

Contributions aux Cartes Combinatoires et Cartes Généralisées : Simplification, Modèles, Invariants Topologiques et Applications

Guillaume DAMIAND

Laboratoire d'Informatique en Image et Systèmes d'information

LIRIS UMR 5205 CNRS

INSA de Lyon/Université Claude Bernard Lyon 1/Université Lumière Lyon 2/Ecole Centrale de Lyon

Bâtiment Nautibus (710), 43, Boulevard du 11 Novembre 1918, 69622 Villeurbanne Cedex

<http://liris.cnrs.fr>

Motivations

Cadre

Manipulation d'objets graphiques :

- **modélisation géométrique** : objets surfaciques ou volumiques
- **traitement d'images** : ensembles de pixels ou voxels



Besoins

Subdivision en cellules

sommets, arêtes, faces, volumes ...



sommet : point 3D
face : couleur
volume : résistance



face : couleur, taille, forme
arête : longueur, gradient

Besoins

Relations entre les cellules
adjacence, incidence, imbrication



Principaux modèles

Modélisation géométrique

☰ triangles, tétraèdres, ... : modèles **simpliciaux**

+ : simples, nD , boules topologiques

- : nombre d'éléments, besoin de trianguler

[SPANIER 66 ; MAY 67 ;

AGOSTON 76 ; LANG 95]

☰ windged-edge, half-edge, DCEL, quad-edge...

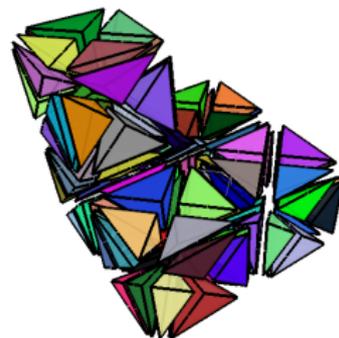
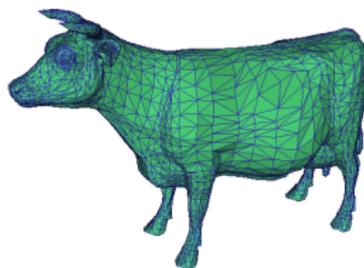
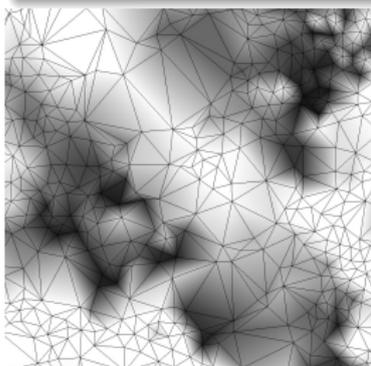
+ : formes générales, opérations locales

- : 2D, quelques travaux 3D, cellules \neq boules

[WEILER 85 ; BAUMGART 75 ;

GUIBAS STOLFI 85 ; MANTYLA 88]

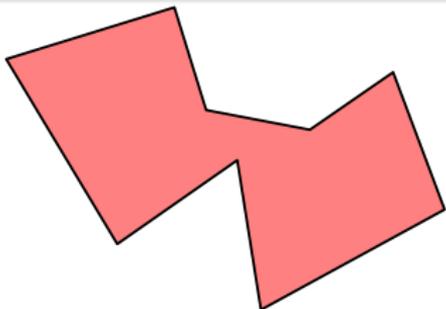
☰ puis des modèles à base de **cartes**...



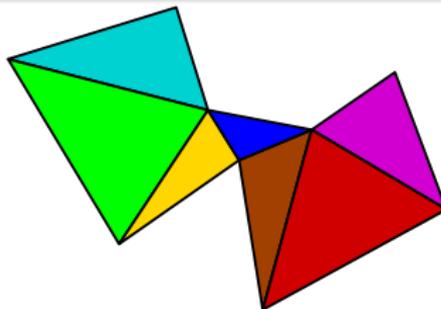
Principaux modèles

Modélisation géométrique

- ☰ triangles, tétraèdres, ... : modèles **simpliciaux** [SPANIER 66 ; MAY 67 ; AGOSTON 76 ; LANG 95]
 - + : simples, nD , boules topologiques
 - : nombre d'éléments, besoin de trianguler
- ☰ windged-edge, half-edge, DCEL, quad-edge... [WEILER 85 ; BAUMGART 75 ; GUIBAS STOLFI 85 ; MANTYLA 88]
 - + : formes générales, opérations locales
 - : 2D, quelques travaux 3D, cellules \neq boules
- ☰ puis des modèles à base de **cartes**...



9 sommets, 9 arêtes, 1 face



9 sommets, 15 arêtes, 7 faces

Principaux modèles

Modélisation géométrique

☰ triangles, tétraèdres, ... : modèles **simpliciaux**

+ : simples, nD , boules topologiques

- : nombre d'éléments, besoin de trianguler

[SPANIER 66 ; MAY 67 ;

AGOSTON 76 ; LANG 95]

☰ windged-edge, half-edge, DCEL, quad-edge...

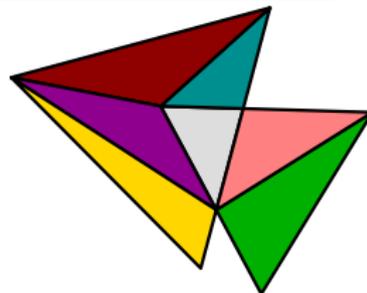
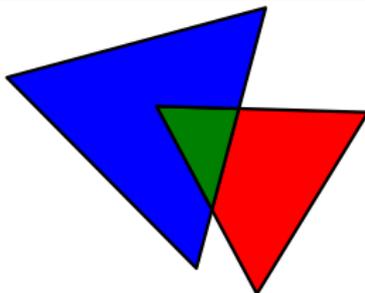
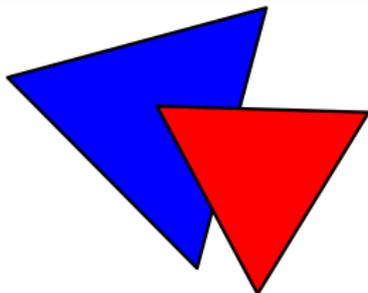
[WEILER 85 ; BAUMGART 75 ;

+ : formes générales, opérations locales

GUIBAS STOLFI 85 ; MANTYLA 88]

- : 2D, quelques travaux 3D, cellules \neq boules

☰ puis des modèles à base de **cartes**...



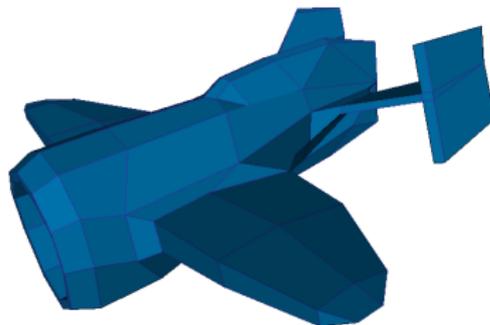
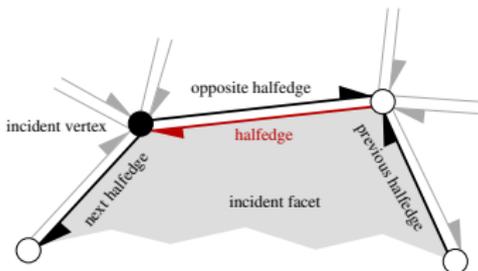
Principaux modèles

Modélisation géométrique

- ☰ triangles, tétraèdres, ... : modèles **simpliciaux**
 - + : simples, nD , boules topologiques
 - : nombre d'éléments, besoin de trianguler
- ☰ winged-edge, half-edge, DCEL, quad-edge...
 - + : formes générales, opérations locales
 - : 2D, quelques travaux 3D, cellules \neq boules
- ☰ puis des modèles à base de **cartes**...

[SPANIER 66 ;MAY 67 ;
AGOSTON 76 ;LANG 95]

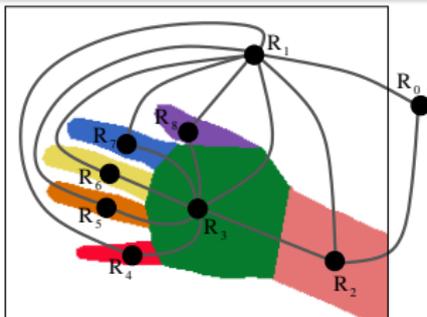
[WEILER 85 ;BAUMGART 75 ;
GUBAS STOLFI 85 ;MANTYLA 88]



Principaux modèles

Traitement d'images

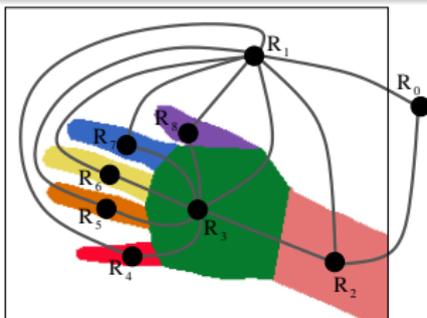
- ≡ graphe d'adjacence des régions (RAG) [ROSENFELD 74]
 - + : simple, nD
 - : pas de multi-adjacence, pas de représentation des sommets, pas d'ordre des arêtes, pas de notion d'imbrication
- ≡ plusieurs extensions du RAG
 - multi-graphe d'adjacence
 - graphes duaux [WILLERSINN KROPATSCH 94 ;KROPATSCH 95]
- ≡ puis des modèles à base de cartes...



Principaux modèles

Traitement d'images

- ≡ graphe d'adjacence des régions (RAG) [ROSENFELD 74]
 - + : simple, nD
 - : pas de multi-adjacence, pas de représentation des sommets, pas d'ordre des arêtes, pas de notion d'imbrication
- ≡ plusieurs extensions du RAG
 - multi-graphe d'adjacence
 - graphes duaux [WILLERSINN KROPATSCH 94 ;KROPATSCH 95]
- ≡ puis des modèles à base de **cartes**...



