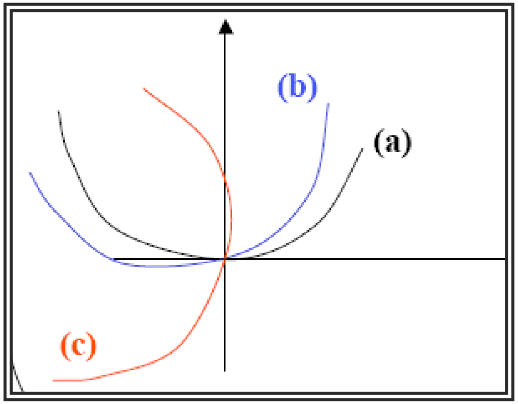
Partie II- Modélisation

1. Techniques de modélisation
2. **Modélisation surfacique**
   - Représentation de Courbes
   - Représentation de Surfaces
   - Surfaces de forme libre, déformations
   - Modélisation surfacique interactive
3. Modélisation volumique

Représentations des Courbes - Courbes paramétrées

- Utiliser une représentation mathématique :
  - y=f(x)
  - z=g(x)
- Avantages
  - En général la simplicité
  - L'accès direct à y et z connaissant x
- Inconvénients (majeurs)
  - Tangente verticale : il faut changer de référentiel
  - Une rotation altère la définition de la courbe :
    - Modification du domaine de variation (b)
    - (c) non représentable par le même type d'équation



Représentations des Courbes - Courbes paramétrées

- Utiliser une représentation paramétrique

$$\left\| \begin{array}{l} X=f(t) \\ Y=g(t) \\ Z=h(t) \end{array} \right.$$

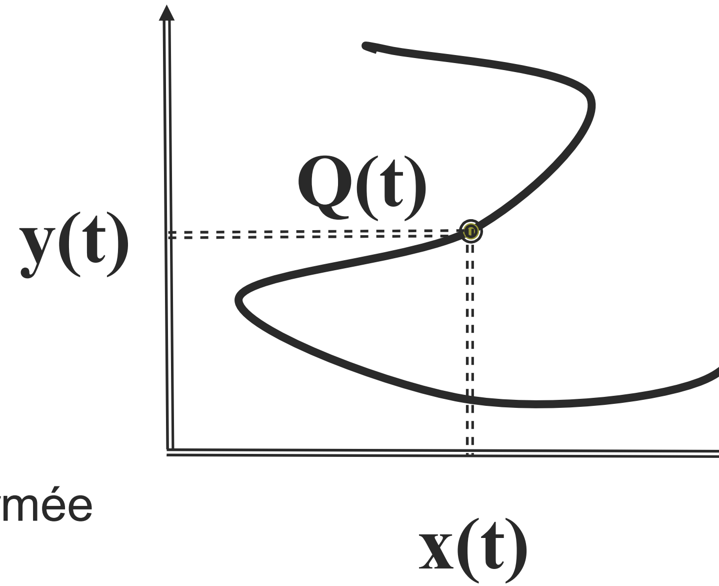
  f, g et h sont des polynômes en t

  - Exemple: $h(t)=a\,t^{3} + b\,t^{2} + c\,t + d$
  - Une courbe est approximée par une partie de courbe polynômiale

Représentations des Courbes - Courbes paramétrées

- Définition des courbes paramétrées
  - On appelle courbe paramétrée dans l'espace toute application continue :

$$\begin{cases} Q:[a,b] \to IR^3 \\ t \mapsto Q(t) = (x(t), y(t), z(t)) \end{cases}$$



  - La courbe paramétrée Q est dite fermée si Q(a)=Q(b)
  - Si Q est à valeur dans le plan IR^2 au lieu de l'espace IR^3, la courbe Q est appelée *courbe plane*

