_2\alpha_3 = \alpha_3\alpha_2$ est donnée par la définition des i-cellules localement de degré 2.
- Pour $i = 2$: $\alpha_j = \alpha_0$ et $\alpha_k = \alpha_1$. Les deux contraintes $\alpha_3\alpha_0 = \alpha_0\alpha_3$ et $\alpha_3\alpha_1 = \alpha_1\alpha_3$ sont toujours vraies par définition des G-cartes.

Propriété 7 *Soit C une i-cellule localement de degré 2. Alors $\forall b \in C$, b n'est pas $(i+1)$-libre.*

Preuve de la propriété 7 *Soit $C =< \{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} - \alpha_i > (b)$ une i-cellule localement de degré 2. Si b est $(i+1)$-libre, alors nous avons $E_1 = E_2$ ce qui contredit $E_1 \cap E_2 = \emptyset$. Comme $\alpha_{(i+1)}\alpha_j(b) = \alpha_j\alpha_{(i+1)}(b)$, si $\alpha_j(b) \neq b$, alors $\alpha_j(b)$ n'est pas $(i+1)$-libre. Il en est de même pour $\alpha_k(b)$. Nous pouvons effectuer cette démonstration de proche en proche, et finalement prouver que chaque brin de E_1 et de E_2 n'est pas $(i+1)$-libre, et donc que chaque brin de C ne l'est pas non plus.* □

Propriété 8 *Soit C une i-cellule localement de degré 2. Alors $\forall b \in C$, nous avons $b \in E_1 \Rightarrow \alpha_{(i+1)}(b) \in E_2$ et $b \in E_2 \Rightarrow \alpha_{(i+1)}(b) \in E_1$.*

Preuve de la propriété 8 *Soit b_1 un brin de E_1. Nous avons $E_1 =< \alpha_j, \alpha_k > (b)$, et $E_2 =< \alpha_j, \alpha_k > (\alpha_{(i+1)}(b))$. Supposons $b_2 = \alpha_{(i+1)}(b_1) \in E_1$. Alors $\alpha_j(b_2) \in E_1$ par définition de E_1. Étant donné que $\alpha_{(i+1)}\alpha_j(b_1) = \alpha_j\alpha_{i+1}(b_1)$, comme $\alpha_j(\alpha_{(i+1)}(b_1)) \in E_1$, alors $\alpha_{(i+1)}(\alpha_j(b_1)) \in E_1$. De manière similaire, nous pouvons montrer que $\alpha_{(i+1)}(\alpha_k(b_1)) \in E_1$. En effectuant ce raisonnement de proche en proche, nous montrons que $\forall b \in E_1$, nous avons $\alpha_{(i+1)}(b) \in E_1$. Dans ce cas, comme $C =< \alpha_j, \alpha_k, \alpha_{(i+1)} > (b)$, nous avons $E_1 = C$, et comme $E_2 \neq \emptyset$ cela contredit $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ et le fait que C est une i-cellule localement de degré 2. Nous pouvons effectuer cette démonstration de manière symétrique pour montrer que $\forall b \in E_2$, $\alpha_{(i+1)}(b) \in E_1$.* □

Remarque *Soit C une i-cellule localement de degré 2. Alors $\forall b \in C$, si nous notons*
- $E'_1 =< \{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} - \{\alpha_i, \alpha_{(i+1)}\} > (b)$
- $E'_2 =< \{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} - \{\alpha_i, \alpha_{(i+1)}\} > (\alpha_{(i+1)}(b))$

alors nous avons ($E'_1 = E_1$ et $E'_2 = E_2$) ou ($E'_1 = E_2$ et $E'_2 = E_1$).

Cette remarque permet, lorsqu'une i-cellule C est localement de degré 2, de montrer que le brin de départ pour calculer les deux demi-cellules n'est pas important, et que la propriété est homogène. Elle peut se prouver facilement, en regardant que pour C une i-cellule localement de degré 2, $\forall b \in C$, soit $b \in E_1$, soit $b \in E_2$.
- Si $b \in E_1$, alors $E'_1 = E_1$ par définition des orbites. Étant donné que nous savons que $\alpha_{(i+1)}(b) \in E_2$, car C est une i-cellule localement de degré 2, nous avons également $E'_2 = E_2$.
- Si $b \in E_2$, nous pouvons faire un raisonnement similaire pour montrer que $E'_1 = E_2$ et $E'_2 = E_1$.

Nous pouvons maintenant définir, de manière formelle et générale, l'opération de fusion.

Définition 34 (Fusion de deux (i+1)-cellules) *Soit $G = (B, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ une 3-G-carte, $b \in B$ un brin et $i \in \{0, 1, 2\}$, tel que $C =< \{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} - \alpha_i > (b)$, la i-cellule incidente au brin b, soit localement de degré deux. Nous notons $B^2 = \alpha_i(C) - C$ les brins cousus par α_i aux brins de C et n'appartenant pas à C. La* fusion *des deux $(i+1)$-cellules adjacentes le long de C est la 3-G-carte $G' = (B', \alpha'_0, \alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3)$ définie par :*
- *$B' = B - C$;*
- *$\forall j \in \{0, 1, 2, 3\} - i$, $\alpha'_j = \alpha_j|_{B'}$;*
- *$\forall b \in B' - B^2$, $\alpha'_i(b) = \alpha_i(b)$;*
- *$\forall b \in B^2$,* ***si*** *$\exists b' \in B^2$ tel que $b' = (\alpha_{(i+1)}\alpha_i)^k(\alpha_i(b))$,* ***alors*** *on pose $\alpha'_i(b) = (\alpha_{(i+1)}\alpha_i)^{k'}(\alpha_i(b))$ avec k' étant égal au plus petit k ;* ***sinon*** *on pose $\alpha'_i(b) = b$.*

Cette fusion est valable pour toute 3-G-carte, à la seule condition que la i-cellule C soit localement de degré 2. Les notations utilisées pour cette définition sont :
- $G = (B, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ est la 3-G-carte de départ ;
- C est la i-cellule à supprimer ;
- B^2 est l'ensemble des brins cousus par α_i aux brins de C et n'appartenant pas à C ;
- $G' = (B', \alpha'_0, \alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3)$ est la 3-G-carte résultant de l'opération de fusion.

Seule l'involution α_i est modifiée pour les brins appartenant à B^2, les autres brins conservent les mêmes coutures. Pour les brins appartenant à B^2, nous différencions deux cas suivant qu'il existe ou non $b' \in B^2$ tel que $b' = (\alpha_{(i+1)}\alpha_i)^k(\alpha_i(b))$. Le deuxième cas permet de traiter les configurations où il n'existe pas un brin image pour α'_i. Ce cas survient uniquement pour les G-cartes ouvertes, et peut être supprimé si nous nous limitons aux G-cartes fermées.