Mes préoccupations de recherche

Modèles

- ▄ description des cellules et des relations
- ▄ généralité nD
- ▄ optimisations

Opérations

- ▄ constructions / modifications des modèles
- ▄ calcul de caractéristiques
- ▄ optimisations

Applications

- ▄ traitement d'images
- ▄ modélisation géométrique

Mes préoccupations de recherche

Invariants topologiques

- ≡ algorithmes de calcul
- ≡ mise à jour locale lors des opérations de base

Notre objectif

Utiliser ces invariants pour :

- ≡ contrôler la validité des objets et des opérations
- ≡ guider les opérations

Contributions principales

Modèles et Opérations

Opérations de base
 Pyramides généralisées
 Isomorphisme; sous-isomorphisme
 Recherche de motifs fréquents

Invariants Topologiques

Caractéristique d'Euler-Poincaré
 Nombres de Betti 3D
 Schéma polygonal canonique
 Groupes d'Homologie 2D/3D

Images 2D/3D

Carte topologique 2D/3D
 Opérations : extraction, découpe, fusion
 Segmentation : méthode "split and merge";
 critère topologique; chaîne de Markov;
 multi-échelle; modèle déformable discret;
 méthode "top-down"
 Opérations de traitement d'images

Modélisation Géométrique

Moka : un modéleur géométrique
 à base topologique
 Reconstruction de modèles 3D à partir
 de plans numériques

Contributions principales

Modèles et Opérations

[LIRIS] [XLIM-SIC] [LHC] [LINA]

[ANR Sattic]

[Thèse Carine Simon]

[Thèse Stéphane Gosselin]

[Thèse Camille Combier]

Invariants Topologiques

[LIRIS] [XLIM-SIC] [PRIP]

[Thèse Alexandre Dupas]

Images 2D/3D

[LIRIS] [XLIM-SIC] [Greyc] [LAMA] [LaBRI]

[AS Géométrie Discrete]

[ANR Fogrimmi]

[Thèse Alexandre Dupas]

[Thèse Romain Goffe]

Modélisation Géométrique

[LIRIS] [XLIM-SIC] [LaMI] [LISI]

[RNTL Nogemo]

[Thèse Sébastien Horna]

Contributions principales

Modèles et Opérations

Opérations de base

Pyramides généralisées
Isomorphisme; sous-isomorphisme
Recherche de motifs fréquents

Invariants Topologiques

Caractéristique d'Euler-Poincaré

Nombres de Betti 3D

Schéma polygonal canonique
Groupes d'Homologie 2D/3D

Images 2D/3D

Carte topologique 2D/3D

Opérations : extraction, découpe, fusion

Segmentation : méthode "split and merge";
critère topologique; chaîne de Markov;
multi-échelle; modèle déformable discret;
méthode "top-down"

Opérations de traitement d'images

Modélisation Géométrique

Moka : un modèleur géométrique à base topologique

Reconstruction de modèles 3D à partir
de plans numériques

Plan

- 1 Cartes combinatoires/généralisées
- 2 Opérations de base
- 3 Cartes et images
- 4 Invariants topologiques
- 5 Applications

1. Cartes combinatoires/généralisées

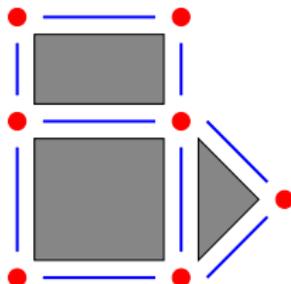
- 1 Cartes combinatoires/généralisées
 - Les cartes combinatoires
 - Les cartes généralisées
 - Cellules dans les cartes
- 2 Opérations de base
- 3 Cartes et images
- 4 Invariants topologiques
- 5 Applications

Les cartes combinatoires

- introduites en **2D** [EDMONDS 60 ; TUTTE 63 ; JACQUES 70 ; CORI 73]
 ⇒ graphes planaires
- étendues en **3D** [ARQUES KOCH 88 ; LIENHARDT 88 ; SPEHNER 91]
- définies en **nD** [LIENHARDT 89]

Intérêts :

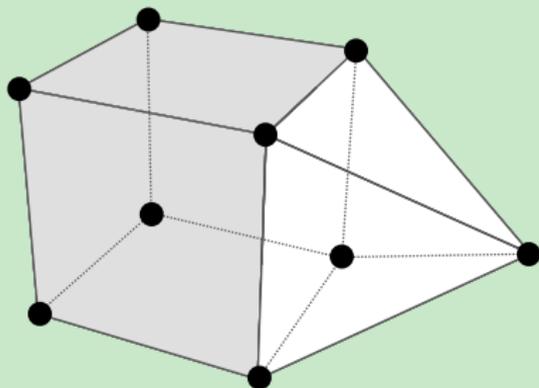
- représentation des **subdivisions** de l'espace
- définition simple en **nD** :
 un seul élément de base
- représentation de la **topologie** :
 relations d'**adjacence**
- **implantation efficace** d'algorithmes



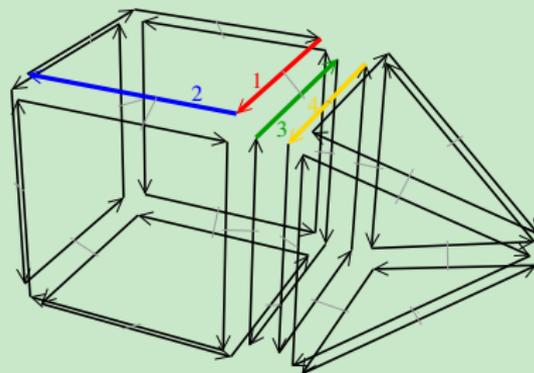
Présentation intuitive des cartes combinatoires

Carte combinatoire = brins + relations

Exemple (3D)



9 sommets ; 16 arêtes ;
10 faces ; 2 volumes



40 brins ; $\beta_1, \beta_2, \beta_3$
 $\beta_1(1) = 2$; $\beta_2(1) = 3$; $\beta_3(3) = 4$;

Définition algébrique des cartes combinatoires nD

Définition (carte combinatoire)

[LIENHARDT 94]

Soit $n \geq 0$. Une n carte combinatoire (ou n -carte) est une algèbre $C = (B, \beta_1, \dots, \beta_n)$ où :

- ① B est un ensemble fini de **brins** ;
- ② β_1 est une **permutation** sur B ;
- ③ $\forall i, 2 \leq i \leq n, \beta_i$ est une **involution** sur B sans point fixe ;
- ④ $\forall i, 1 \leq i \leq n - 2, \forall j, i + 2 \leq j \leq n, \beta_i \circ \beta_j$ est une **involution**.

Représentation d'objets **fermés** et **orientables**

Remarque :

Ligne 4 : contraintes sur les relations

⇒ garantit la validité des objets

Notion avancée : β_i avec ou sans point fixe

Cartes combinatoires ouvertes nD

Extension des cartes combinatoires : [POUDRET *et al.* 07][DAMIAND *et al.* XX]
 ⇒ représentation d'objets orientables **fermés/ouverts**

Définition (carte combinatoire ouverte)

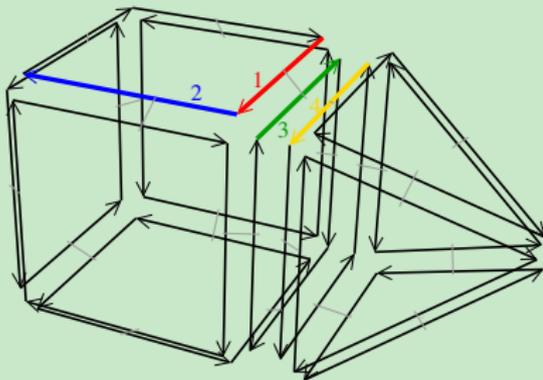
Soit $n \geq 0$. Une n carte combinatoire ouverte (ou n -carte ouverte) est une algèbre $C = (B, \beta_1, \dots, \beta_n)$ où :

- 1 B est un ensemble fini de **brins** ;
- 2 β_1 est une **permutation partielle** sur B ;
- 3 $\forall i, 2 \leq i \leq n, \beta_i$ est une **involution partielle** sur B sans point fixe ;
- 4 $\forall i, j : 0 \leq i < i + 2 \leq j \leq n$ et $j \geq 3, \beta_i \circ \beta_j$ est une **involution partielle**.

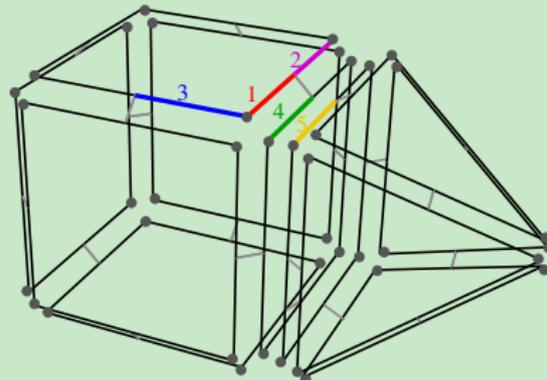
Les cartes généralisées

Carte généralisée :
couper en deux chaque brin d'une carte combinatoire

Exemple



carte combinatoire
40 brins, $\beta_1, \beta_2, \beta_3$



carte généralisée
80 brins, $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$

Définition algébrique des cartes généralisées nD

Définition (carte généralisée)

[LIENHARDT 94]

Soit $n \geq 0$. Une n carte généralisée (ou nG -carte) est une algèbre $G = (B, \alpha_0, \dots, \alpha_n)$ où :

- ① B est un ensemble fini de **brins** ;
- ② $\forall i, 0 \leq i \leq n, \alpha_i$ est une **involution** sur B ;
- ③ $\forall i, 0 \leq i \leq n - 2, \forall j, i + 2 \leq j \leq n, \alpha_i \circ \alpha_j$ est une **involution**.

Avantages :

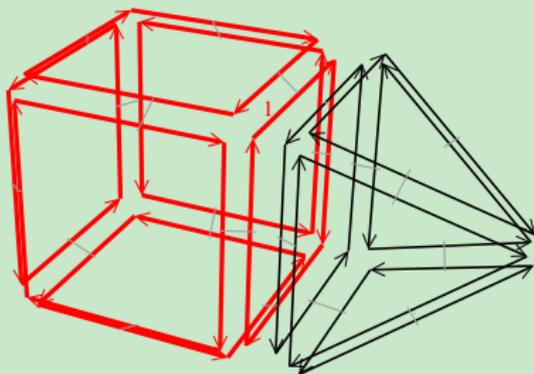
- ▀ définition **homogène** pour toutes les dimensions
 ⇒ facilite les définitions car pas de cas particulier
- ▀ représentation d'objets orientables/non-orientables

Inconvénient : 2 fois plus de brins

Cellules dans les cartes

i -cellule : ensemble de brins (notion d'**orbite**)

Exemple (3D)

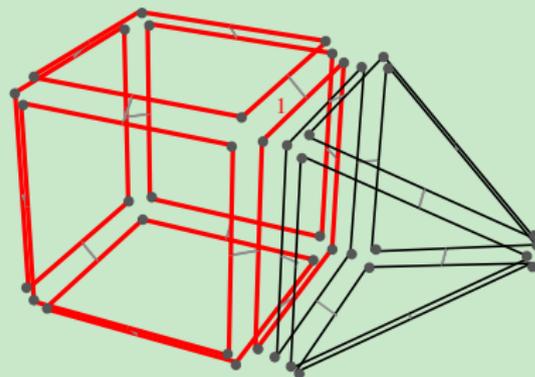


volume : $\langle \beta_1, \beta_2 \rangle$

face : $\langle \beta_1, \beta_3 \rangle$

arête : $\langle \beta_2, \beta_3 \rangle$

sommet : $\langle \beta_1 \circ \beta_2, \beta_1 \circ \beta_3 \rangle$



volume : $\langle \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \rangle$

face : $\langle \alpha_0, \alpha_1, \alpha_3 \rangle$

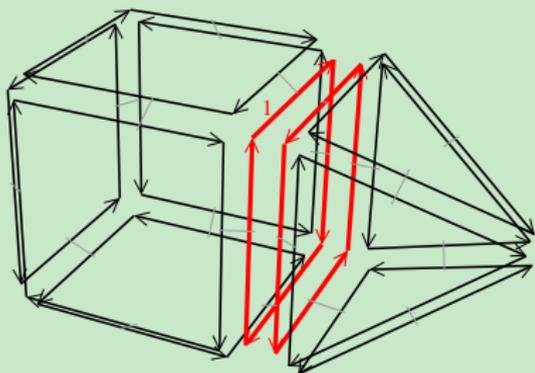
arête : $\langle \alpha_0, \alpha_2, \alpha_3 \rangle$

sommet : $\langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \rangle$

Cellules dans les cartes

i -cellule : ensemble de brins (notion d'**orbite**)

Exemple (3D)