Représentations des Courbes - Courbes paramétrées

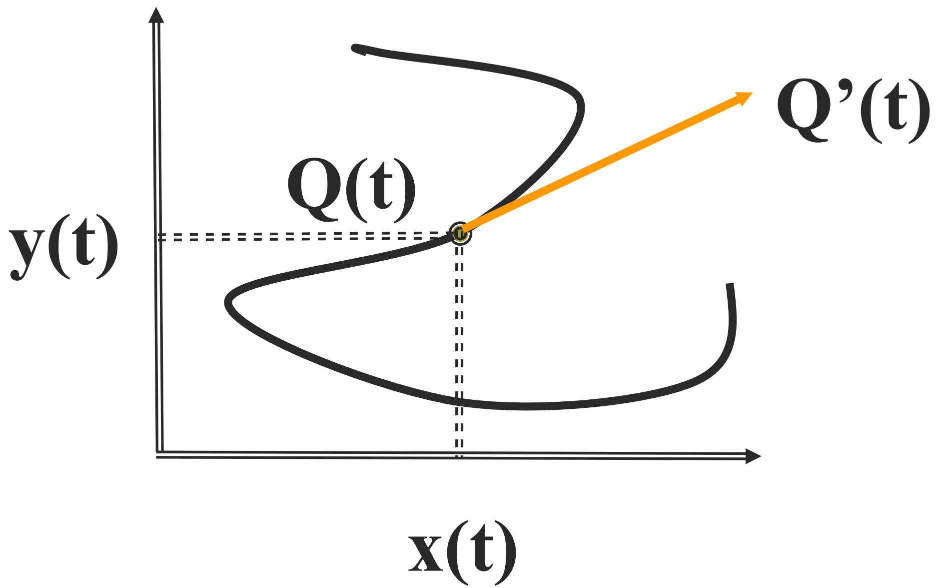
- Dérivée d'une courbe paramétrée
  - Soit Q:[a,b]→IR² une courbe paramétrée $t \mapsto x(t), t \mapsto y(t), t \mapsto z(t)$
  - La courbe Q est dite *dérivable* en un point t Є [a,b] si chacune des fonctions sont dérivables au point t.
  - On note le vecteur dérivé dont les coordonnées sont les dérivées au point t

$$Q^{'}(t) = \frac{dQ}{dt} = (x'(t), y'(t), z'(t))$$

  - La courbe est dite *régulière* si pour tout t Є [a,b], la courbe est dérivable au point t et la dérivée Q'(t) de Q est non nulle (c'est-à-dire qu'une au moins des coordonnées de ce vecteur est non nulle).
  - Nous utiliserons dans la suite des courbes paramétrées régulières

Représentations des Courbes - Courbes paramétrées

- Dérivée d'une courbe paramétrée
  - En un point t d'une courbe régulière, le vecteur Q'(t) est un vecteur tangent à la courbe Q au point Q(t)



Représentations des Courbes - Courbes paramétrées

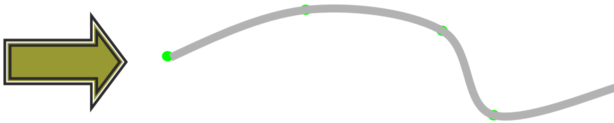
- Dérivée d'ordre k, courbes de classe C^k
  - La fonction dérivée Q'(t) peut elle-même être dérivable. Q est alors deux fois dérivable :
    - Elle est notée Q''(t)
    - On dit que c'est la dérivée seconde de Q au point t.
    - Q''(t) de Q au point t représente la variation de la tangente à Q au voisinage du point t, et donne des indications sur la courbure de la courbe Q au point t.
  - Etant donné k Є IN, la courbe Q est dite k fois dérivable, si on peut dériver k-1 fois la courbe Q en obtenant toujours comme dérivées une courbe dérivable.
  - La dérivée $k^{ième}$ de Q, notée $Q^{(k)}$ est alors la fonction de [a,b] dans IR^3 obtenue en dérivant k fois la courbe Q.
  - Par convention, si k=0, la dérivée $Q^{(0)}$ de Q est la courbe Q elle-même
  - La courbe Q est dite de *classe C^k*, avec k Є IN, si les dérivées de l'application Q existent et sont continues jusqu'à l'ordre k.

Représentations des Courbes - Courbes paramétrées

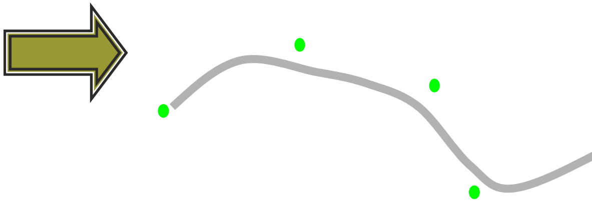
- Raccordement de courbes paramétrées
  - Soient $Q_1:[a,b]\rightarrow IR^3$ et $Q_2:[b,c]\rightarrow IR^3$ deux courbes paramétrées de classe C^k, avec k Є IN
  - Les courbes Q_1 et Q_2 se raccordent C^k pour t=b si les dérivées de Q_1 pour t=b coïncident jusqu'à l'ordre k avec les dérivées de Q_2 jusqu'à l'ordre k pour t=b

Courbes paramétrées

- Interpolation, approximation
  - Par la suite, construction des courbes à partir de *points de contrôle*.
    - Etant donné *m* points $P_0, \ldots, P_m$, avec $m \geq 2$, appelés points de contrôle, nous cherchons une courbe lisse (par exemple de classe C^2) qui « ressemble » à la ligne polygonale formée par les points de contrôle.
      - On distingue :
        - L'interpolation : la courbe doit passer par chaque point de contrôle



        - L'approximation : la courbe doit seulement passer à proximité des points de contrôle.