Théorème 1 *Soit G une 3-G-carte et C une i-cellule localement de degré 2, alors G' obtenue par fusion des deux $(i+1)$-cellules adjacentes le long de C est une 3-G-carte.*

Preuve du théorème 1

1. ***pour $\alpha_j \neq \alpha_i$*** *: Soit $b_1 \in B'$. Montrons que $b_2 = \alpha_j(b_1) \in B'$. Supposons que $b_2 \notin B'$. Alors, étant donné que $B' = B - C$ nous avons $b_2 \in C$. Étant donné que $C =< \{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} - \alpha_i > (b)$, nous pouvons dire que si $b_2 \in C$ alors $b_1 = \alpha_j(b_2) \in C$, ce qui est en contradiction avec $b_1 \in B'$.*
2. ***pour α_i*** *:*
   (a) ***pour $b_1 \in B' - B^2$*** *: Montrons que $b_2 = \alpha_i(b_1) \in B'$, par le même raisonnement que pour le cas précédent. Supposons que $b_2 \notin B'$. Alors nous avons $b_2 \in C$. Dans ce cas, $b_1 = \alpha_i(b_2) \in B^2$ ou $\in C$ par définition de B^2 ce qui, dans les deux cas, est en contradiction avec $b_1 \in B' - B^2$.*
   (b) ***pour $b_1 \in B^2$*** *: Nous effectuons une démonstration générique, qui sera ensuite instanciée pour les trois différentes fusions possibles. Soit $\alpha_l \in \{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} - \{\alpha_i, \alpha_{(i+1)}\}$. Nous montrons que si nous avons $\alpha_{il} = \alpha_{li}$ pour tout brin, et $\alpha_{(i+1)l} = \alpha_{l(i+1)}$ pour les brins de C, alors nous avons $\alpha'_{il}(b_1) = \alpha'_{li}(b_1)$. Notons $b_2 = \alpha_l(b_1)$. Nous avons $b'_1 = \alpha_i(b_1) \in C$ par définition de B_2 et $\alpha_l(b'_1) \in C$ par définition de C. Étant donné que $\alpha_{il}(b_1) = \alpha_{li}(b_1)$, nous avons donc $\alpha_l(b'_1) =$*

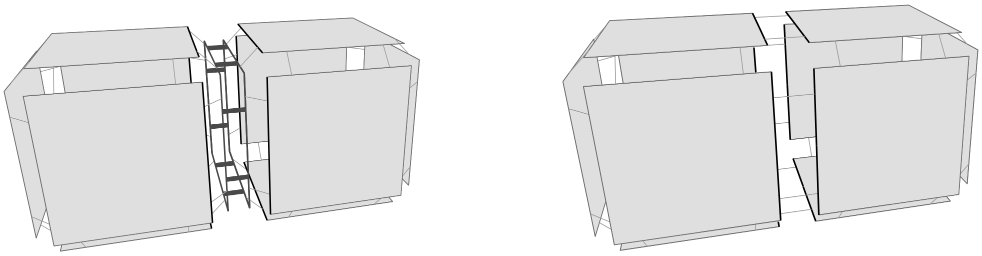


FIG. 6.1 – La fusion de volumes.

$\alpha_i(b_2)$ et donc $b'_2 = \alpha_i(b_2) \in C$. Comme C est localement de degré deux, alors nous avons $\alpha_{(i+1)l} = \alpha_{l(i+1)}$. Comme nous avons également $\alpha_{il} = \alpha_{li}$, alors nous obtenons que pour tout brin de C, $\alpha_{(i+1)i} \circ \alpha_l = \alpha_l \circ \alpha_{(i+1)i}$. Comme $b'_1 \in C$, nous obtenons $\alpha_{(i+1)il}(b'_1) = \alpha_{l(i+1)i}(b'_1) = \alpha_{(i+1)i}(b'_2)$. Si $\alpha_{(i+1)i}(b'_1) \in C$ alors nous pouvons reprendre ce même raisonnement afin de montrer que $\alpha_{(i+1)i(i+1)il}(b'_1) = \alpha_{l(i+1)i(i+1)i}(b'_1)$, et au final pour prouver que $(\alpha_{(i+1)i})^k \circ \alpha_l(b'_1) = \alpha_l \circ (\alpha_{(i+1)i})^k(b'_1)$, où k est le plus petit entier tel que $(\alpha_{(i+1)i})^{(k-1)}(b'_1) \in C$ et $(\alpha_{(i+1)i})^k(b'_1) \notin C$. Si un tel k existe, alors c'est le même que pour la définition de α'_i et nous avons donc bien prouvé $\alpha'_{il}(b_1) = \alpha'_{li}(b_1)$. Si un tel k n'existe pas, alors nous avons un brin bb de C libre pour α_i (car les brins de C sont tous cousu pour $\alpha_{(i+1)}$), tel que $(\alpha_{(i+1)i})^k(b'_1) = bb$. Alors pour ce k, nous avons prouvé que $(\alpha_{(i+1)i})^k \circ \alpha_l(b'_1) = \alpha_l \circ (\alpha_{(i+1)i})^k(b'_1)$. Ce qui peut s'écrire autrement par $(\alpha_{(i+1)i})^k \circ \alpha_l(b'_1) = \alpha_{(i+1)i})^k(b'_2)$. Si $(\alpha_{(i+1)i})^k(b'_1) = bb \in C$, alors $\alpha_{(i+1)i})^k(b'_2) \in C$ et donc nous aurons $\alpha'_l(b_1) = b_1$ et $\alpha'_l(b_2) = b_2$, et nous aurons donc bien $\alpha'_{il}(b_1) = \alpha'_{li}(b_1)$.

- ***i* = 0** :
  - *Pour $\alpha_l = \alpha_2$, nous avons bien $\alpha_{02} = \alpha_{20}$ pour chaque brin, par définition des G-cartes, et pour les brins de C : $\alpha_{12} = \alpha_{21}$ car C est localement de degré deux. Nous obtenons donc que $\alpha'_{02}(b_1) = \alpha'_{20}(b_1)$.*
  - *Pour $\alpha_l = \alpha_3$, nous avons $\alpha_{03} = \alpha_{30}$ et $\alpha_{13} = \alpha_{31}$ pour tout brin, par définition des G-cartes. Nous obtenons bien $\alpha'_{03}(b_1) = \alpha'_{30}(b_1)$.*
- ***i* = 1** : *Pour $\alpha_l = \alpha_3$, nous avons $\alpha_{13} = \alpha_{31}$ pour chaque brin, par définition des G-cartes, et pour les brins de C : $\alpha_{23} = \alpha_{32}$ car C est localement de degré deux. Nous prouvons donc que $\alpha'_{13}(b_1) = \alpha'_{31}(b_1)$.*
- ***i* = 2** : *Pour $\alpha_l = \alpha_0$, nous avons $\alpha_{20} = \alpha_{02}$ et $\alpha_{30} = \alpha_{03}$ pour tout brin, par définition des G-cartes. Nous prouvons donc $\alpha'_{20}(b_1) = \alpha'_{02}(b_1)$.*

Lorsque nous regroupons toutes ces informations, nous obtenons, pour les α' égaux à α restreints à B', que les contraintes des G-cartes sont toujours vérifiées, étant donné que nous conservons les mêmes coutures. Pour α'_i, nous avons prouvé, pour chacune des trois fusions possibles, que les différentes contraintes des G-cartes étaient toujours vérifiées. Cela prouve donc que G' est une 3-G-carte. □

Nous pouvons voir trois exemples de fusion, un pour chaque dimension de C, présentés figures 6.1, 6.2 et 6.3. Sur ces figures, nous avons représenté α_2 en gris clair et α_3 en traits

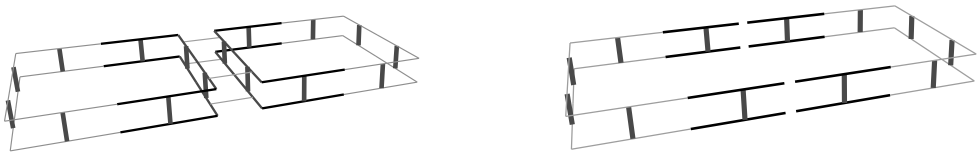


FIG. 6.2 – La fusion de faces.