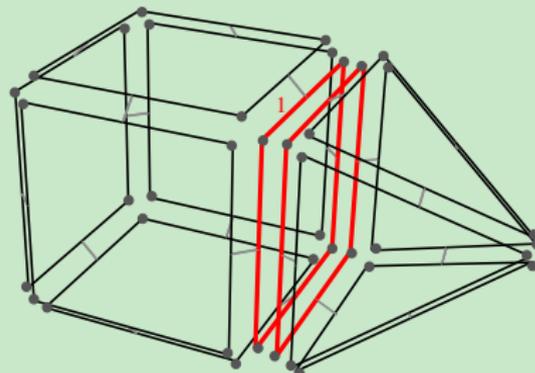


volume : $\langle \beta_1, \beta_2 \rangle$

face : $\langle \beta_1, \beta_3 \rangle$

arête : $\langle \beta_2, \beta_3 \rangle$

sommet : $\langle \beta_1 \circ \beta_2, \beta_1 \circ \beta_3 \rangle$



volume : $\langle \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \rangle$

face : $\langle \alpha_0, \alpha_1, \alpha_3 \rangle$

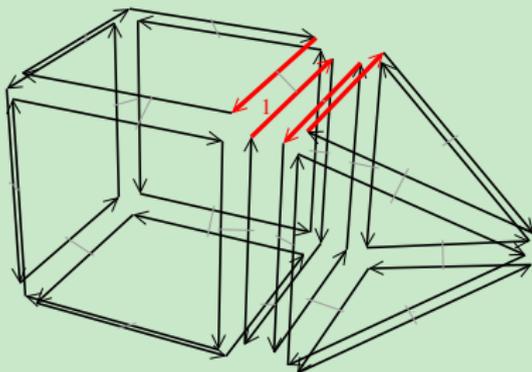
arête : $\langle \alpha_0, \alpha_2, \alpha_3 \rangle$

sommet : $\langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \rangle$

Cellules dans les cartes

i -cellule : ensemble de brins (notion d'**orbite**)

Exemple (3D)

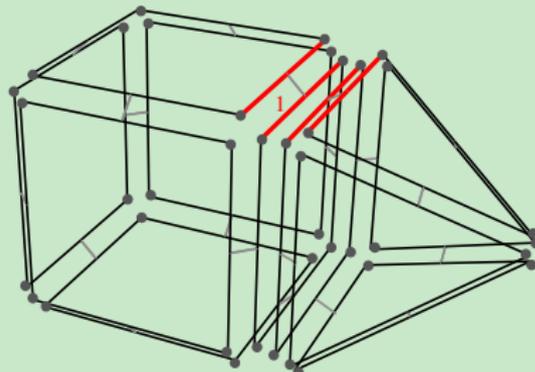


volume : $\langle \beta_1, \beta_2 \rangle$

face : $\langle \beta_1, \beta_3 \rangle$

arête : $\langle \beta_2, \beta_3 \rangle$

sommet : $\langle \beta_1 \circ \beta_2, \beta_1 \circ \beta_3 \rangle$



volume : $\langle \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \rangle$

face : $\langle \alpha_0, \alpha_1, \alpha_3 \rangle$

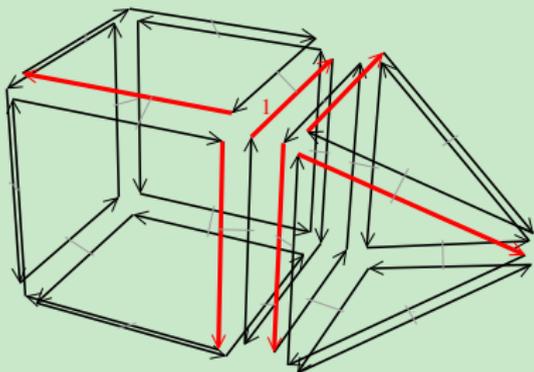
arête : $\langle \alpha_0, \alpha_2, \alpha_3 \rangle$

sommet : $\langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \rangle$

Cellules dans les cartes

i -cellule : ensemble de brins (notion d'**orbite**)

Exemple (3D)

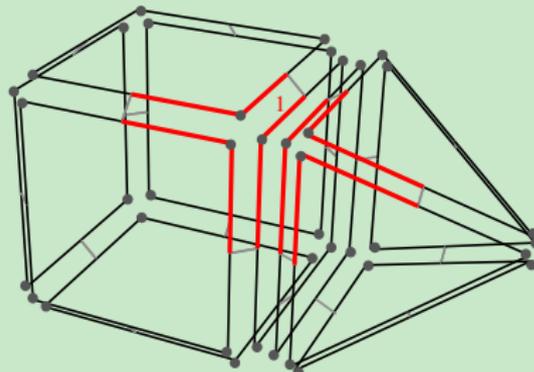


volume : $\langle \beta_1, \beta_2 \rangle$

face : $\langle \beta_1, \beta_3 \rangle$

arête : $\langle \beta_2, \beta_3 \rangle$

sommet : $\langle \beta_1 \circ \beta_2, \beta_1 \circ \beta_3 \rangle$



volume : $\langle \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \rangle$

face : $\langle \alpha_0, \alpha_1, \alpha_3 \rangle$

arête : $\langle \alpha_0, \alpha_2, \alpha_3 \rangle$

sommet : $\langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \rangle$

2. Opérations de base

- 1 Cartes combinatoires/généralisées
- 2 Opérations de base**
 - Suppressions et contractions
 - Insertions et éclatements
 - Décalage d'arêtes
- 3 Cartes et images
- 4 Invariants topologiques
- 5 Applications

Opérations de base

Objectif

Définir les opérations de base modifiant une carte

Résultats

- suppressions et contractions [DAMIAND LIENHARDT 03 ;DAMIAND ET *al.* 05]
- insertions et éclatements [BABA-ALI ET *al.* 08]
- décalage d'arêtes [DAMIAND 01]

Avantages

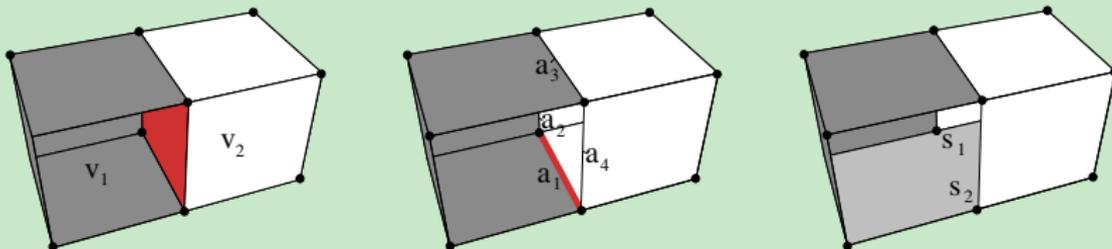
- nG -cartes \Rightarrow définitions homogènes
- contraintes de cohérence \Rightarrow validité des opérations
- mise à jour locale \Rightarrow algorithmes efficaces

Opérations de suppression

Principe

Suppression d'une i -cellule \Rightarrow fusion des $(i + 1)$ -cellules

Exemple



Opérations de suppression

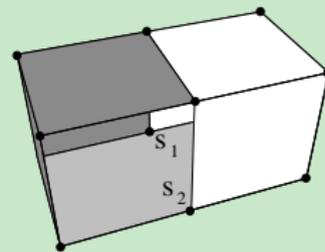
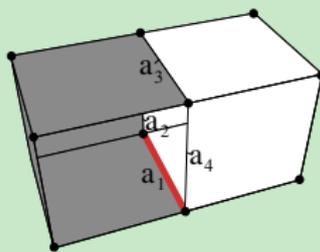
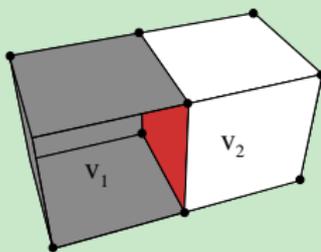
Contrainte

Cellule supprimable

Définition

Une i -cellule c est **supprimable** ($0 \leq i < n$) si $i = n - 1$ ou $\forall b \in c, b\alpha_{i+1}\alpha_{i+2} = b\alpha_{i+2}\alpha_{i+1}$.

Exemple



Opérations de suppression

Définition

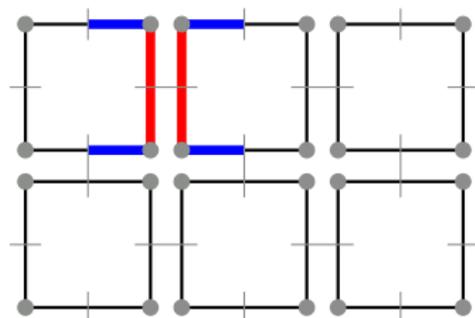
$G = (B, \alpha_0, \dots, \alpha_n)$ une n G-carte

$c = c_i(b)$ une i -cellule supprimable

$BV = c\alpha_i - c$

$G' = (B', \alpha'_0, \dots, \alpha'_n)$:

- $\forall b' \in BV : b'\alpha'_i = b'(\alpha_i\alpha_{i+1})^k \alpha_i$,
avec k le plus petit entier tel que
 $b'(\alpha_i\alpha_{i+1})^k \alpha_i \in BV$.



2G-carte initiale

$c_1(b)$ arête à supprimer

$BV = c\alpha_1 - c$

Opérations de suppression

Définition

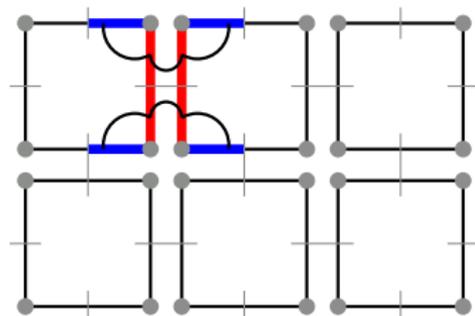
$G = (B, \alpha_0, \dots, \alpha_n)$ une n G-carte

$c = c_i(b)$ une i -cellule supprimable

$BV = c\alpha_i - c$

$G' = (B', \alpha'_0, \dots, \alpha'_n)$:

- ≡ $\forall b' \in BV : b'\alpha'_i = b'(\alpha_i\alpha_{i+1})^k \alpha_i$,
avec k le plus petit entier tel que
 $b'(\alpha_i\alpha_{i+1})^k \alpha_i \in BV$.



$\forall b' \in BV, b'\alpha'_i = b'(\alpha_1\alpha_2)^k \alpha_1$
 k plus petit entier

Opérations de suppression

Définition

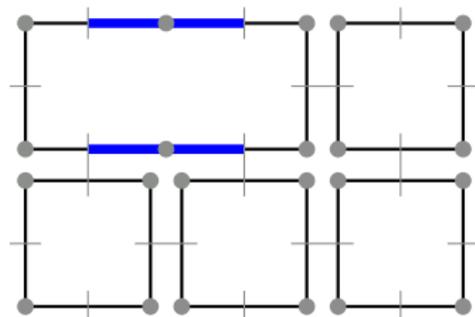
$G = (B, \alpha_0, \dots, \alpha_n)$ une n G-carte

$c = c_i(b)$ une i -cellule supprimable

$BV = c\alpha_i - c$

$G' = (B', \alpha'_0, \dots, \alpha'_n)$:

- ≡ $\forall b' \in BV : b'\alpha'_i = b'(\alpha_i\alpha_{i+1})^k \alpha_i$,
avec k le plus petit entier tel que
 $b'(\alpha_i\alpha_{i+1})^k \alpha_i \in BV$.