Représentations des Courbes - Courbes polynomiales

- Courbes de degré d quelconque
  - Une courbe Q : [a,b] → IR^3 qui associe Q(t)=(x(t),y(t),z(t)) est dite *polynomiale* si chacune des coordonnées x(t), y(t), z(t) s'exprime comme un polynôme en t.
  - Si Q est polynomiale, il existe un nombre d, appelé *degré* de la courbe Q, et des coefficients a_i, b_i, c_i pour i=0,…,d tels que pour tout t Є [a,b] on ait l'égalité (E) suivante :

$$(E) : \begin{cases} x(t) = \sum_{i=0}^{d} a_i t^i \\ y(t) = \sum_{i=0}^{d} b_i t^i \\ z(t) = \sum_{i=0}^{d} c_i t^i \end{cases}$$

Représentations des Courbes - Courbes polynomiales

- Courbes de degré d quelconque
  - Soit T le vecteur à d+1 composantes $T=(t^d, t^{d-1},\ldots, t, 1)$
  - Soit C la matrice

$$C = \begin{bmatrix} a_d & b_d & c_d \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_0 & b_0 & c_0 \end{bmatrix}$$

  - L'équation (E) précédente est équivalente à l'écriture matricielle suivante :

    (E) : $Q(t)=(x(t),y(t),z(t))=T \cdot C$

Représentations des Courbes - Courbes polynomiales

- Courbe cubique
  - Une courbe cubique est une courbe polynomiale ayant pour degré d $\leq$ 3.
  - L'équation (E) s'écrit :

$$(E): \begin{cases} x(t) = a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0 \\ y(t) = b_3 t^3 + b_2 t^2 + b_1 t + b_0 \\ z(t) = c_3 t^3 + c_2 t^2 + c_1 t + c_0 \end{cases}$$

  - L'équation matricielle est Q(t) = T . C avec T=(t^3,t^2,t,1) et la matrice C de taille 4 x 3 :

$$C = \begin{bmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_0 & b_0 & c_0 \end{bmatrix}$$

Représentations des Courbes - Courbes polynomiales

- Courbe cubique
  - Connaissant la matrice C et une valeur de t, on peut calculer le point Q(t) à partir de l'équation matricielle précédente.
  - Notons $T'=(3t^2, 2t, 1, 0)$ la dérivée par rapport à t du vecteur T
  - La dérivée de la courbe Q peut être calculée grâce à

    $Q'(t)=T' . C$

Représentations des Courbes - Courbes polynomiales

- Matrice géométrique : Définition
  - Pour les courbes cubiques, il est fréquent de décomposer C en deux matrice M et G
    - M : matrice 4 x 4, matrice constante qui dépend du type de courbes considérées (courbes hermitiennes, courbes de Bézier, courbes splines,…)
    - G : matrice 4 x 3, matrice *géométrique* qui dépend des points de contrôle et caractérise les contraintes géométriques sur la courbe
    - $C = M \cdot G$
    - (E) : $Q(t) = T \cdot M \cdot G$

Représentations des Courbes - Courbes polynomiales

- Matrice géométrique
  - Pour construire une courbe cubique à partir de points de contrôle, on peut faire intervenir différentes sortes de contraintes géométriques, qui forment les coefficients de la matrice géométrique
    - Coordonnées des points de contrôle
    - Coordonnées des dérivées de la courbe aux points de contrôle
    - Contrainte de continuité de raccordement avec d’autres courbes dans le cas de courbes polynomiales par morceaux