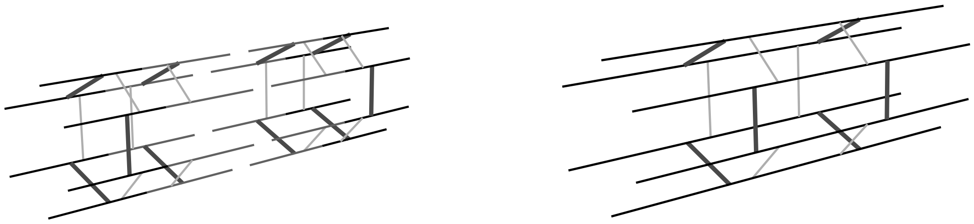


FIG. 6.3 – La fusion d'arêtes.

épais et foncés. α_0 et α_1 ne sont pas représentés afin de ne pas surcharger les figures, mais peuvent se retrouver sans difficulté de par la manière dont nous dessinons les G-cartes. Enfin, nous avons dessiné en foncé les brins appartenant à C, la cellule que nous supprimons, et en noir les brins appartenant à B_2, brins pour lesquels nous modifions α_i'. Les autres brins sont de couleur plus claire étant donné qu'ils ne sont pas concernés pas la fusion. Ces figures permettent de vérifier que seuls les α_i'-coutures des brins de B_2 sont modifiées. De plus, nous pouvons vérifier que la définition algébrique de la fusion modifie bien la carte initiale pour obtenir le résultat de la fusion.

6.2 Les fusions pour la définition de la carte topologique

La carte topologique en dimension 3 est la carte minimale codant les frontières inter-voxel d'une image 3d segmentée en régions. Nous l'avons définie à partir de la carte de niveau 0, où chaque volume représente un voxel de l'image, plus un volume représentant la région infinie entourant ces voxels. À partir de cette carte, nous effectuons les fusions de toutes les cellules adjacentes incidentes à une cellule localement de degré deux. Nous notons $(f_1, \ldots, f_k)$ la suite des fusions effectuées à partir de la carte complète pour obtenir la carte topologique. Chaque fusion s'effectue le long d'une cellule localement de degré deux. Nous notons $d(f_i)$ la dimension de la cellule supprimée par la fusion f_i, qui appartient à $\{0, 1, 2\}$, et $C(f_i)$ cette cellule.

Pour la définition de la carte topologique présentée section 5.2, nous commençons par fusionner les volumes de mêmes régions, puis les faces coplanaires, les arêtes alignées, les faces non coplanaires et enfin les arêtes alignées. Ce choix de l'ordre et du type de cellules fusionnées nous permet d'obtenir la carte des frontières, qui peut être plongée uniquement par ses sommets, comme un niveau intermédiaire de simplification. Mais il est possible de réorganiser ces fusions de manière différente, en obtenant finalement la même carte topologique.

Théorème 2 *Soit G une 3-G-carte et $(f_1, \ldots, f_k)$ une suite de fusions effectuées à partir de G, et G' la G-carte résultant de ces fusions. Alors il existe une suite de fusions $(f_{2_1}, \ldots, f_{2_k}, f_{1_1}, \ldots, f_{1_l}, f_{0_1}, \ldots, f_{0_m})$ qui, partant de G produit également G', et vérifiant $\forall f_{i_j},\ d(f_{i_j}) = i$.*

En d'autres termes, cela revient à dire que, pour toute suite de fusions, il existe une suite de fusions ordonnées produisant la même G-carte : nous commençons par faire des fusions de volumes, puis des fusions de faces et enfin des fusions d'arêtes. Pour prouver ce théorème, nous donnons des règles de réécriture, qui nous permettent de modifier progressivement une suite de fusions jusqu'à obtenir une suite ordonnée. Soit deux fusions consécutives f_i et f_{i+1} tel que $d(f_i) < d(f_{i+1})$. Il y a trois cas différents.

1. $\boldsymbol{d(f_i) = 0}$ **et** $\boldsymbol{d(f_{i+1}) = 1}$. Si l'arête résultant de la fusion f_i n'est pas $C(f_{i+1})$, alors nous échangeons simplement f_i et f_{i+1} ; sinon nous remplaçons ces deux fusions par deux fusions de faces le long des deux arêtes qui étaient fusionnées par f_i.

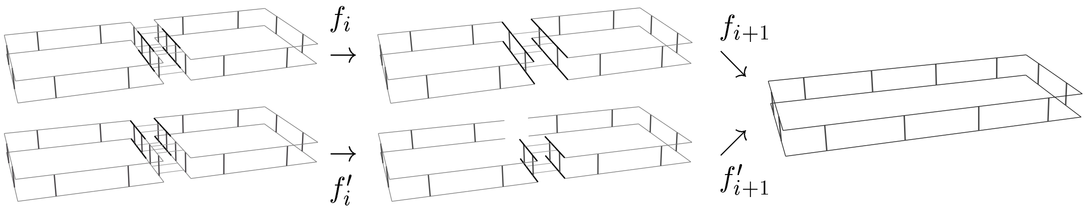


FIG. 6.4 – Avant : f_i est une fusion d'arêtes, et f_{i+1} fusion de faces. Après : f'_i et f'_{i+1} sont deux fusions de faces.

2. $\boldsymbol{d(f_i) = 0}$ **et** $\boldsymbol{d(f_{i+1}) = 2}$. Nous pouvons échanger ces deux fusions sans aucune modification, à condition que la fusion f'_{i+1} ne détruise pas totalement les deux arêtes devant être fusionnées par f_i. En effet, dans ce cas, nous n'avons plus besoin d'effectuer cette deuxième fusion, et nous remplaçons donc ces deux fusions par f'_{i+1}.
3. $\boldsymbol{d(f_i) = 1}$ **et** $\boldsymbol{d(f_{i+1}) = 2}$. Si la face résultant de la fusion f_i n'est pas $C(f_{i+1})$, alors nous échangeons simplement f_i et f_{i+1} ; sinon nous remplaçons ces deux fusions pas deux fusions de volumes le long des deux faces qui étaient fusionnées par f_i.

Nous montrons maintenant que ces changements ne provoquent aucune modification sur la 3-G-carte obtenue au final. Nous donnons ici seulement les idées de preuves, car la preuve formelle serait longue et technique.

