Théorie des Jeux

Équilibre de Nash

Marc Plantevit

Lyon 1
LIRIS
cnrs

marc.plantevit@univ-lyon1.fr

Un peu d'histoire

- Résoudre un jeu $\equiv$ prédire une issue probable, « **logique** ».

Un peu d'histoire

- Résoudre un jeu $\equiv$ prédire une issue probable, « **logique** ».
- Pour cela, il convient de définir un concept de solution.

Un peu d'histoire

- Résoudre un jeu $\equiv$ prédire une issue probable, « **logique** ».
- Pour cela, il convient de définir un concept de solution.
- Le plus communément admis est sans conteste celui proposé par John Nash
  - Article d'une page (1950),
  - Sa thèse de 27 pages (!) l'universite de Princeton (publiée en 1951).

Un peu d'histoire

- Résoudre un jeu $\equiv$ prédire une issue probable, « **logique** ».
- Pour cela, il convient de définir un concept de solution.
- Le plus communément admis est sans conteste celui proposé par John Nash
  - Article d'une page (1950),
  - Sa thèse de 27 pages (!) l'universite de Princeton (publiée en 1951).
- L'équilibre de Nash constitue une pierre angulaire de la théorie des jeux moderne.

Un peu d'histoire

- Résoudre un jeu ≡ prédire une issue probable, « **logique** ».
- Pour cela, il convient de définir un concept de solution.
- Le plus communément admis est sans conteste celui proposé par John Nash
  - Article d'une page (1950),
  - Sa thèse de 27 pages (!) l'universite de Princeton (publiée en 1951).
- L'équilibre de Nash constitue une pierre angulaire de la théorie des jeux moderne.

Definition

Un **équilibre de Nash** est en ensemble de stratégies (une par joueur) tel qu'aucun joueur ne peut obtenir un gain supplémentaire en changeant *unilatéralement* de stratégies.

L'équilibre de Nash renvoie à un critère d'**absence de regret**.

Concepts abordés :

- Équilibre de Nash,
- les fonctions de meilleures réponses,
- l'efficacité et domination au sens de Pareto,
- les problèmes de la multiplicité des équilibres,
- les points focaux dans un jeu,
- l'équilibre corrélé.

- John Nash (1951) $\Rightarrow$ généralisation du concept d'équilibre de Cournot.
- Idée simple et cohérent avec l'essence des jeux non-coopératifs :

- John Nash (1951) $\Rightarrow$ généralisation du concept d'équilibre de Cournot.
- Idée simple et cohérent avec l'essence des jeux non-coopératifs :
  - Jeux non-coopératifs $\equiv$ Des situations d'interactions entre individus poursuivant des objectifs indépendants.

- John Nash (1951) $\Rightarrow$ généralisation du concept d'équilibre de Cournot.
- Idée simple et cohérent avec l'essence des jeux non-coopératifs :
  - Jeux non-coopératifs $\equiv$ Des situations d'interactions entre individus poursuivant des objectifs indépendants.
  - Absence de communication avant le jeu.

- John Nash (1951) $\Rightarrow$ généralisation du concept d'équilibre de Cournot.
- Idée simple et cohérent avec l'essence des jeux non-coopératifs :
  - Jeux non-coopératifs $\equiv$ Des situations d'interactions entre individus poursuivant des objectifs indépendants.
  - Absence de communication avant le jeu.
  - Absence de possibilité d'engagement dans une stratégie particulière.

- John Nash (1951) $\Rightarrow$ généralisation du concept d'équilibre de Cournot.
- Idée simple et cohérent avec l'essence des jeux non-coopératifs :
  - Jeux non-coopératifs $\equiv$ Des situations d'interactions entre individus poursuivant des objectifs indépendants.
  - Absence de communication avant le jeu.
  - Absence de possibilité d'engagement dans une stratégie particulière.
- Équilibre de Nash $\Rightarrow$ des résultats qui sont stables par rapport aux déviations individuelles, donc unilatérales.