Représentations des Courbes - Courbes polynomiales

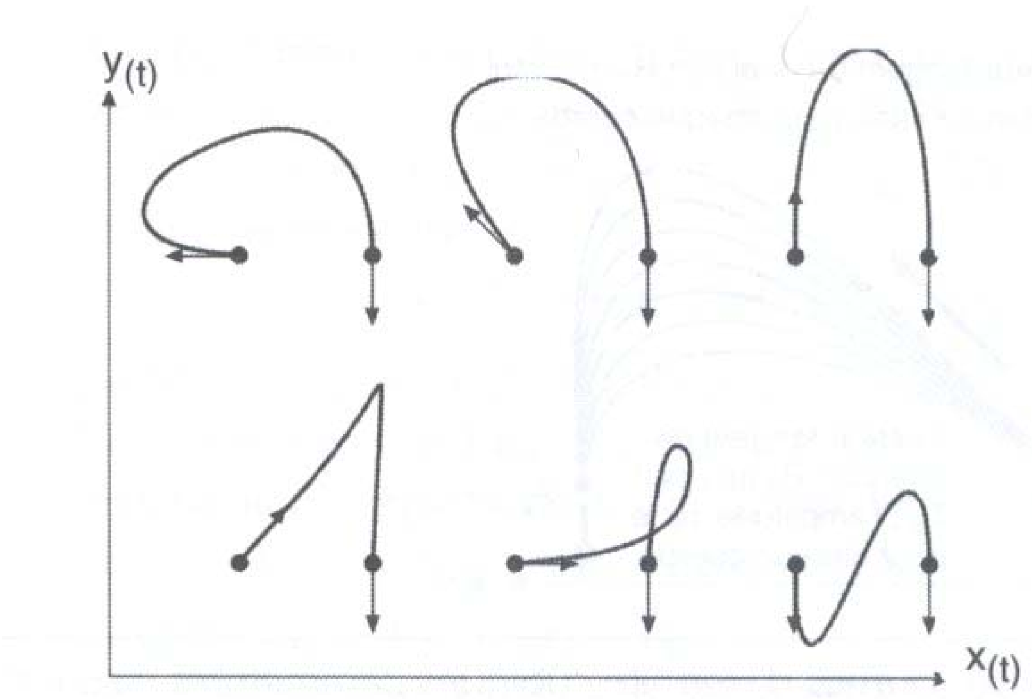
- Dans la suite de ce cours nous étudierons les types de courbes cubiques suivantes :
  - Les courbes hermitiennes, définies par deux points de contrôles et les dérivées en ces points
  - Les courbes de Bézier, définies par deux points de contrôle extrémités, et par deux autres points qui déterminent la dérivée aux extémités
  - Les courbes splines, définies par quatre points de contrôles

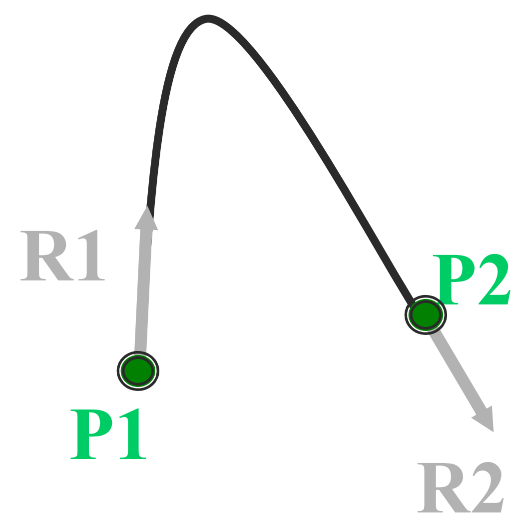
Représentations des Courbes - Courbes polynomiales (hermitiennes)

- Définition
  - Soient $P_1=(x_1,y_1,z_1)$ et $P_4=(x_4,y_4,z_4)$ deux points de contrôle.
  - Soient $R_1=(x'_1,y'_1,z'_1)$ et $R_4=(x'_4,y'_4,z'_4)$ deux vecteurs de IR^3.
  - La courbe hermitienne avec P_1 et P_4 pour points de contrôle et R_1 et R_4 pour dérivées aux points de contrôle est l'unique courbe cubique $Q : [0,1] \rightarrow IR^3$ telle que :
    - $Q(0)=P_1$ et $Q(1)=P_4$
    - $Q'(0)=R_1$ et $Q'(1)=R_4$.
  - On obtient la matrice géométrique pour les courbes hermitiennes G_H suivante :

$$G_H = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_4 & y_4 & z_4 \\ x'_1 & y'_1 & z'_1 \\ x'_4 & y'_4 & z'_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_4 \\ R_1 \\ R_4 \end{bmatrix}$$

Représentations des Courbes
- Courbes polynomiales (hermitiennes)





Représentations des Courbes - Courbes polynomiales (hermitiennes)

- Définition : Matrice hermitienne M_H
  - $Q(t) = T \cdot M_H \cdot G_H$ avec $T = (t^3, t^2, t, 1)$
  - G_H : matrice géométrique
  - M_H : *matrice hermitienne* (matrice constante)
- Calcul de la matrice hermitienne
  - Sachant que $Q(0)=P_1$, $Q(1)=P_4$, $R_1=Q'(0)$ et $R_4 = Q'(1)$ on a :