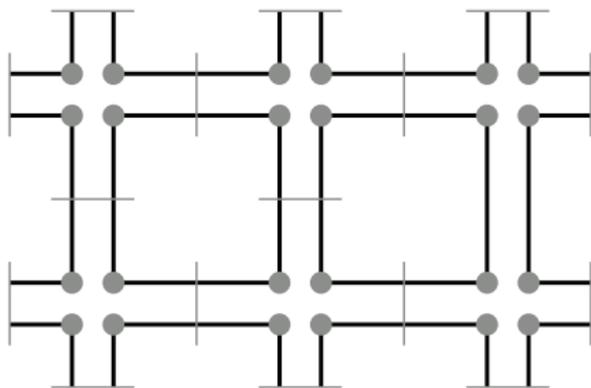


2G-carte finale

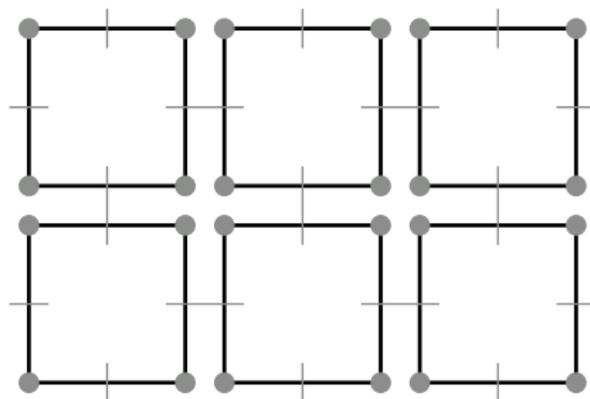
Opérations de contraction

Utilisation du **dual**

$$G = (B, \alpha_0, \dots, \alpha_n) \Rightarrow \text{dual } \bar{G} = (B, \alpha_n, \dots, \alpha_0)$$



2G-carte initiale

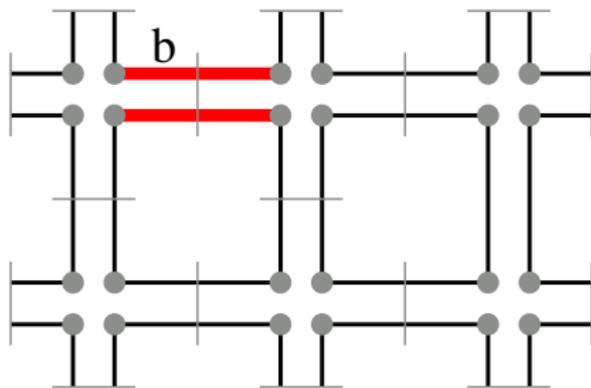


2G-carte duale

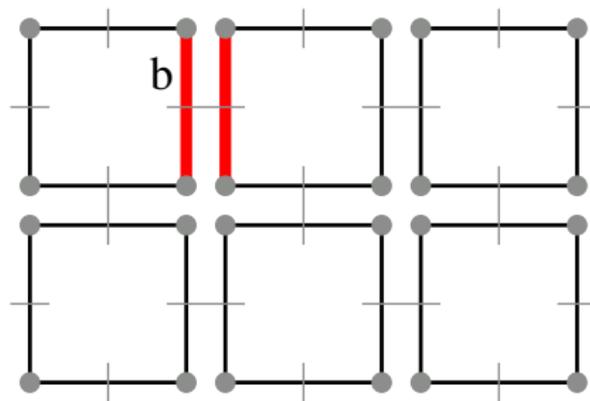
Opérations de contraction

contracter une i -cellule \Leftrightarrow supprimer une $(n - i)$ -cellule dans le dual

Cellule **contractible** : $i = 1$ ou $\forall b \in c, b\alpha_{i-1}\alpha_{i-2} = b\alpha_{i-2}\alpha_{i-1}$



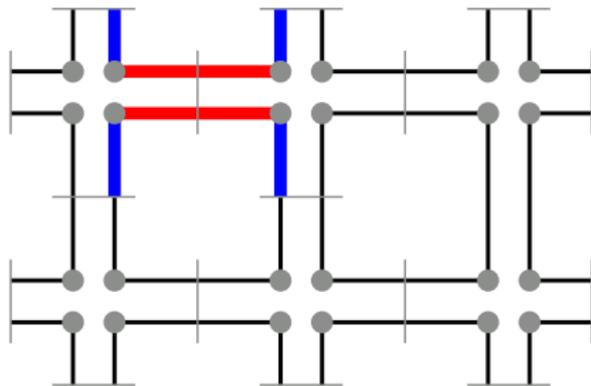
2G-carte initiale
arête à contracter



2G-carte duale
arête à supprimer

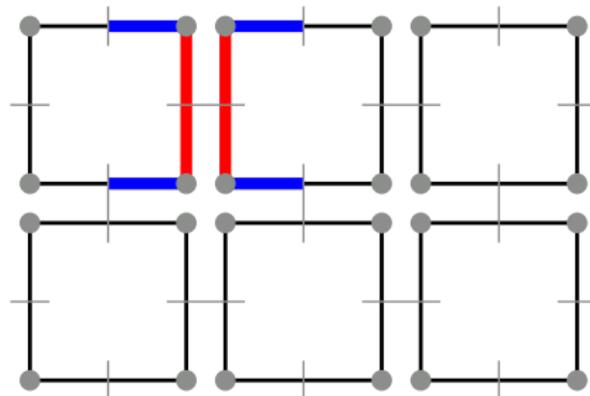
Opérations de contraction

contraction



$$BV = c\alpha_1 - c$$

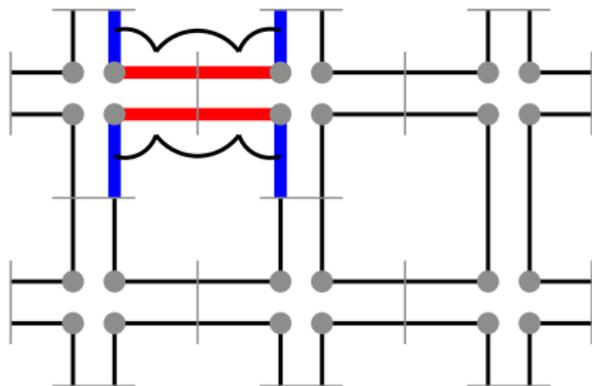
suppression



$$BV = c\alpha_1 - c$$

Opérations de contraction

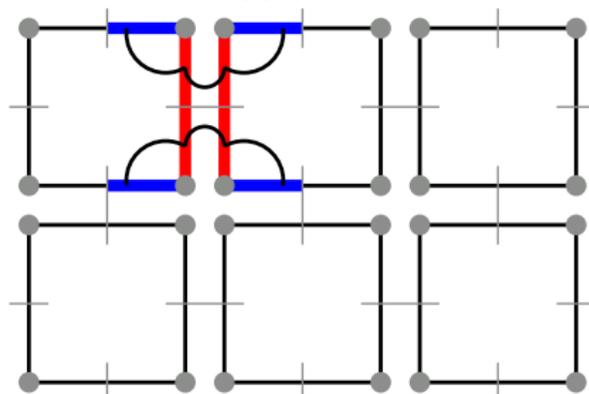
contraction



$$\forall b' \in BV, b' \alpha'_1 = b' (\alpha_1 \alpha_0)^k \alpha_1$$

k plus petit entier

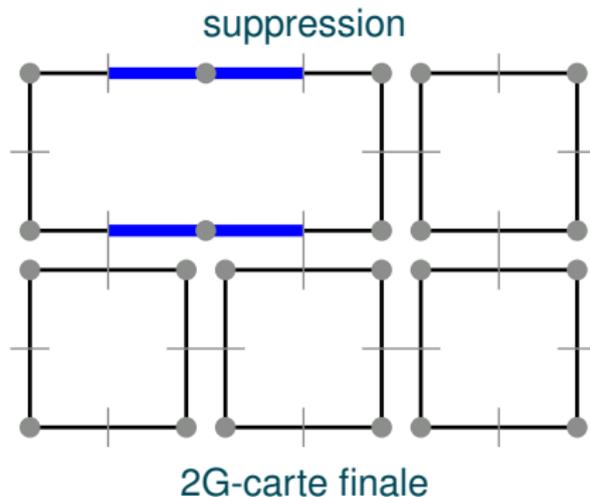
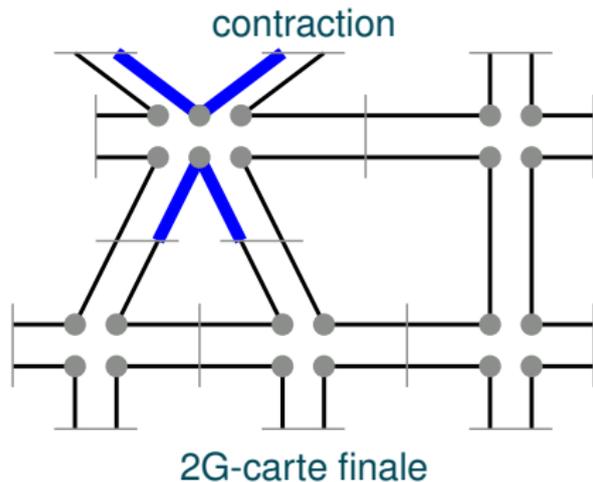
suppression



$$\forall b' \in BV, b' \alpha'_1 = b' (\alpha_1 \alpha_2)^k \alpha_1$$

k plus petit entier

Opérations de contraction



Suppressions et contractions simultanées

Définition

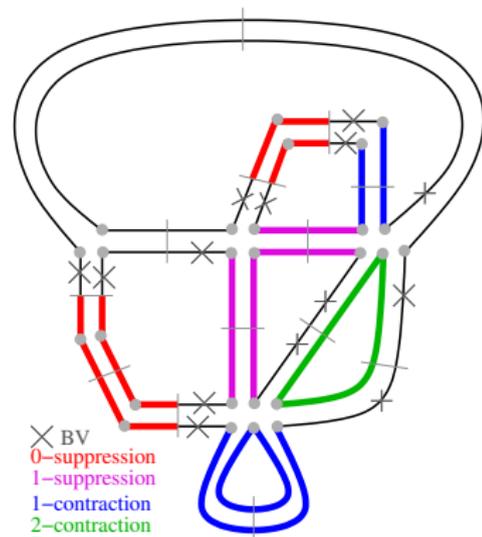
$G = (B, \alpha_0, \dots, \alpha_n)$ une n G-carte

S les cellules à supprimer

C les cellules à contracter

Préconditions :

- ≡ $\forall c, c' \in C \cup S : c \cap c' = \emptyset$;
- ≡ les cellules de S sont **supprimables** ;
- ≡ les cellules de C sont **contractibles**.