- John Nash (1951) $\Rightarrow$ généralisation du concept d'équilibre de Cournot.
- Idée simple et cohérent avec l'essence des jeux non-coopératifs :
  - Jeux non-coopératifs $\equiv$ Des situations d'interactions entre individus poursuivant des objectifs indépendants.
  - Absence de communication avant le jeu.
  - Absence de possibilité d'engagement dans une stratégie particulière.
- Équilibre de Nash $\Rightarrow$ des résultats qui sont stables par rapport aux déviations individuelles, donc unilatérales.
- Absence de communication $\Rightarrow$ absence de coordination explicite et absence des déviations multilatérales.

Équilibre de Nash

Un équilibre de Nash (EN) est un résultat dont aucun joueur n'a envie de dévier unilatéralement, étant données les stratégies jouées par les autres joueurs.

Équilibre de Nash

Un équilibre de Nash (EN) est un résultat dont aucun joueur n'a envie de dévier unilatéralement, étant données les stratégies jouées par les autres joueurs.

Definition

Un profil $p^* = (p_1^*, \ldots, p_n^*)$ $(p_i^* \in P_i, i = 1 \ldots n)$ est un équilibre de Nash si aucun joueur n'a intérêt à dévier unilatéralement de sa stratégie p_i^* quand les autres joueurs continuent à jouer le profil p^*_{-i}.

Équilibre de Nash

Un équilibre de Nash (EN) est un résultat dont aucun joueur n'a envie de dévier unilatéralement, étant données les stratégies jouées par les autres joueurs.

Definition

Un profil $p^* = (p_1^*, \ldots, p_n^*)$ ($p_i^* \in P_i, i = 1 \ldots n$) est un équilibre de Nash si aucun joueur n'a intérêt à dévier unilatéralement de sa stratégie p_i^* quand les autres joueurs continuent à jouer le profil p_{-i}^*.

- Par conséquent, nous devons avoir :

$$u_i(p_i^*, p_{-i}^*) \geqslant u_i(p_i, p_{-i}^*), \forall p_i \in P_i, \forall i = 1 \ldots n.$$

Équilibre de Nash

Un équilibre de Nash (EN) est un résultat dont aucun joueur n'a envie de dévier unilatéralement, étant données les stratégies jouées par les autres joueurs.

Definition

Un profil $p^* = (p_1^*, \ldots, p_n^*)$ $(p_i^* \in P_i, i = 1 \ldots n)$ est un équilibre de Nash si aucun joueur n'a intérêt à dévier unilatéralement de sa stratégie p_i^* quand les autres joueurs continuent à jouer le profil p_{-i}^*.

- Par conséquent, nous devons avoir :

$$u_i(p_i^*, p_{-i}^*) \geqslant u_i(p_i, p_{-i}^*), \forall p_i \in P_i, \forall i = 1 \ldots n.$$

- p^* est un équilibre de Nash **strict** si $u_i(p_i^*, p_{-i}^*) > u_i(p_i, p_{-i}^*), \forall p_i \in P_i, \forall i = 1 \ldots n.$

Équilibre de Nash

Un équilibre de Nash (EN) est un résultat dont aucun joueur n'a envie de dévier unilatéralement, étant données les stratégies jouées par les autres joueurs.

Definition

Un profil $p^* = (p_1^*, \ldots, p_n^*)$ ($p_i^* \in P_i, i = 1 \ldots n$) est un équilibre de Nash si aucun joueur n'a intérêt à dévier unilatéralement de sa stratégie p_i^* quand les autres joueurs continuent à jouer le profil p_{-i}^*.

- Par conséquent, nous devons avoir :

$$u_i(p_i^*, p_{-i}^*) \geqslant u_i(p_i, p_{-i}^*), \forall p_i \in P_i, \forall i = 1 \ldots n.$$

- p^* est un équilibre de Nash **strict** si $u_i(p_i^*, p_{-i}^*) > u_i(p_i, p_{-i}^*), \forall p_i \in P_i, \forall i = 1 \ldots n.$

Si l'équilibre de Nash est strict, en dévier doit avoir un coût pour les joueurs.