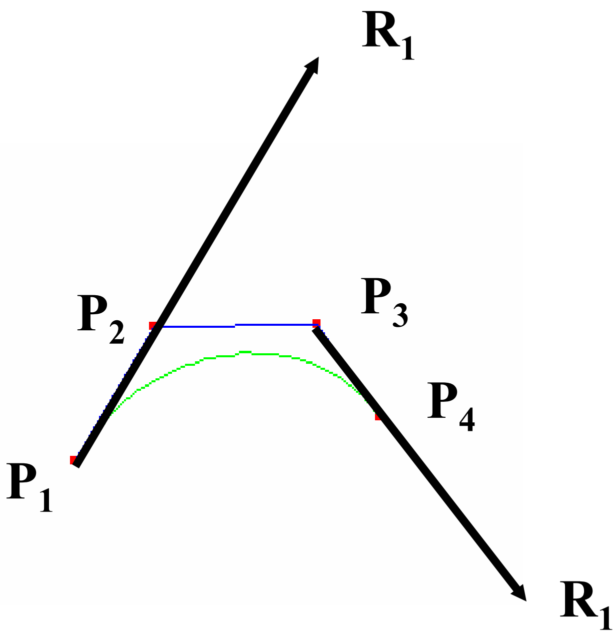
$$M_H = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q(t) = (2t^3 - 3t^2 + 1)P_1 + (-2t^3 + 3t^2)P_4 + (t^3 - 2t^2 + t)R_1 + (t^3 - t^2)R$$

Représentations des Courbes - Courbes polynomiales (hermitiennes)

- Définition
  - Courbe hermitienne particulière approximant une ligne polygonale de 4 points de contrôles
  - La courbe de Bézier cubique de points de contrôles P_1, P_2, P_3, P_4 est la courbe hermitienne d'extrémités P_1 et P_4 avec pour dérivée aux extrémités R_1 et R_4 avec :
    - $R_1 = 3(P_2 - P_1)$
    - $R_4 = 3(P_4 - P_3)$

$$G_B = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix}$$



Représentations des Courbes - Courbes polynomiales (Courbes de Bézier Cubiques)

- Matrice de Bézier

$$M_B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q(t) = (1-t)^3 P_1 + 3t(1-t)^2 P_2 + 3t^2(1-t) P_3 + t^3 P_4$$

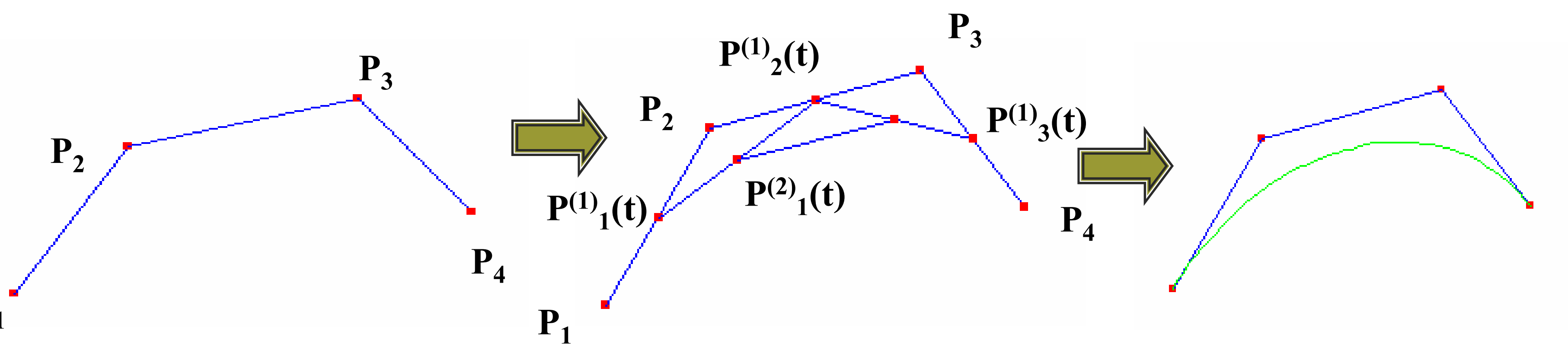
Représentations des Courbes
- Courbes polynomiales (Courbes de Bézier Cubiques)

Algorithme de Casteljau

- Définition
  - Considérons une ligne brisée ayant pour sommets P1, P2, P3, P4 et une valeur t Є [0,1]. On peut construire pour i=1,2,3 un point

    $P_i^{(1)}(t)=(1-t)P_i+t\ P_{i+1}$
  - Pour i=1,2,3 le point $P_i^{(1)}(t)$ se trouve sur le segment $[P_i, P_{i+1}]$.
  - Considérons maintenant la ligne brisée formée par les trois points $P_1^{(1)}(t)$, $P_2^{(1)}(t)$ et $P_3^{(1)}(t)$. On peut appliquer le même procédé pour i=1,2