Suppressions et contractions simultanées

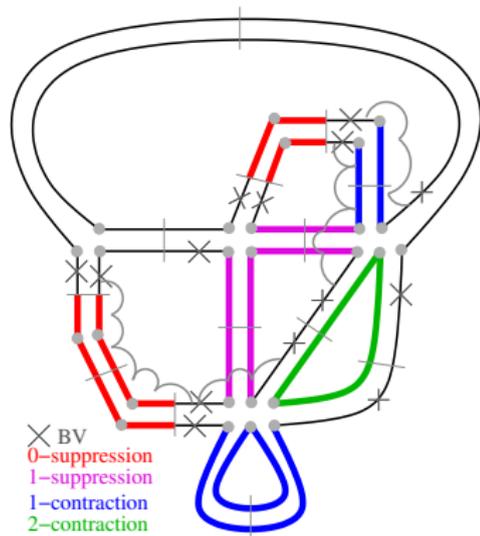
Définition

$$G' = (B', \alpha'_0, \dots, \alpha'_n) :$$

$$\equiv \forall i : 0 \leq i \leq n, \forall b \in BV_i :$$

$$b\alpha'_i = b' = b(\alpha_i\alpha_{l_1}) \dots (\alpha_i\alpha_{l_r})\alpha_i, \quad \text{où :}$$

- r est le plus petit entier tel que $b' \in BV_i$;
- $\forall j : 1 \leq j \leq r, l_j =$
 - $i + 1$
si $b_j = b(\alpha_i\alpha_{l_1}) \dots (\alpha_i\alpha_{l_{j-1}})\alpha_i \in S_i$
 - $i - 1$ sinon ($b_j \in C_i$)



Suppressions et contractions simultanées

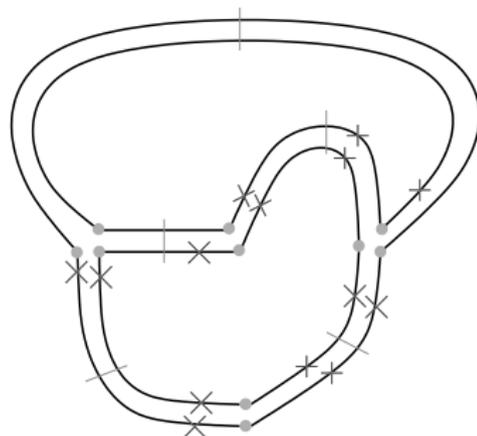
Définition

$$G' = (B', \alpha'_0, \dots, \alpha'_n) :$$

$$\equiv \forall i : 0 \leq i \leq n, \forall b \in BV_i :$$

$$b\alpha'_i = b' = b(\alpha_i\alpha_{l_1}) \dots (\alpha_i\alpha_{l_r})\alpha_i, \quad \text{où :}$$

- r est le plus petit entier tel que $b' \in BV_i$;
- $\forall j : 1 \leq j \leq r, l_j =$
 - $i + 1$
si $b_j = b(\alpha_i\alpha_{l_1}) \dots (\alpha_i\alpha_{l_{j-1}})\alpha_i \in S_i$
 - $i - 1$ sinon ($b_j \in C_i$)



Insertions et éclatements simultanées

Définition

$G = (B, \alpha_0, \dots, \alpha_n)$ une nG -carte

$G' = (B', \alpha_0, \dots, \alpha_n)$ une seconde nG -carte

I les cellules à insérer

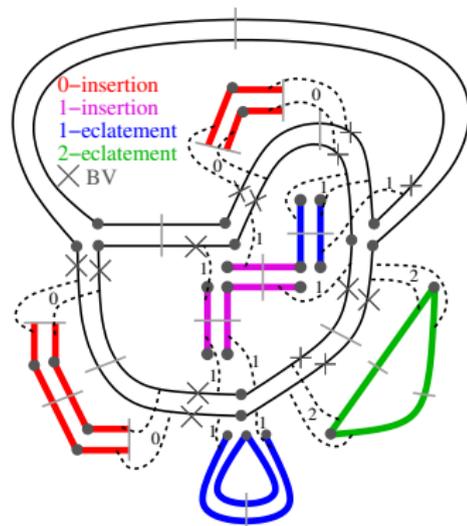
E les cellules à éclater

γ_i une involution sur $BV_i \cup BV'_i$ avec

$b \in BV_i \Leftrightarrow b\gamma_i \in BV'_i$

Préconditions :

- ≡ $\forall c, c' \in I \cup E : c \cap c' = \emptyset$
- ≡ les cellules de I sont **supprimables** ;
- ≡ les cellules de E sont **contractibles** ;
- ≡ toutes les cellules de G' sont à insérer ou à éclater : $I \cup E = B'$

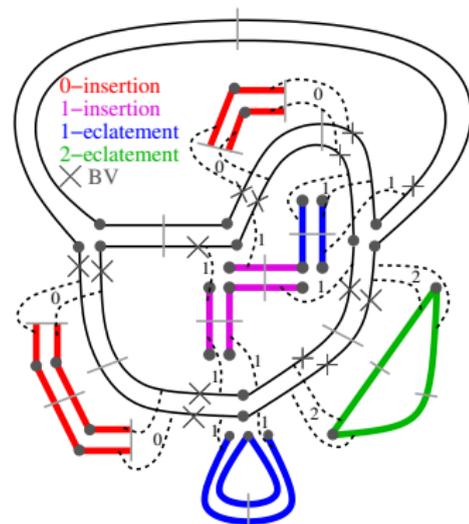


Insertions et éclatements simultanées

Définition

Préconditions pour l'opération : $\forall i :$

- ≡ $\forall b \in BV'_i : b$ est i -libre ;
- ≡ $\forall b \in BV_i \cup BV'_i : \forall j : 0 \leq j \leq n$ tel que $|i - j| \geq 2$ et $b\alpha_j \in BV_i \cup BV'_i :$
 - $b\alpha_j\gamma_i = b\gamma_i\alpha_j ;$
- ≡ $\forall b \in BV_i :$
 - $b\alpha_i = b' = b\gamma_i\alpha_{l_1}(\alpha_i\alpha_{l_2}) \dots (\alpha_i\alpha_{l_k})\gamma_i$
 - k le plus petit entier tel que $b' \in BV_i ;$
 - $l_1 = i + 1$ si $b\gamma_i \in I ; l_1 = i - 1$ sinon
 - $\forall j : 2 \leq j \leq k, l_j =$
 - $i + 1$
si $b_j = b\gamma_i\alpha_{l_1}(\alpha_i\alpha_{l_2}) \dots (\alpha_i\alpha_{l_{j-1}}) \in I$
 - $i - 1$ sinon (c-à-d $b_j \in E$)

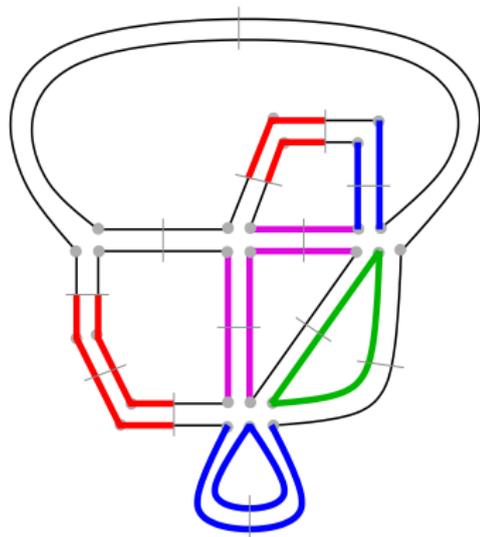


Insertions et éclatements simultanées

Définition

$G'' = (B'', \alpha''_0, \dots, \alpha''_n)$ est définie par :

- ① $B'' = B \cup B'$;
- ② $\forall i : 0 \leq i \leq n, \forall b \in B'' - (BV_i \cup BV'_i) :$
 $b\alpha''_i = b\alpha_i ;$
- ③ $\forall i : 0 \leq i \leq n, \forall b \in BV_i \cup BV'_i :$
 $b\alpha''_i = b\gamma_i .$

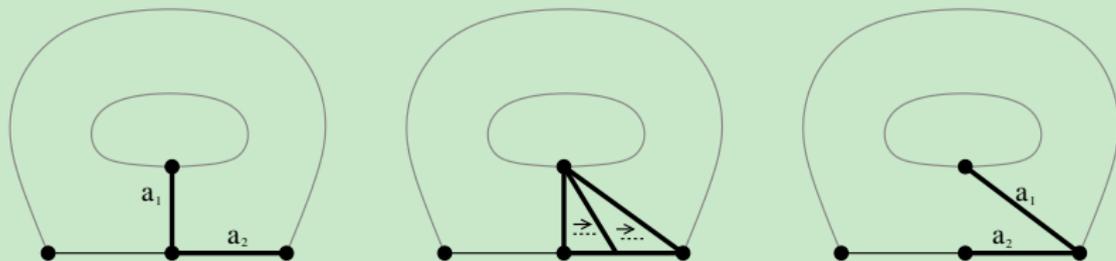


Décalage d'arêtes

Principe

Pousser une arête le long d'une de ses voisines

Exemple



Intuitivement : revient à supprimer localement l'arête puis à l'insérer

3. Cartes et images

- 1 Cartes combinatoires/généralisées
- 2 Opérations de base
- 3 Cartes et images**
 - Carte topologique 2D
 - Carte topologique 3D
 - Opérations
- 4 Invariants topologiques
- 5 Applications

Cartes et images

Objectif

Définir un modèle minimal décrivant une image

Utiliser ce modèle pour des opérations de traitement d'images

Résultats

- ▣ carte topologique [BERTRAND *et al.* 01 ; DAMIAND *et al.* 04 ; DAMIAND 08]
- ▣ opérations de base [DAMIAND RESCH 02 ; DAMIAND RESCH 03 ; DUPAS DAMIAND 08]
- ▣ segmentation d'images [BOURDON *et al.* 02 ; DAMIAND *et al.* 03 ; DUPAS DAMIAND 08B]
- ▣ applications [DAMIAND ARRIVAUULT 07 ; DAMIAND COEURJOLLY 08]

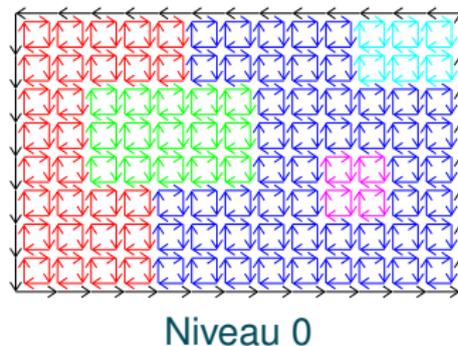
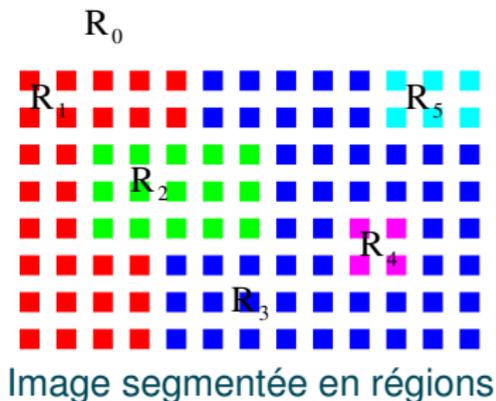
Avantages

- ▣ opérations de suppression \Rightarrow définition incrémentale
- ▣ modèle minimal \Rightarrow optimisation
- ▣ mise à jour locale \Rightarrow algorithmes efficaces

Les niveaux de simplification en 2D

Principe

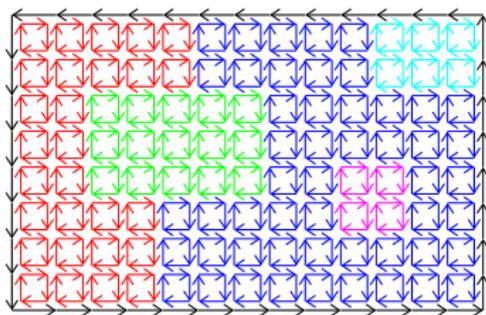
- construire la carte représentant tous les pixels de l'image
- simplifier progressivement cette carte