Preuve du théorème 2 *Soit G une 3-G-carte et $(f_1, \ldots, f_k)$ une suite de fusions. Considérons deux fusions consécutives, f_i et f_{i+1} tel que $d(f_i) < d(f_{i+1})$. S'il n'en existe pas, alors la suite de fusions est ordonnée. Sinon, nous modifions ces deux fusions suivant les trois règles de réécriture données ci-dessus. Nous montrons que la G-carte résultant des deux fusions initiale est la même que celle obtenue après avoir modifié ces deux fusions.*

1. $\boldsymbol{d(f_i) = 0}$ ***et*** $\boldsymbol{d(f_{i+1}) = 1}$. *$C(f_i)$ est un sommet et $C(f_{i+1})$ est une arête. La première fusion consiste à fusionner deux arêtes en une seule, que nous notons A. Si*

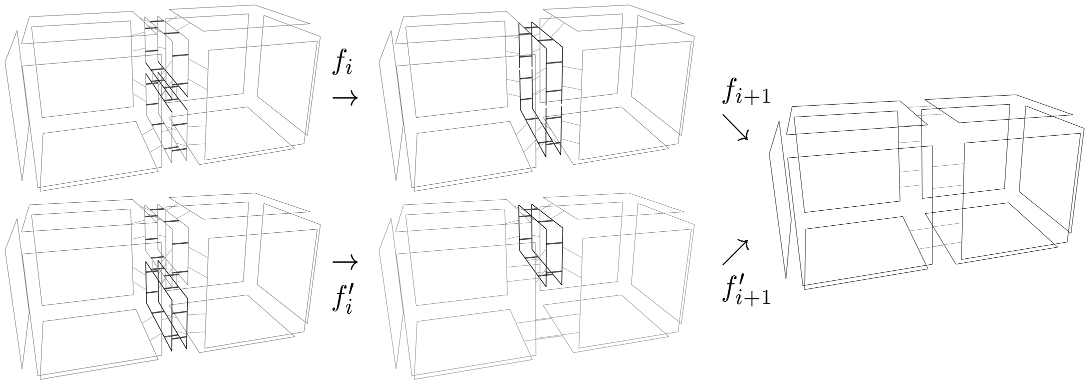


FIG. 6.5 – Avant : f_i est une fusion de faces, et f_{i+1} fusion de volumes. Après : f'_i et f'_{i+1} sont deux fusions de volumes.

$A \neq C(f_{i+1})$, alors nous pouvons échanger sans aucune modification les deux fusions. En effet, au cours de la fusion f_{i+1}, la seule arête supprimée est $C(f_{i+1})$, les autres ne sont pas modifiées. Les deux arêtes fusionnées par f_i existeront et seront identiques si nous commençons à fusionner f_{i+1} puis f_i. Il faut donc étudier le cas où $A = C(f_{i+1})$. Ce cas est présenté figure 6.4, où la deuxième fusion (fusion de faces) s'effectue le long de l'arête résultant de la première fusion. Nous pouvons voir sur cette figure, que ces deux fusions peuvent sans problème se remplacer par deux fusions de faces consécutives le long des deux arêtes qui étaient fusionnées par la première fusion. Nous obtiendrons bien la même 3-G-carte au final que celle obtenue en effectuant les deux fusions f_i et f_{i+1}. De manière intuitive, les coutures modifiées par la fusion f_i concernent des brins qui seront ensuite détruits pas la deuxième fusion.

2. ***$d(f_i) = 0$ et $d(f_{i+1}) = 2$**. $C(f_i)$ est un sommet et $C(f_{i+1})$ est une face. Si l'arête résultant de la fusion f_i n'est pas incidente à la face $C(f_{i+1})$, alors nous pouvons intervertir les deux fusions sans aucune modification, car elles sont totalement indépendantes. Sinon, nous pouvons également intervertir les deux fusions sans difficulté. En effet, si nous commençons par la fusion de volumes, la face $C(f_{i+1})$ sera supprimée de la G-carte. Si les deux arêtes fusionnées par f_i existent encore après cette fusion, alors nous pouvons les fusionner par la même fusion que f_i, il y aura juste moins de brins étant donné que ceux appartenant à $C(f_{i+1})$ ont été détruits. Sinon, l'arête entière a été détruite et nous n'avons plus besoin d'effectuer la fusion d'arêtes.*

3. ***$d(f_i) = 1$ et $d(f_{i+1}) = 2$**. $C(f_i)$ est une arête et $C(f_{i+1})$ est une face. La première fusion consiste à fusionner deux faces en une seule, que nous notons F. Si $F \neq C(f_{i+1})$, alors nous pouvons échanger sans aucune modification les deux fusions. En effet, au cours de la fusion f_{i+1}, la seule face supprimée est $C(f_{i+1})$, les autres ne sont pas modifiées. Les deux faces fusionnées par f_i existeront et seront identiques si nous commençons à fusionner f_{i+1} puis f_i. Il faut donc étudier le cas où $F = C(f_{i+1})$. Ce cas est présenté figure 6.5, où la deuxième fusion (fusion de volume) s'effectue le long de la face résultant de la première fusion. Nous pouvons voir sur cette figure, que ces deux fusions peuvent sans problème se remplacer par deux fusions de volumes consécutives le long des deux faces qui étaient fusionnées par la première fusion. Nous*

obtiendrons bien la même 3-G-carte au final que celle obtenue en effectuant les deux fusions f_i et f_{i+1}.

Ces trois règles de réécriture permettent, à partir de n'importe quelle suite de fusions $(f_1, \ldots, f_k)$, de définir progressivement des nouvelles suites de fusions, chacune produisant au final la même 3-G-carte. Étant donné qu'à chaque étape nous supprimons un cas où deux fusions consécutives sont dans le « mauvais ordre », et que nous n'augmentons pas le nombre d'éléments dans la suite de fusions, nous pouvons garantir que notre processus de réécriture va s'arrêter et produire au final une suite de fusions correctement ordonnée, et produisant la même 3-G-carte que la première suite de fusions. □

6.3 L'évolution des caractéristiques topologiques

Nous étudions maintenant l'évolution des caractéristiques topologiques lors des différentes fusions. Pour cela, nous regardons la G-carte que nous avons avant et après une fusion, et étudions l'évolution de ces caractéristiques. Nous utilisons pour cela la formule d'Euler

$$\#F - \#A + \#S = 2 - 2G$$

où $\#F$ est le nombre de faces, $\#A$ le nombre d'arêtes, $\#S$ le nombre de sommets et G le genre. Elle permet de caractériser un volume, en étudiant le genre de sa surface. Dans la suite de ce travail, nous notons $\#F$, $\#A$ et $\#S$ le nombre de cellules correspondantes et G le genre du volume avant la fusion, et $\#nF$, $\#nA$ et $\#nS$ et nG ces mêmes nombres après la fusion.

Nous nous plaçons dans le cadre des cartes topologiques[1] sachant que n'importe quelle carte topologique peut s'obtenir à partir de la carte complète en effectuant une suite de fusions $(f_1, \ldots, f_k)$ ordonnées, nous traitons d'abord les fusions de volumes, puis les fusions de faces et enfin les fusions d'arêtes. Cet ordre sur la suite de fusions permet de limiter le nombre de configurations possibles. Par exemple, pour étudier la fusion de volumes, nous savons que toutes les faces de la G-carte sont carrées et composées de 8 brins.

La formule d'Euler peut se calculer très simplement sur les 3-G-cartes. Comme elle permet de caractériser uniquement les volumes par leurs surfaces, elle ne prend pas en compte les faces cousues par α_3, et nous comptons donc deux faces dans ce cas. La formule d'Euler peut donc se réécrire par :

$$z(\alpha_0, \alpha_1) - z(\alpha_0, \alpha_2) + z(\alpha_1, \alpha_2) = 2 - 2G$$

où $z(\alpha_i, \alpha_j)$ est le nombre d'orbites $< \alpha_i, \alpha_j >$. Cette formule est applicable uniquement pour un seul et même volume, les différents nombres d'orbites étant calculés sur les brins de ce volume.