    $P_i^{(2)}(t)=(1-t)P^{(1)}_i+t\ P^{(1)}_{i+1}$



Représentations des Courbes
- Courbes polynomiales (Courbes de Bézier Cubiques)

- **Algorithme de De Casteljau**

Début

  Pour j=0 à n

    $P_i^0 = P_i$

  FinPour

  Pour i=1 à n

    Pour j=0 à n-i

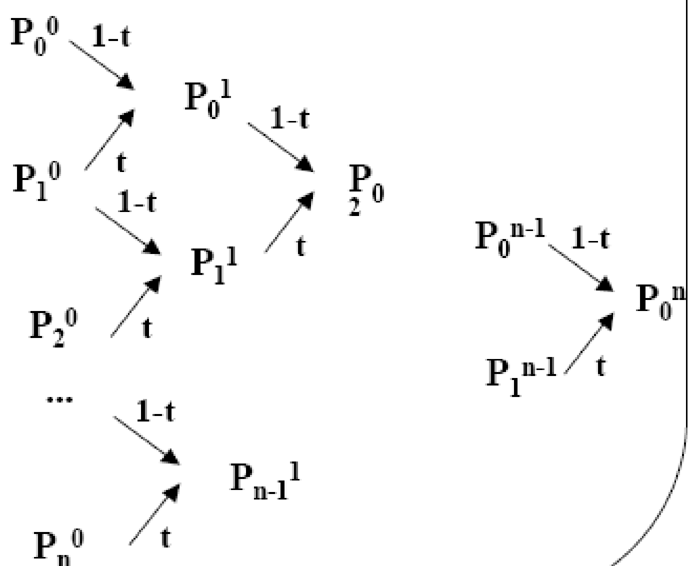
      $P_j^i = (1\text{-}t)\, P_j^{i\text{-}1} + t\, P_{j+1}^{i\text{-}1}$

    FinPour

  FinPour

  // $C(t) = P_0^n$

Fin



Représentations des Courbes - Courbes polynomiales (Courbes de Bézier d'ordre n)

- Définition par l'algorithme de Casteljau
  - On peut généraliser les courbes de Bézier à un nombre $n \geq 2$ quelconque de points de contrôles
  - Une courbe de Bézier d'ordre n-1 est définie par les points $P_0, \ldots, P_{n-1}$.
  - Pour définir Q(t)
    - On pose $b_i^{(0)}(t)=P_i$ pour $i=0,\ldots,n-1$
    - Pour $r=1,\ldots, n-1$ et $i = 0,\ldots, n-1-r$, on pose

      $b_i^{(r)}(t)=(1-t)b_i^{(r-1)}(t)+tb_{i+1}^{(r-1)}(t)$
    - On définit ainsi par récurrence un point $Q(t)=b_0^{(n-1)}(t)$

Représentations des Courbes - Courbes polynomiales (Courbes de Bézier d'ordre n)

- Polynômes de Bernstein
  - Les polynômes de Bernstein $B_{i,n}$ de degré n sont définis pour i=0,…, n par la formule

$$B_{i,n}(t) = \frac{n!}{i!(n-i)!} t^i (1-t)^{n-i}$$

  - Il y a (n+1) polynômes de Bernstein de degré n
  - Théorème : Soit maintenant $P_0, \dots, P_{n-1}$ les points de contrôle. Soit t ∈[0,1]. La courbe de Bézier Q d'ordre (n-1) ayant les points P_i pour points de contrôles s'exprime par

$$Q(t) = \sum_{i=0}^{n-1} P_i B_{i,n-1}(t)$$

  - La courbe Q s'exprime comme une somme des polynômes $B_{i,n-1}$, pondérée par les points de contrôles

Représentations des Courbes - Courbes polynomiales (Courbes de Bézier d'ordre n)