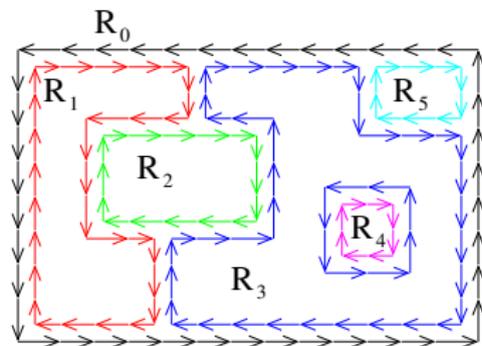
Niveau 1

Définition

Niveau 1 : Suppression des arêtes entre 2 pixels d'une même région



Niveau 0



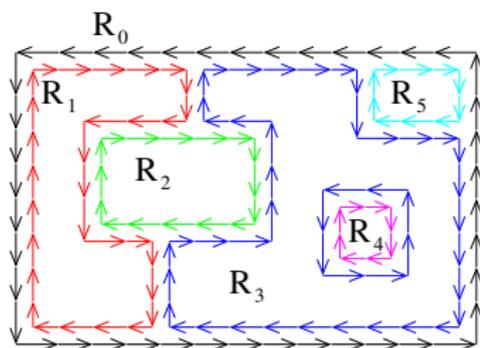
Niveau 1

Niveau 2

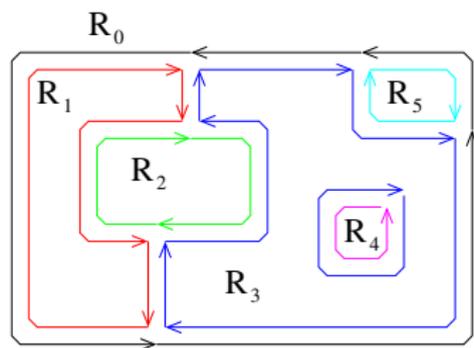
Définition

Niveau 2 : Suppression des sommets de degré 2

degré d'une i -cellule c : nombre de $(i + 1)$ -cellules incidentes à c



Niveau 1



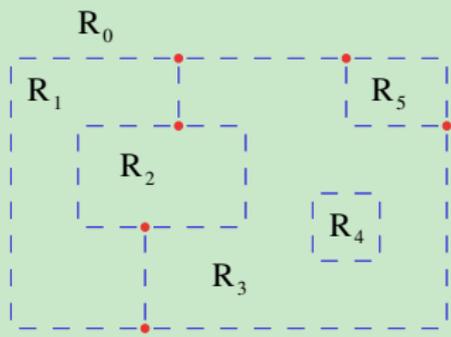
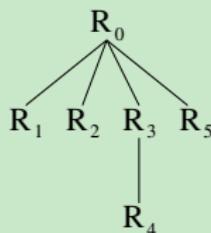
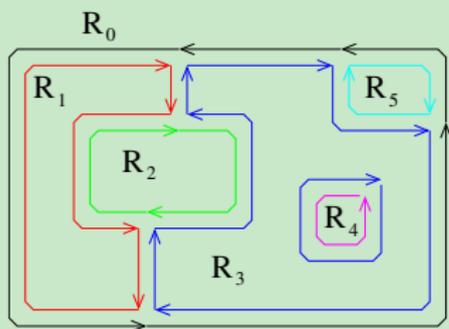
Niveau 2

Carte topologique 2D

Carte topologique 2D

- ▣ carte combinatoire minimale (niveau 2)
- ▣ arbre d'imbrication
- ▣ matrice inter-pixels

Exemple

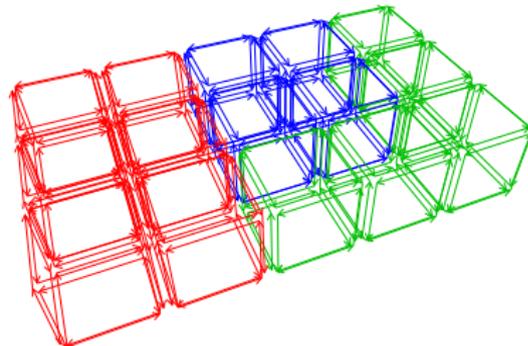
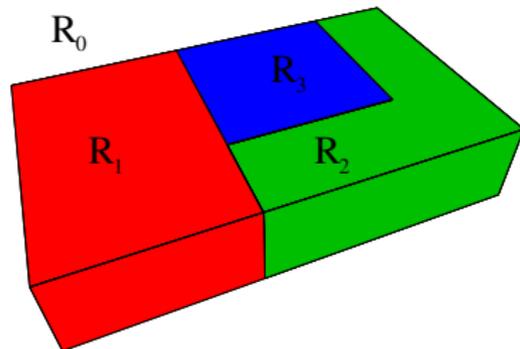


Extension en 3D : niveau 0

Niveaux de simplification \Rightarrow extension directe en 3D

Définition

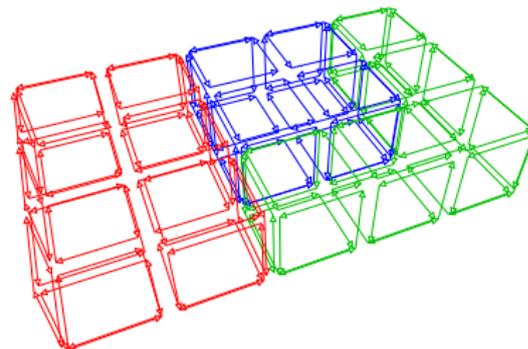
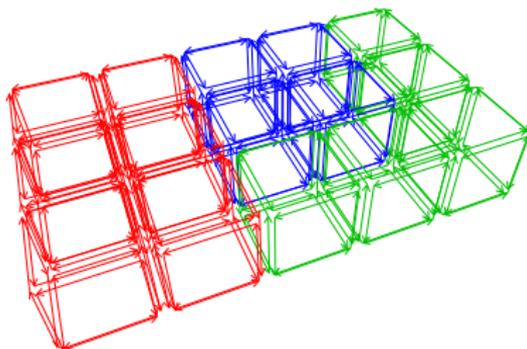
Niveau 0 : Tous les voxels



Niveau 1

Définition

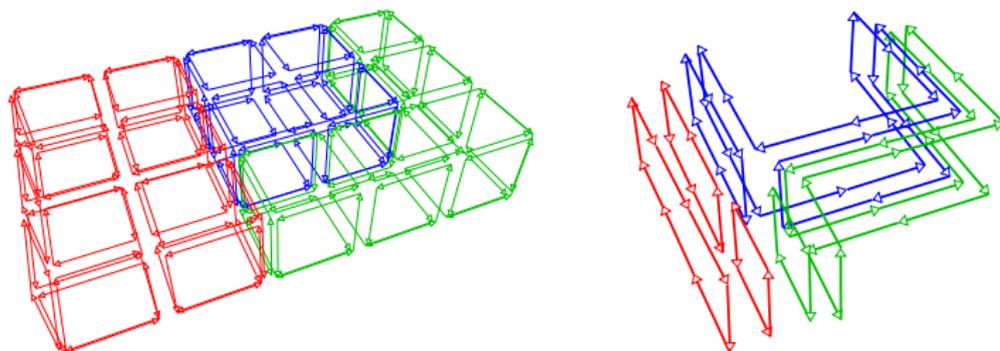
Niveau 1 : Suppression des faces entre 2 voxels d'une même région



Niveau 2

Définition

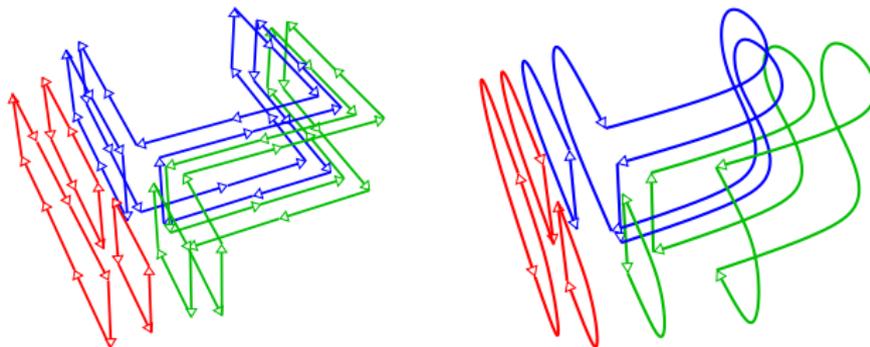
Niveau 2 : Suppression des arêtes de degré 2 et arêtes pendantes



Niveau 3

Définition

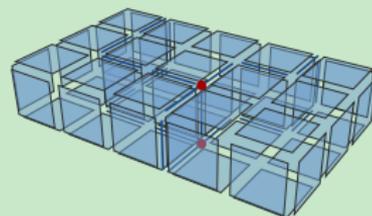
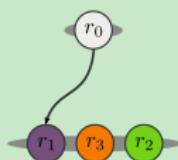
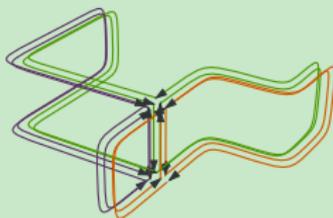
Niveau 3 : Suppression des sommets de degré 2



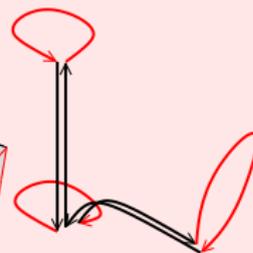
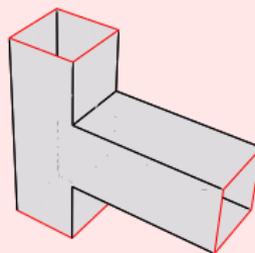
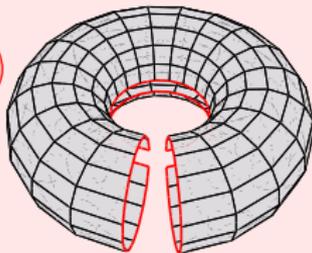
Carte topologique 3D

carte combinatoire minimale + arbre d'imbrication + matrice inter-voxels

Exemple



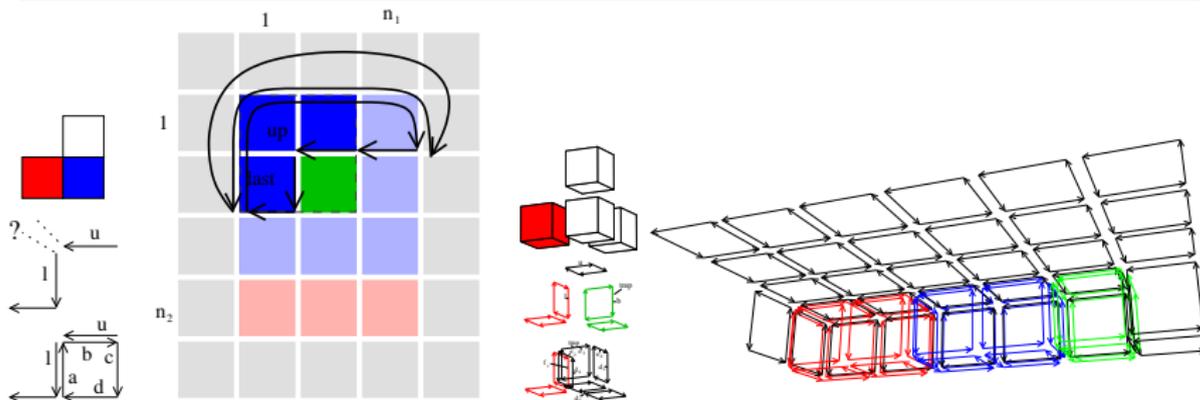
Arête fictive : arête de degré 1



Des opérations

Extraction à partir d'images

- 3 versions : naïve ; par balayage ; optimale [DAMIAND *et al.* 04 ; DAMIAND 08]
- segmentation à la volée durant l'extraction