Afin de montrer que les 5 niveaux de simplification représentent les mêmes informations topologiques, nous montrons que le genre de chaque objet reste invariant après chaque fusion de faces et d'arêtes. En effet, ce sont les deux seules fusions utilisées pour passer de la carte de niveau 1 aux cinq autres niveaux. L'étude sur la fusion de volumes, utilisée afin

[1] Mais toujours en utilisant le formalisme des G-cartes.

de construire la carte de niveau 1 à partir du niveau 0, permet de vérifier que nous avons bien traité correctement toutes les configurations pouvant se produire lors de cette fusion, et que nous n'avons pas oublié de cas de déconnexion.

6.3.1 Fusion de volumes

Nous fusionnons deux volumes v_1 et v_2 le long de la face C incidente aux deux volumes et localement de degré deux. De par l'ordre sur les fusions, nous n'avons encore effectué ni fusion de faces ni fusion d'arêtes. Nous avons donc exclusivement des faces « carrées », c'est-à-dire composées de huit brins de même longueur. Il y a deux cas différents, suivant que $v_1 = v_2$ ou $v_1 \neq v_2$, et dans le premier cas plusieurs cas selon la configuration des arêtes de la face C. Ce sont les différents cas où une ou plusieurs de ces arêtes sont de degré un que nous étudions. Comme la face est carrée, il y a seulement 5 cas différents.

Cas 1 : $v_1 \neq v_2$.

C'est le cas le plus simple où nous fusionnons deux volumes différents. Il est facile

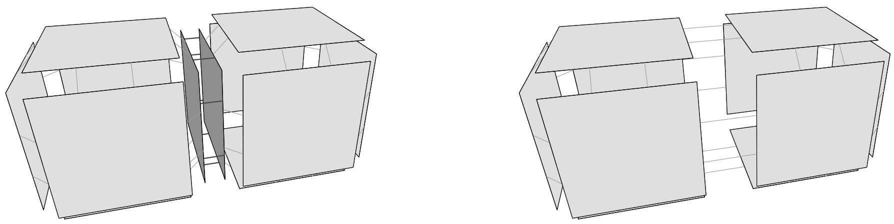


Fig. 6.6 – Fusion de volumes : $v_1 \neq v_2$.

de voir que cette fusion ne peut pas entraîner de déconnexion étant donné que les deux volumes sont différents. Pour calculer les caractéristiques du nouveau volume, nous notons $\#F_1$ $\#A_1$ $\#S_1$ et G_1 les caractéristiques de v_1 et $\#F_2$ $\#A_2$ $\#S_2$ et G_2 les caractéristiques de v_2. Nous obtenons alors

$$\left.\begin{array}{r}\#nF = \#F_1 + \#F_2 - 2\\ \#nA = \#A_1 + \#A_2 - 4\\ \#nS = \#S_1 + \#S_2 - 4\end{array}\right\} \Rightarrow nG = G_1 + G_2$$

Le nouveau volume est l'union des deux anciens. Son genre est donc simplement la somme des genres des deux volumes qui ont été fusionnés.

Cas 2 : $v_1 = v_2$ et aucune arête de C n'est de degré 1.

Ce cas est présenté figure 6.7. Si nous calculons les nouvelles caractéristiques topolo-

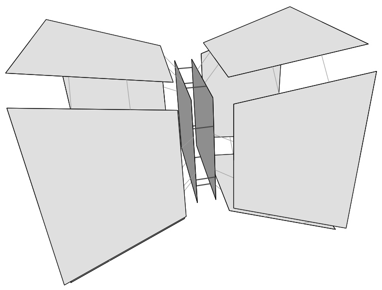
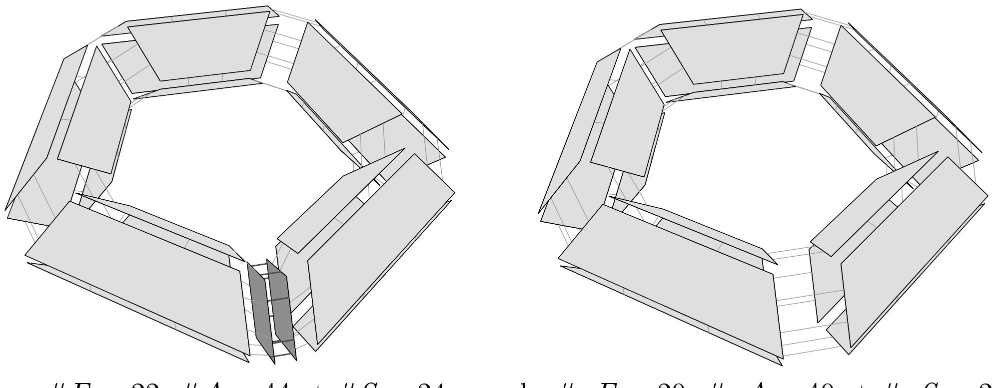


FIG. 6.7 – $v_1 = v_2$ et aucune arête de C n'est de degré 1.

giques du volume après cette fusion, nous obtenons :

$$\left.\begin{array}{r}\#nF = \#F - 2\\ \#nA = \#A - 4\\ \#nS = \#S - 4\end{array}\right\} \Rightarrow nG = G + 1$$

Nous avons donc modifié le genre du volume. Ce cas survient par exemple pour un tore ayant une face intérieure, c'est-à-dire cousue par α_3 à une face du même volume, comme pour l'exemple présenté figure 6.8. Nous pouvons remarquer sur cet exemple qu'avant la



a. $\#F = 22$, $\#A = 44$ et $\#S = 24$ $\Rightarrow G = 0$

b. $\#nF = 20$, $\#nA = 40$ et $\#nS = 20$ $\Rightarrow nG = 1$

FIG. 6.8 – Le tore avec ou sans face intérieure.

fusion, l'objet modélisé est en fait une sphère, ce qui se vérifie par le calcul du genre. En effet, nous ne considérons pas les coutures par α_3 et donc ne tenons pas compte pour le calcul du genre de la présence d'une face intérieure. Par contre, après la fusion nous modélisons bien un tore, comme nous pouvons voir par le calcul du genre, ce qui justifie donc l'incrémentation de celui-ci.

Cas 3 : $v_1 = v_2$ et une arête de C est de degré 1.

Ce cas est présenté figure 6.9. Dans ce cas, nous avons :

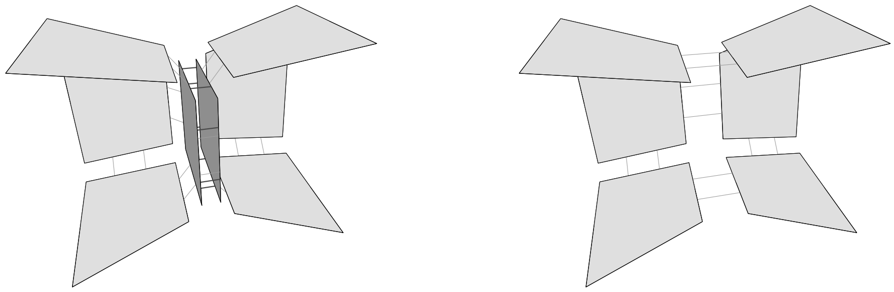


FIG. 6.9 – $v_1 = v_2$ et une arête de C est de degré 1.

$$\left.\begin{array}{r} \#nF = \#F - 2 \\ \#nA = \#A - 4 \\ \#nS = \#S - 2 \end{array}\right\} \Rightarrow nG = G$$

et conservons le genre de l'objet invariant.