Polynômes de Bernstein

- **<u>Propriété fondamentale 2</u> : positivité**

$$\forall t \in [0,1] \quad \varphi_{n,i}(t) \geq 0$$

$$\forall t \in]0,1[\quad \varphi_{n,i}(t) > 0$$

- **<u>Propriété fondamentale 3</u> : dite de symétrie**

$$\forall t \in [0,1] \quad \varphi_{n,i}(t) = \varphi_{n,n-i}(1-t)$$

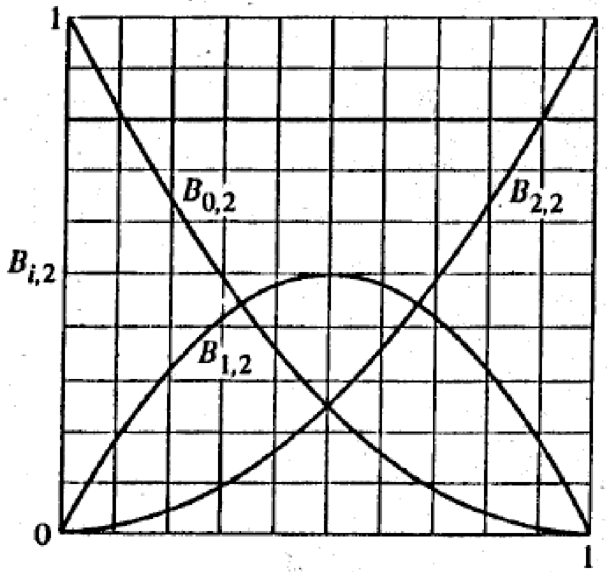
- **<u>Propriété fondamentale 4</u> : partition de l'unité**

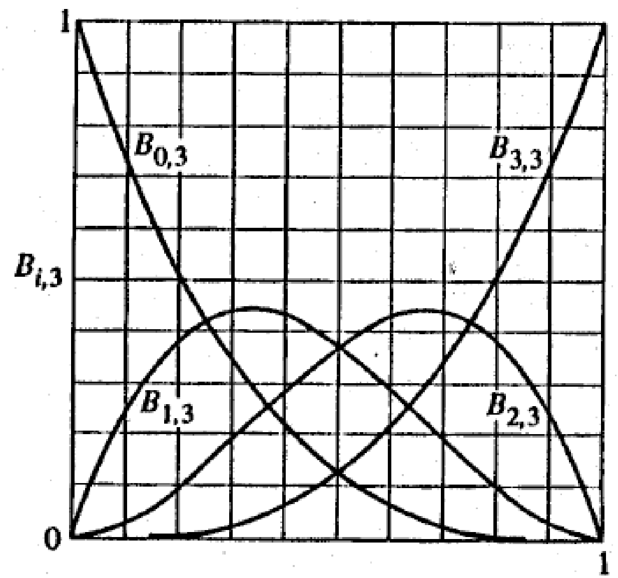
$$\forall t \in [0,1] \quad \sum_{i=0}^{n} \varphi_{n,i}(t) = 1 \qquad (\text{vrai sur } \Re)$$

Représentations des Courbes - Courbes polynomiales (Courbes de Bézier d’ordre n)

Polynômes de Bernstein

Quelques exemples



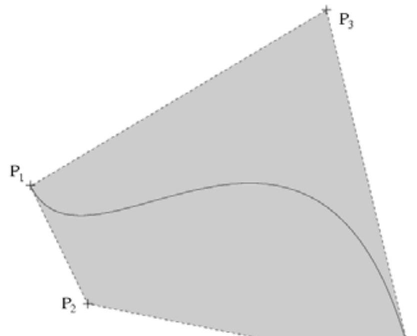


$$\begin{cases} B_{0,2}(t) = t^2 - 2t + 1 \\ B_{1,2}(t) = -2t^2 + 2t \\ B_{2,2}(t) = t^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} B_{0,3}(t) = -t^3 + 3t^2 - 3t + 1 \\ B_{1,3}(t) = 3t^3 - 6t^2 + 3t \\ B_{2,3}(t) = -3t^3 + 3t^2 \\ B_{3,3}(t) = t^3 \end{cases}$$

Représentations des Courbes - Courbes polynomiales (Avantages / Inconvénients)

- Invariance par translation, changement d’échelle ou rotation (cf algo de Casteljau) -> intéressant si besoin de transformations
- Enveloppe convexe : la courbe se trouve dans l’enveloppe convexe des points de contrôle
- Problème du contrôle global : la modification d’un seul point affecte toute la courbe -> problématique pour un graphiste qui veut affiner son dessin en modifiant un point de contrôle
- Problème du degré élevé : Si la forme doit être complexe (nombreux virages), sa représentation sous forme de courbe de Bézier aura un degré très élevé -> Coûteux en calcul