Des opérations

Extraction à partir d'images

Opérations de base pour les cartes topologiques

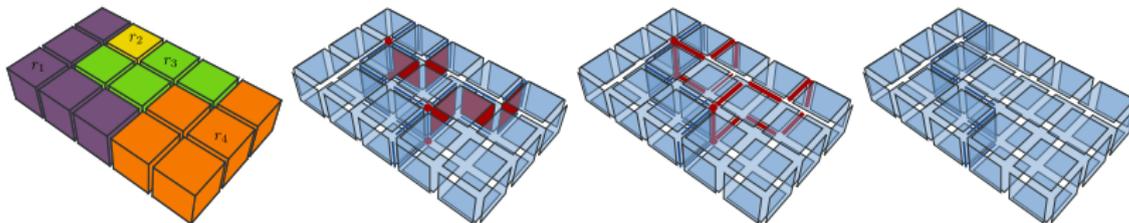
[Thèse Alexandre DUPAS]

☰ fusion de régions
versions globale et locale

[DUPAS ET DAMIAND 08]

☰ découpe de régions

[DUPAS 09]



Des opérations

Extraction à partir d'images

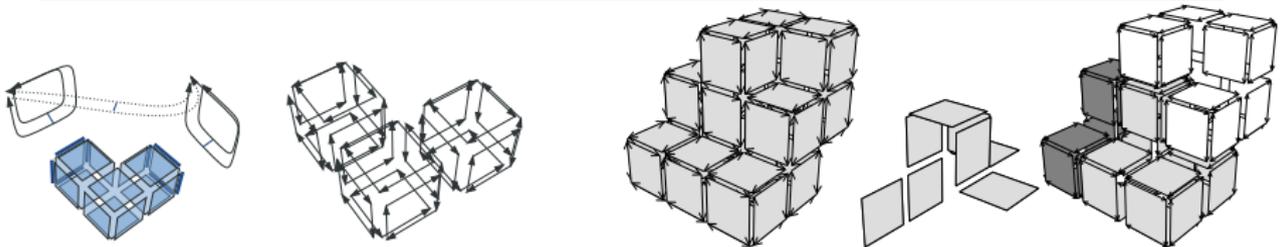
Opérations de base pour les cartes topologiques

[Thèse Alexandre DUPAS]

- fusion de régions
- découpe de régions
éclatement, division par un guide

[DUPAS ET DAMIAND 08]

[DUPAS 09]



4. Invariants topologiques

- 1 Cartes combinatoires/généralisées
- 2 Opérations de base
- 3 Cartes et images
- 4 Invariants topologiques**
 - Caractéristique d'Euler-Poincaré
 - Nombres de Betti
 - Groupes d'homologie
- 5 Applications

Invariants topologiques

Objectif

Calculer des invariants topologiques d'objets cellulaires

Résultats

- caractéristique d'Euler-Poincaré [DAMIAND *et al.* 06]
- nombres de Betti 3D [DUPAS DAMIAND 09]
- *schéma polygonal canonique* [DAMIAND ALAYRANGUES 08]
- groupes d'homologies 2D / 3D [DAMIAND *et al.* 06 ; DAMIAND *et al.* 08]

Avantages

- modèle cellulaire \Rightarrow simplification plus facile
- suppression \Rightarrow contrôle des simplifications
- mise à jour locale \Rightarrow algorithmes efficaces

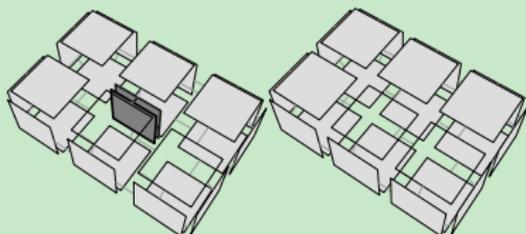
Caractéristique d'Euler-Poincaré

Soit k_i le nombre de cellules de dimension i

Mise à jour locale des k_i lors des suppressions

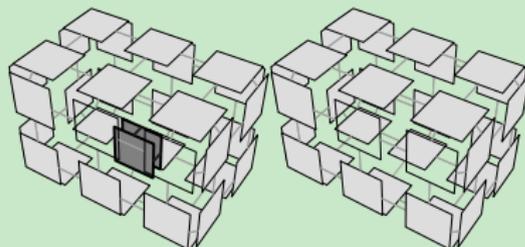
[DAMIAND *et al.* 06]

Exemple



$$k'_2 = k_2 - 1; k'_1 = k_1 - 2$$

$$\chi' = \chi + 1$$



$$k'_2 = k_2 - 1; k'_1 = k_1 - 3; k'_0 = k'_0 - 2$$

$$\chi' = \chi$$

Définition

Caractéristique d'Euler-Poincaré χ d'un complexe cellulaire C de dimension n :

$$\chi(C) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \times k_i(C)$$

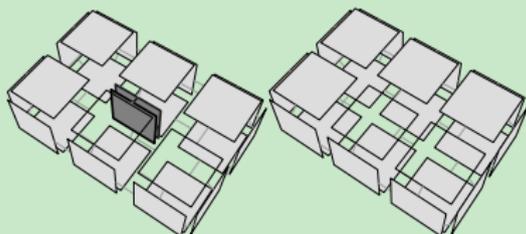
Caractéristique d'Euler-Poincaré

Soit k_i le nombre de cellules de dimension i

Mise à jour locale des k_i lors des suppressions

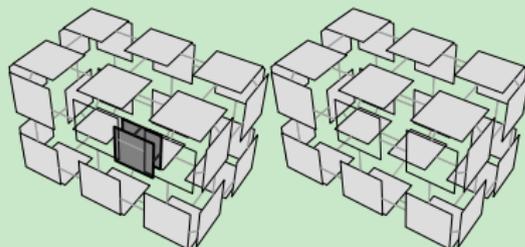
[DAMIAND *et al.* 06]

Exemple



$$k'_2 = k_2 - 1; k'_1 = k_1 - 2$$

$$\chi' = \chi + 1$$



$$k'_2 = k_2 - 1; k'_1 = k_1 - 3; k'_0 = k'_0 - 2$$

$$\chi' = \chi$$

Définition

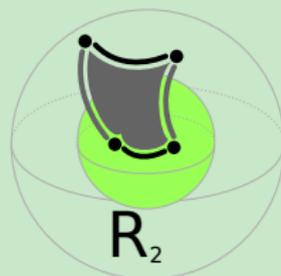
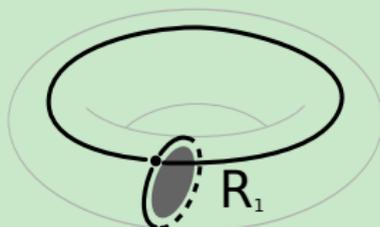
Caractéristique d'Euler-Poincaré χ d'un complexe cellulaire C de dimension n :

$$\chi(C) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \times k_i(C)$$

Complexe cellulaire

Complexe cellulaire : chaque cellule est homéomorphe à une boule

Exemple (problèmes)



Solution

Cellules implicites : cellules qu'il faudrait ajouter pour rendre chaque cellule homéomorphe à une boule

⇒ compter ces cellules pour caractéristique d'Euler-Poincaré

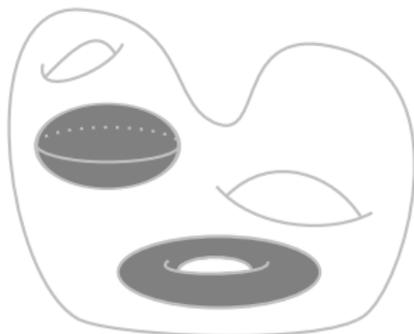
Calcul des nombres de Betti

Nombres de Betti d'une région 3D R

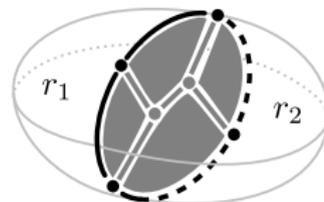
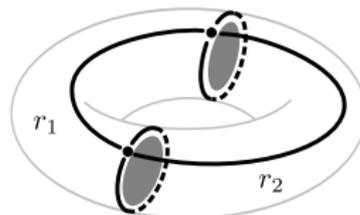
[DUPAS DAMIAND 09]

- ≡ $b_0(R) = 1$;
- ≡ $b_1(R) = b_0(R) + b_2(R) - \chi'(R)/2$;
- ≡ $b_2(R) = |\text{surfaces}(R)| - 1$.

⇒ mise à jour locale



$$b_0 = 1, b_1 = 3, b_2 = 2$$



Calcul des groupes d'homologie

Les groupes d'homologie

- ≡ puissants invariants topologiques, définis en nD
- ≡ caractérisent les CC, tunnels, cavités, ... par des **cycles de cellules**

Principe

- ≡ simplifier une carte
en préservant son homologie
- ≡ carte finale \Rightarrow directement l'homologie ;
ou utiliser l'algorithme classique (forme normale de Smith)

Simplification préservant l'homologie en 2D

[DAMIAND *et al.* 06]

Entrée : Une $2G$ -carte G représentant une surface fermée

Sortie : La carte minimale correspondant à G

1 pour chaque arête a de G faire

si le degré de a est 2 **alors** Supprimer a ;

sinon

tant que a est une arête pendante **faire**

$a' \leftarrow$ l'arête adjacente à a ;

Supprimer a ; $a \leftarrow a'$;

2 pour chaque sommet s de G faire

si le degré de s est 2 **alors** Supprimer s ;

sinon si il existe une arête a non boucle incidente à s **alors**

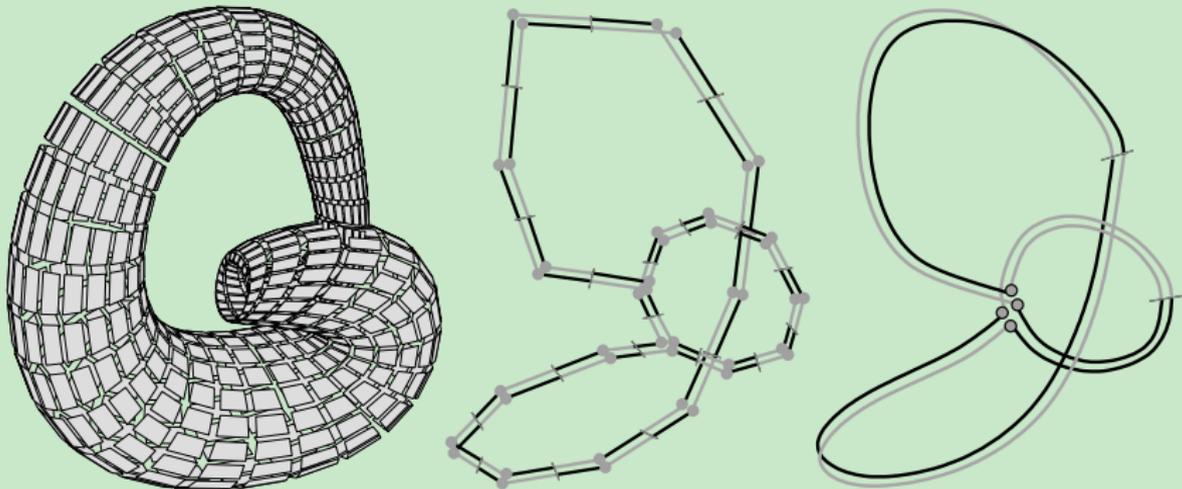
Décaler toutes les arêtes (sauf a) incidentes à s le long de a ;