Cas 4 : $v_1 = v_2$ et deux arêtes adjacentes de C sont de degré 1.

Ce cas est présenté figure 6.10. Dans ce cas, nous avons :

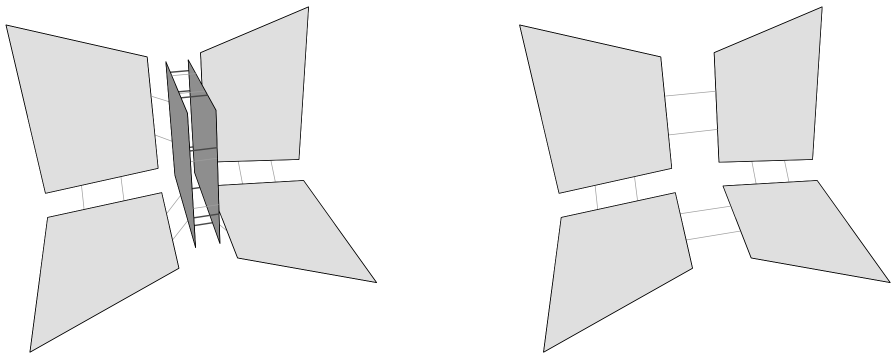


FIG. 6.10 – $v_1 = v_2$ et deux arêtes adjacentes de C sont de degré 1.

$$\left.\begin{array}{r} \#nF = \#F - 2 \\ \#nA = \#A - 4 \\ \#nS = \#S - 2 \end{array}\right\} \Rightarrow nG = G$$

et conservons également le genre de l'objet invariant.

Cas 5 : $v_1 = v_2$ et deux arêtes non-adjacentes de C sont de degré 1.

Ce cas est présenté figure 6.11 Nous avons alors

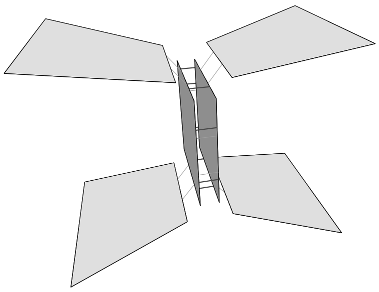
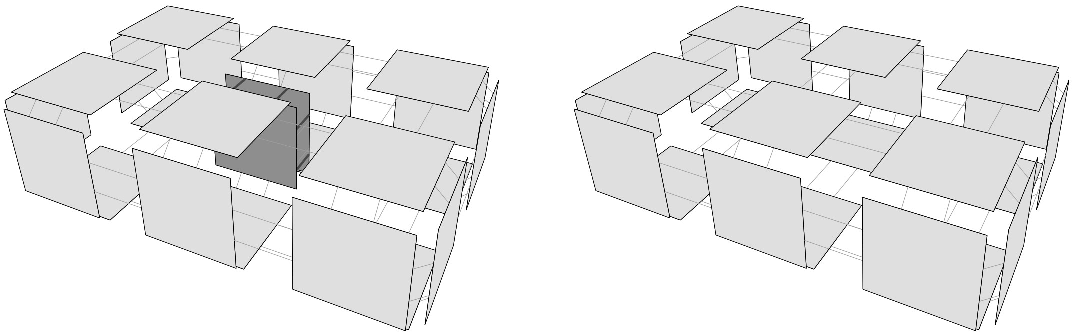


FIG. 6.11 – $v_1 = v_2$ et deux arêtes non-adjacentes de C sont de degré 1.

$$\left.\begin{aligned} \#nF &= \#F - 2 \\ \#nA &= \#A - 4 \\ \#nS &= \#S \end{aligned}\right\} \Rightarrow nG = G - 1$$

Cette modification de genre est normale, étant donné que nous modifions le type de l'objet par cette fusion. Nous pouvons voir figure 6.12 un exemple d'objet où nous nous trouvons dans ce cas. L'objet que nous modélisons avant la fusion est un tore, qui est donc



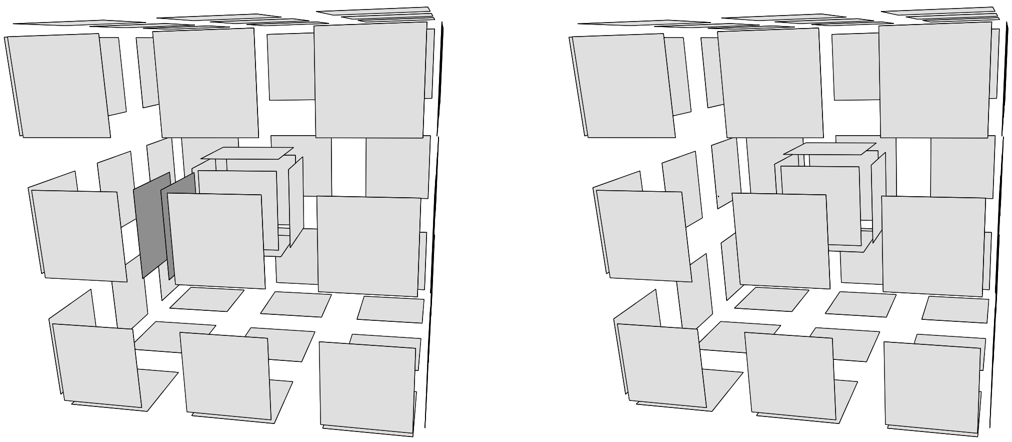
a. $\#F = 24$, $\#A = 48$ et $\#S = 24$ $\Rightarrow G = 1$

b. $\#nF = 22$, $\#nA = 44$ et $\#nS = 24$ $\Rightarrow nG = 0$

FIG. 6.12 – Un exemple où $v_1 = v_2$ et deux arêtes adjacentes de C sont de degré 1.

de genre 1. Par contre après la fusion, nous obtenons une sphère et il est donc normal de modifier le genre étant donné que nous avons modifié l'objet représenté.

Mais cette fusion peut entraîner une déconnexion de la carte modélisant le bord du volume, comme nous pouvons le voir sur l'exemple figure 6.13. Après la fusion, nous obtenons deux composantes connexes distinctes, une pour l'extérieur du cube et une pour l'intérieur. Nous avons vu section 5.3, lors de la présentation des problèmes de déconnexion, que nous



a. $\#F = 62$, $\#A = 124$ et $\#S = 64$ $\Rightarrow G = 0$

b. $\#F_1 = 54$, $\#A_1 = 108$ et $\#S_1 = 56 \Rightarrow G_1 = 0$
$\#F_2 = 6$, $\#A_2 = 12$ et $\#S_2 = 8 \Rightarrow G_2 = 0$

FIG. 6.13 – Le problème de la déconnexion lors de la fusion de volumes.

conservons un arbre d'inclusion des régions. Cet arbre permet de retrouver l'ensemble des régions incluses dans une région donnée, et permet donc de positionner les composantes connexes les unes par rapport aux autres. La formule d'Euler permettant uniquement de caractériser un objet par sa surface, elle ne peut pas caractériser ce type d'objet. Mais nous pouvons caractériser séparément la surface extérieure du cube de la surface intérieure. Nous obtenons ici deux fois un genre 0, et en déduisons grâce à l'arbre d'inclusion que cet objet est une sphère contenant une autre sphère. En utilisant la relation d'inclusion, nous avons plus d'information que seulement le genre de l'objet. Mais il n'est pas possible de caractériser les deux surfaces obtenues, étant donné que cela va dépendre de la manière dont s'effectue la coupure. Nous savons seulement que, si nous notons G_1 et G_2 le genre de ces deux surfaces, nous avons $G_1 + G_2 = G$, le genre initial de la surface.