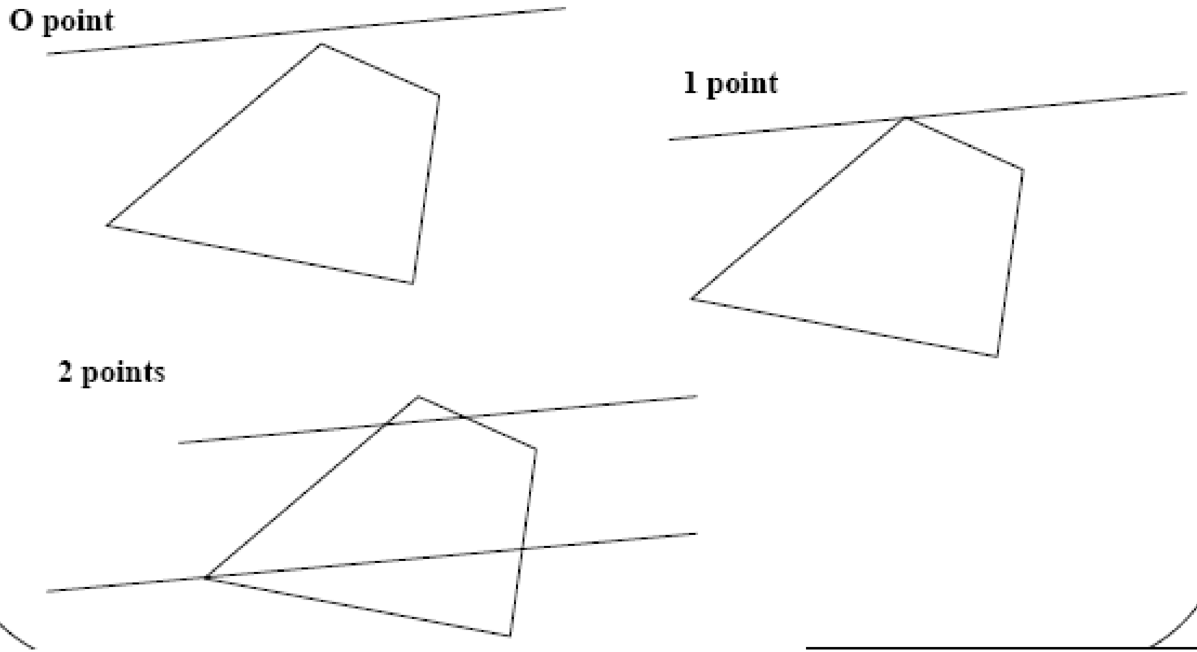


Rappel

Enveloppe convexe

- **Polygone convexe :**

Un polygone est convexe si toute droite le coupe en au plus deux points (exceptés les supports des côtés !)

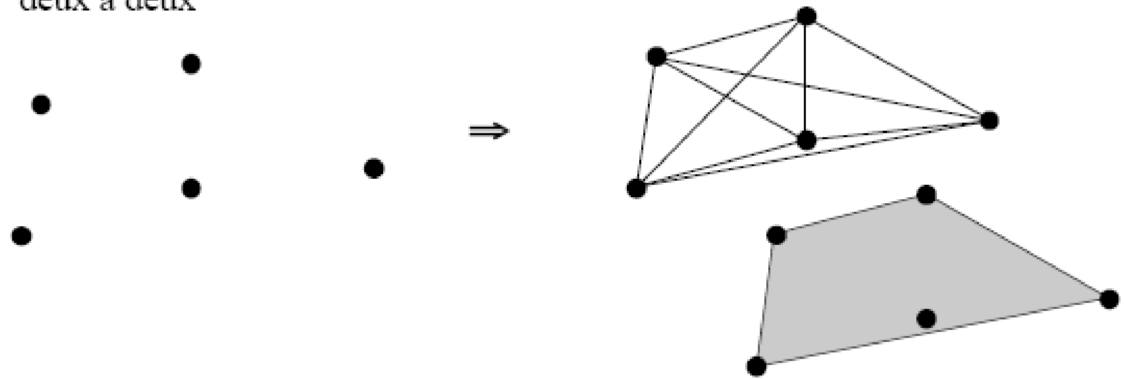


Rappel

Enveloppe convexe

Enveloppe convexe d'un ensemble de points :

- **C'est le plus petit polygone convexe incluant tous les points**
  - c'est l'enveloppe de l'ensemble des segments joignant tous les points deux à deux



- **La frontière ne passe par nécessairement par tous les points**
- **Techniques de construction et de manipulation : géométrie algorithmique**

Représentations des Courbes
- Courbes polynomiales (Fonctions de la base des B-Splines)

- Les courbes B-splines se définissent à partir d'une base de fonctions.
- A la différence des Bézier, les courbes B-splines ne sont pas polynomiales, mais polynomiales par morceaux
- Permet d'approximer un nombre quelconque de points de contrôles par des courbes de degré fixé, par exemple cubique par morceaux
- Les avantages:
  - Contrôle local de la courbe
  - Le degré des courbes est peu élevé