Supprimer s ;

Arbres Union-find : pour tester si une arête est de degré 1 ou 2

Résultat

Exemple



Résultat : 1 sommet, 2 arêtes, 1 face

Extension en 3D

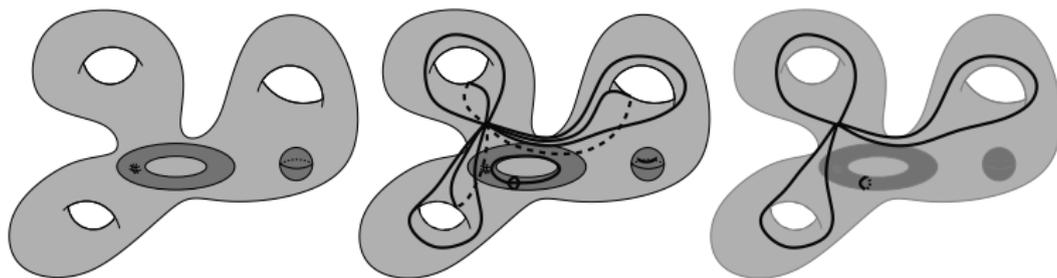
[DAMIAND *et al.* 08]

Principe

- 2-suppression \Rightarrow fusion de volumes
- 1-suppression \Rightarrow fusion de faces
- 0-suppression \Rightarrow fusion d'arêtes

Contrainte :

conserver chaque cellule **homéomorphe à une boule**



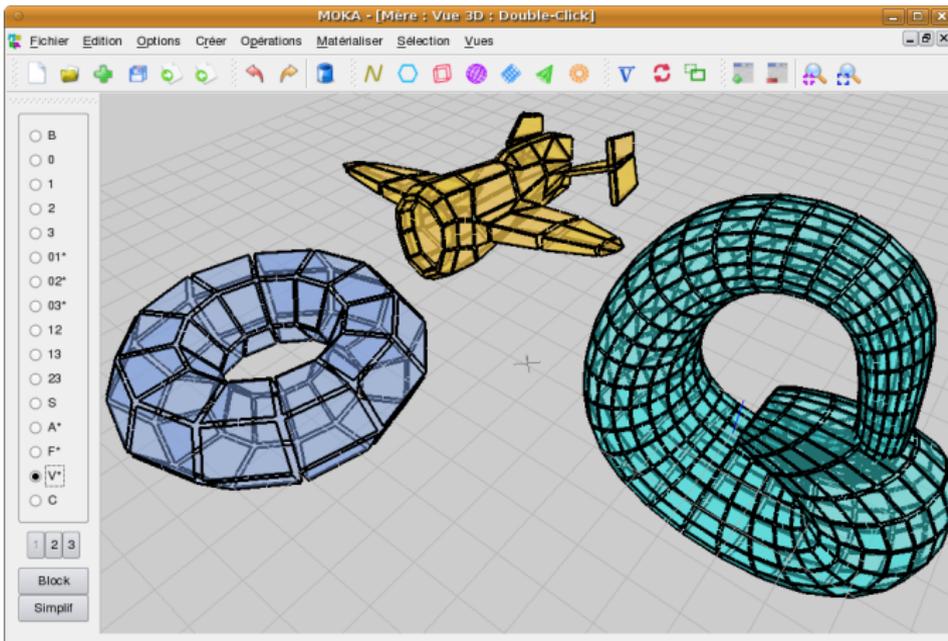
Reste problème de **décalage des faces** pour obtenir le modèle minimal

5. Applications

- 1 Cartes combinatoires/généralisées
- 2 Opérations de base
- 3 Cartes et images
- 4 Invariants topologiques
- 5 Applications**

Moka

Modeleur géométrique 3D ; 3G-cartes ; nombreuses opérations : créations, coutures, fusions, contractions, insertions, triangulations, quadrangulations, extrusions, chanfreinages, maillages, lissages, opérations booléennes.

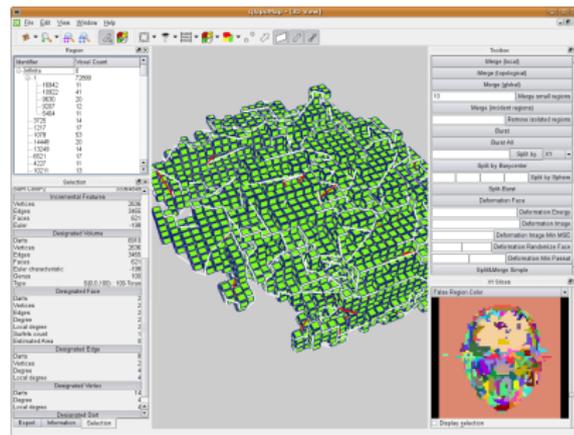
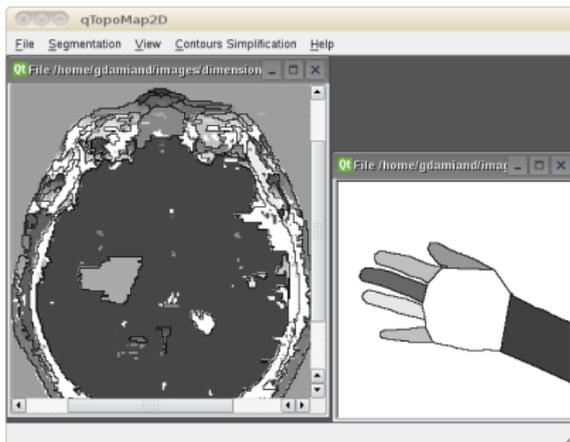


CarteTopo

Traitement d'images 2D/3D ; 2/3-cartes

Principales opérations :

segmentation avec intégration de critères topologiques ; modèle déformable discret ; calcul d'invariants topologiques ; suppression petites régions ; simplification polygonale ; reconstruction de contours discrets.

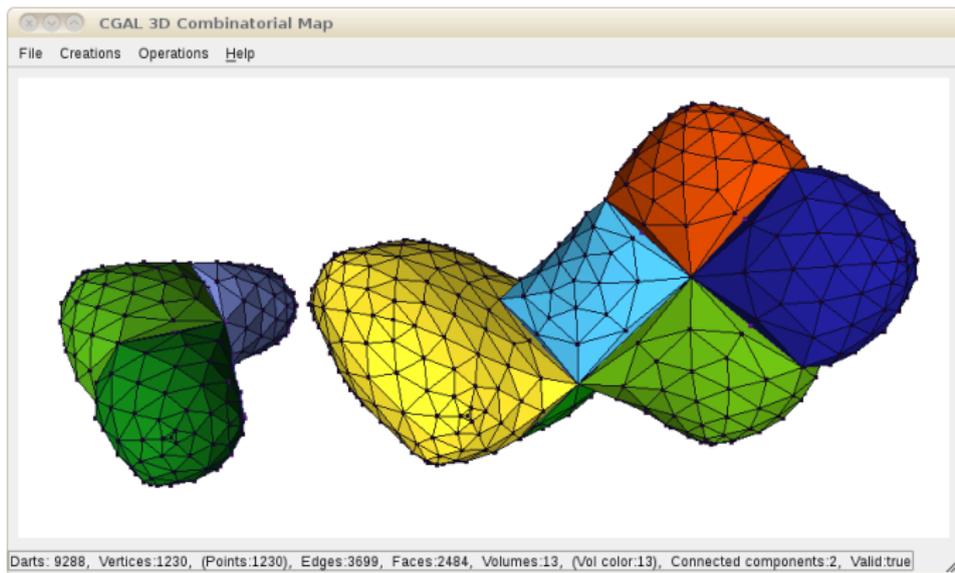


CombinatorialMap dans CGAL

Module en soumission pour intégration dans CGAL ; n -cartes

Module récent, seulement les opérations de base :

créations d'objets de base, coutures/décousures, suppressions, insertions, dual, conversions à partir d'autres formats.



6. Conclusion

6 Conclusion

Conclusion

Contributions aux cartes combinatoires et généralisées

- ▣ opérations de base
- ▣ carte topologique 2D/3D
- ▣ calcul d'invariants topologiques
- ▣ applications

Points forts

- ▣ manipulation des subdivisions
- ▣ calcul et contrôle de la topologie
- ▣ généricité, opérations locales
- ▣ extension hiérarchique / multi-résolution

Programme de recherche

- 1 étendre les modèles / opérations en nD
 - carte topologique \Rightarrow problèmes de déconnexions
 - schéma polygonal canonique / groupes d'homologies

Problème central : caractérisation combinatoire des boules préservation durant les opérations
- 2 comparaison de cartes
 - distance d'édition, mesures de similarité
 - utilisation en indexation
- 3 modèles hiérarchiques
 - optimisation des pyramides d'images 3D
 - définition d'opérations (re-linking)
- 4 applications
 - critères de segmentation
topologie, géométrie discrète, ...
 - opérations automatiques / semi-automatiques
opérations guidées par la topologie

Programme de recherche

Objectif à long terme

Contribuer au développement

de théories, d'outils, et de logiciels

pour la manipulation

topologique, efficace, et contrôlée

de complexes cellulaires nD .

Utiliser ces résultats dans des **applications**.

Remerciements

- ▣ Pascal LIENHARDT
- ▣ Yves BERTRAND
- ▣ Luc BRUN, Jean-Marc CHASSERY, Jean-Michel JOLION, Pascal LIENHARDT, Bernard PÉROCHE, Pedro REAL, Monique TEILLAUD
- ▣ Olivier ALATA, Sylvie ALAYRANGUES, Eric ANDRES, Denis ARRIVAUULT, Mehdi BABA-ALI, Fabien BALDACCI, Yves BERTRAND, Camille BIHOREAU, Pascal BOURDON, Achille BRAQUELAIRE, Luc BRUN, David COEURJOLLY, Camille COMBIER, Martine DEXET, Jean-Philippe DOMENGER, Alexandre DUPAS, Andreas FABRI, Christophe FIORIO, Laurent FUCHS, Romain GOFFE, Stéphane GOSSELIN, Michel HABIB, Yll HAXHIMUSA, Colin De La HIGUERA, Sébastien HORNA, Adian ION, Jean-Christophe JANODET, Walter G. KROPATSCH, Jacques-Olivier LACHAUD, Pascal LIENHARDT, Sébastien LORIOT, David MARCHEIX, Daniel MENEVEAUX, Christian OLIVIER, Samuel PELTIER, Patrick RESCH, Philippe SAADE, Emilie SAMUEL, Carine SIMON, Xavier SKAPIN, Christine SOLNON, Frédéric VIDIL, Florence ZARA
- ▣ Mes anciens collègues de Poitiers, XLIM-SIC
- ▣ Mes nouveaux collègues de Lyon, LIRIS
- ▣ Ma famille