Cas 6 : $v_1 = v_2$ et une seule arête de C n'est pas de degré 1.

Ce cas est présenté figure 6.14. Nous avons alors

$$\left.\begin{array}{r} \#nF = \#F - 2 \\ \#nA = \#A - 4 \\ \#nS = \#S - 2 \end{array}\right\} \Rightarrow nG = G$$

Cas 7 : $v_1 = v_2$ et les quatre arêtes de C sont de degré 1.

Dans ce cas, la fusion supprime entièrement la face. Nous *devrions* donc avoir

$$\left.\begin{array}{r} \#nF = \#F - 2 \\ \#nA = \#A - 4 \\ \#nS = \#S - 4 \end{array}\right\} \Rightarrow nG = G + 1$$

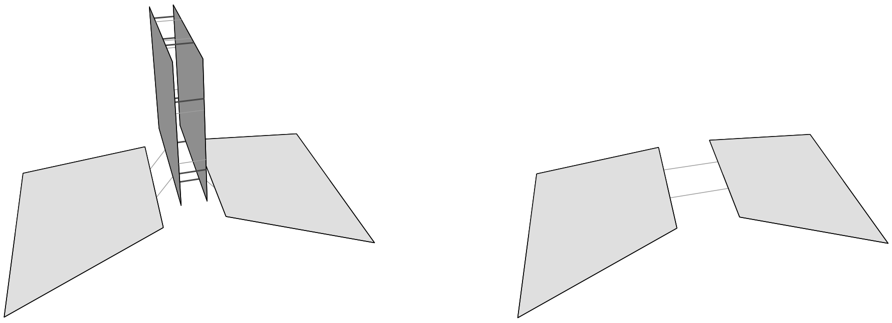


FIG. 6.14 – $v_1 = v_2$ et une seule arête de C n'est pas de degré 1.

Mais ce cas survient uniquement lorsque la face à supprimer est à l'intérieur d'un volume. Cette face est donc une surface intérieure, et sa disparition entraîne la disparition totale de cette surface. Il n'existe donc plus de surface à caractériser, et le calcul de nG n'a donc pas de sens.

En résumé

Nous avons étudié toutes les configurations possibles lors de la fusion de volumes. En effet, étant donné l'ordre des fusions effectuées, nous savons que nous avons uniquement des faces carrées, ce qui limite beaucoup le nombre de configurations à étudier. Cette étude de cas aurait été plus laborieuse sans la réorganisation de la suite des fusions. Le tableau 6.1 récapitule l'évolution des caractéristiques topologiques pour la fusion de volumes, pour chacun des cas que nous venons d'étudier.

TAB. 6.1 – Récapitulation de l'évolution des caractéristiques topologiques pour la fusion de volumes.

	#nF	#nA	#nS	nG
Cas 1	$\#F_1 + \#F_2 - 2$	$\#A_1 + \#A_2 - 4$	$\#S_1 + \#S_2 - 4$	$G_1 + G_2$
Cas 2	$\#F - 2$	$\#A - 4$	$\#S - 4$	$G + 1$
Cas 3	$\#F - 2$	$\#A - 4$	$\#S - 2$	G
Cas 4	$\#F - 2$	$\#A - 4$	$\#S - 2$	G
Cas $5.a$	Déconnexion : obtention de deux surfaces différentes			
Cas $5.b$	$\#F - 2$	$\#A - 4$	$\#S$	$G - 1$
Cas 6	$\#F - 2$	$\#A - 4$	$\#S - 2$	G
Cas 7	Suppression totale de la surface			

Remarquons que le cas 5 est découpé en deux sous-cas : le cas $5.a$ lorsque la fusion entraîne une déconnexion de la carte et le cas $5.b$ sinon. Lorsqu'il y a déconnexion, nous obtenons deux surfaces différentes ayant chacune des caractéristiques topologiques que nous ne pouvons pas calculer à partir des caractéristiques du volume initial. Le cas symétrique est le cas 7, où la suppression de la face entraîne également la suppression totale de la surface qui n'a donc plus de caractéristique. Le seul cas pouvant entraîner une déconnexion est donc le cas $5.a$, tout les autres conservent la carte connexe.

Nous pouvons remarquer que les cas 1, 2 et $5.b$ ne conservent pas invariant le genre après la fusion. Pour le cas 1, c'est évident car nous fusionnons deux volumes différents. Pour les deux autres cas, cela est nécessaire car ils modifient la topologie de l'objet représenté. En effet, la carte de niveau 0 ne représente pas l'image segmentée mais uniquement un ensemble de voxels, donc seulement des volumes de genre 0. Avec les fusions de volumes, nous calculons la carte de niveau 1 qui représente les régions de l'image, et il est donc normal que les caractéristiques topologiques changent afin de représenter la topologie de ces objets. De ce fait, cette étude ne montre pas que les caractéristiques restent invariantes, mais permet d'étudier toutes les configurations possibles lors de la fusion de volumes, et de s'assurer que nous n'avons pas oublié des cas de déconnexion. De plus, nous avons vu comment caractériser un volume contenant d'autres volumes, sachant que ce type de volume n'est pas caractérisable à l'aide de la formule d'Euler.

6.3.2 Fusion de faces

Nous effectuons maintenant la même démarche, mais pour la fusion de faces. Nous fusionnons donc deux faces f_1 et f_2 le long de l'arête C qui est incidente aux deux faces et localement de degré deux. Toujours grâce à l'ordre sur les fusions, nous n'avons pas encore effectué de fusion d'arêtes, et chaque arête représente donc un lignel. Cela a pour conséquence qu'il est impossible d'avoir des boucles, qui sont autrement des cas particuliers. Nous montrons que la fusion de faces conserve invariant le genre des objets quelle que soit la configuration des faces.

Il existe deux cas différents, suivant si $f_1 = f_2$ ou $f_1 \neq f_2$, et dans le premier cas plusieurs sous-cas suivant la configuration de l'arête C. Nous savons que la carte est fermée, et que nous n'avons pas de face à l'intérieur d'un même volume, car nous avons effectué toutes les fusions de volumes possibles. Pour chaque demi-face d'un volume (donc une orbite $< \alpha_0, \alpha_1 >$), nous savons qu'il existe un autre volume ayant une face identique à la première, avec leurs brins cousus par α_3 deux à deux. Comme nous voulons étudier l'évolution des caractéristiques topologiques seulement pour un volume, nous oublions donc la deuxième face cousue par α_3. Nous nous ramenons donc en dimension 2.

Cas 1 : $f_1 \neq f_2$.

Ce cas est présenté figure 6.15. Nous avons alors

FIG. 6.15 – Fusion de faces : $f_1 \neq f_2$.

$$\left.\begin{array}{r} \#nF = \#F - 1 \\ \#nA = \#A - 1 \\ \#nS = \#S \end{array}\right\} \Rightarrow nG = G$$

Cas 2 : $f_1 = f_2$ et aucun sommet de C n'est de degré 1.

Ce cas est présenté figure 6.16. Nous pouvons voir sur cet exemple, que cette fusion

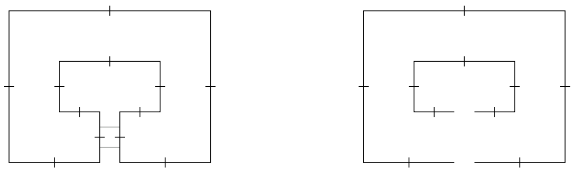


FIG. 6.16 – Fusion de faces : $f_1 = f_2$ et aucun sommet de C n'est de degré 1.

entraîne une déconnexion de la face. Ce type de fusion n'est pas possible dans le cadre de la carte topologique. Nous avons en effet rajouté dans les deux définitions utilisant la fusion de faces la contrainte explicite de ne pas fusionner deux faces lorsque cela entraîne une déconnexion.

Cas 3 : $f_1 = f_2$ et un sommet de C est de degré 1.

Ce cas est présenté figure 6.17.

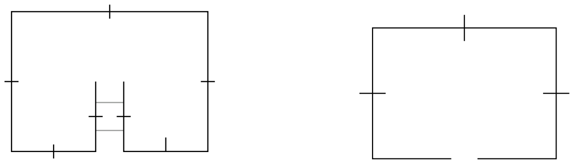


FIG. 6.17 – Fusion de faces : $f_1 = f_2$ et un sommet de C est de degré 1.

Nous avons ici

$$\left.\begin{array}{r} \#nF = \#F \\ \#nA = \#A - 1 \\ \#nS = \#S - 1 \end{array}\right\} \Rightarrow nG = G$$

Cas 4 : $f_1 = f_2$ et les deux sommets de C sont de degré 1.

Ce cas ne peut pas se produire dans le cadre des cartes topologiques. En effet, cette arête représente une sphère topologique (cas étudié section 5.3), et nous n'effectuons alors pas cette fusion. Nous avons en effet ajouté dans la définition de la carte de niveau 4 la contrainte de ne pas effectuer la fusion de deux faces si cela entraîne la disparition complète de la face. Remarquons que cette arête ne peut pas représenter autre chose qu'une sphère, étant donné que nous conservons chaque face connexe. Il n'est donc pas possible qu'elle soit au « milieu » d'une autre face.

En résumé

Le nombre de cas possibles est beaucoup plus faible que pour la fusion de volumes. En effet, nous fusionnons deux faces le long d'une arête. Les seules possibilités sont lorsque les deux faces sont différentes ou non, et lorsque le degré des sommets est de degré un ou non. Nous pouvons remarquer, comme pour l'étude de la fusion de volumes, que ce faible nombre de cas résulte de la réorganisation des fusions. Le tableau 6.2 récapitule l'évolution des caractéristiques topologiques pour la fusion de faces.

TAB. 6.2 – Récapitulation de l'évolution des caractéristiques topologiques pour la fusion de faces.

	#nF	#nA	#nS	nG
Cas 1	$\#F-1$	$\#A-1$	$\#S$	G
Cas 2	Impossible			
Cas 3	$\#F$	$\#A-1$	$\#S-1$	G
Cas 4	Impossible			

Nous voyons donc que deux cas conservent les caractéristiques topologiques invariantes. Les deux autres cas poseraient éventuellement problèmes, mais ont été interdits lors des définitions de nos différents niveaux de simplification. Cela prouve que nous ne perdons pas d'information topologique lors de fusion de faces, mais également que nous avons bien pris en compte tous les cas possibles, et traité les deux posant problème en modifiant nos définitions.

6.3.3 Fusion d'arêtes

La fusion d'arêtes ne peut pas entraîner de déconnexion. De plus, il n'existe pas plusieurs cas différents. Nous avons tout le temps

$$\left.\begin{array}{r}\#nF = \#F \\ \#nA = \#A - 1 \\ \#nS = \#S - 1\end{array}\right\} \Rightarrow nG = G$$

La seule configuration qui pourrait poser problème, est la fusion d'une boucle avec une autre arête. Mais ce cas ne peut pas arriver pour la carte de niveau 3, étant donné que nous fusionnons seulement des arêtes alignées. Pour le niveau 5, nous avons rajouté la condition explicite interdisant ce type de fusion.

Nous avons vu que les fusions de faces et d'arêtes conservent invariant le genre des objets, et ce pour n'importe quelle configuration. Cela prouve donc que les cartes de niveaux 1 à 5 représentent bien les mêmes informations topologiques, étant donné que ce sont les deux seules fusions utilisées afin de calculer ces différents niveaux à partir du niveau 1.

6.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons donné une définition algébrique de l'opération de fusion. Pour cela, nous avons introduit la notion de degré deux local, qui permet de regrouper les cas de cellules de dimension 1 et dimension 2. Nous avons pu ainsi prouver que l'opération de fusion est valide. De plus, la définition est ici un peu plus générale que nos besoins pour la définition de la carte topologique. Pour cette dernière, nous savons qu'elle est fermée et orientable, fait que nous n'avons pas utilisé pour la définition de la fusion. De ce fait, cette définition est la plus générique possible, et fonctionne dans n'importe quelle configuration, ce qui laisse plus de possibilités pour son utilisation.

Nous nous sommes ensuite intéressé à l'ordre des différentes fusions effectuées afin de calculer la carte topologique à partir de la carte de niveau 0. Nous avons ainsi montré que la suite des fusions effectuées peut être réorganisée afin d'être ordonnée selon la dimension décroissante des fusions. Cette partie est intéressante pour deux raisons. Tout d'abord car cela nous a permis de diminuer grandement le nombre de cas à considérer pour l'étude de l'évolution des caractéristiques topologiques. Mais cela valide également l'algorithme optimal d'extraction, qui effectue les fusions de manière désordonnée.

Enfin, l'étude sur l'évolution des caractéristiques topologique est primordiale car elle prouve que les cartes de niveaux 1 à 5 représentent toutes les mêmes informations topologiques. De plus, elle permet de s'assurer que nous n'avons pas oublié de cas particulier. Elle confirme également que les cas pouvant poser problèmes ont tous été correctement traités.

Pour être complet, cette étude aurait mérité d'intégrer la gestion des arêtes fictives. En effet, nous nous sommes ici uniquement intéressé à l'opération de fusion elle-même. Mais nous avons vu lors de la définition de la carte topologique que la gestion des arêtes fictives est primordiale afin d'obtenir la représentation minimale. Il serait donc intéressant de montrer que le principe de décalage d'arêtes fictives ne modifie pas les différentes caractéristiques topologiques. Ce point est l'une de nos perspectives de recherche. Il faut pour cela montrer que ce décalage ne change aucune caractéristique topologique, ce qui est évident intuitivement car nous ne modifions pas le nombre de cellules, mais il faut également montrer que ce décalage conserve la connexité de chaque face, point seulement abordé intuitivement dans ce travail.