Pour tester si un résultat p est un équilibre de Nash, nous devons :

Pour tester si un résultat p est un équilibre de Nash, nous devons :

- **vérifier** si un des joueurs au moins n'a pas intérêt à choisir une autre stratégie.

Pour tester si un résultat p est un équilibre de Nash, nous devons :

- **vérifier** si un des joueurs au moins n'a pas intérêt à choisir une autre stratégie.
- Si ce n'est pas le cas alors p est un équilibre de Nash.

Pour tester si un résultat p est un équilibre de Nash, nous devons :

- **vérifier** si un des joueurs au moins n'a pas intérêt à choisir une autre stratégie.
- Si ce n'est pas le cas alors p est un équilibre de Nash.

Reprenons le dilemme du prisonnier :

		Clyde	
		N	D
Bonnie	N	$(-1,-1)$	$(-10,0)$
	D	$(0,-10)$	$(-8,-8)$

Pour tester si un résultat p est un équilibre de Nash, nous devons :

- **vérifier** si un des joueurs au moins n'a pas intérêt à choisir une autre stratégie.
- Si ce n'est pas le cas alors p est un équilibre de Nash.

Reprenons le dilemme du prisonnier :

		Clyde N	D
Bonnie	N	$(-1, -1)$	$(-10, 0)$
	D	$(0, -10)$	$(-8, -8)$

- (N, N) n'est pas un équilibre de Nash car :

$$u_2(N, N) = -1 < 0 = u_2(N, D)$$

$\Rightarrow$ Clyde choisira de jouer D au lieu N.

Rappel : Élimination des stratégies dominées ⇒ Unique solution (D,D).

- Aucun joueur n'a intérêt à dévier de D quel que soit le choix de l'autre (et donc, en particulier, si l'autre choisit D).

Rappel : Élimination des stratégies dominées $\Rightarrow$ Unique solution (D,D).

- Aucun joueur n'a intérêt à dévier de D quel que soit le choix de l'autre (et donc, en particulier, si l'autre choisit D).
- Mais, de manière plus générale, c'est un équilibre de Nash car :

$$u_1(D, D) = -8 > -10 = u_1(N, D)$$

$\Rightarrow$ Bonnie n'a pas intérêt à dévier de D si l'autre joue D.

Rappel : Élimination des stratégies dominées $\Rightarrow$ Unique solution (D,D).

- Aucun joueur n'a intérêt à dévier de D quel que soit le choix de l'autre (et donc, en particulier, si l'autre choisit D).
- Mais, de manière plus générale, c'est un équilibre de Nash car :

$$u_1(D, D) = -8 > -10 = u_1(N, D)$$

  $\Rightarrow$ Bonnie n'a pas intérêt à dévier de D si l'autre joue D.

- **et**

$$u_2(D, D) = -8 > -10 = u_2(D, N)$$

  Clyde non plus.

Rappel : Élimination des stratégies dominées ⇒ Unique solution (D,D).

- Aucun joueur n'a intérêt à dévier de D quel que soit le choix de l'autre (et donc, en particulier, si l'autre choisit D).
- Mais, de manière plus générale, c'est un équilibre de Nash car :

$$u_1(D, D) = -8 > -10 = u_1(N, D)$$

⇒ Bonnie n'a pas intérêt à dévier de D si l'autre joue D.

- **et**

$$u_2(D, D) = -8 > -10 = u_2(D, N)$$

Clyde non plus.

Qu'en est-il des stratégies mixtes ?

- Stratégies mixtes : $p_1 = (q, 1-q)$ et $p_2 = (t, 1-t)$ avec $q, t \in [0, 1]$.

- Stratégies mixtes : $p_1 = (q, 1-q)$ et $p_2 = (t, 1-t)$ avec $q, t \in [0, 1]$.
  - q est la fréquence du choix de la stratégie N par Bonnie et
  - t est la fréquence du choix de N par Clyde.

- Stratégies mixtes : $p_1 = (q, 1-q)$ et $p_2 = (t, 1-t)$ avec $q, t \in [0, 1]$.
  - q est la fréquence du choix de la stratégie N par Bonnie et
  - t est la fréquence du choix de N par Clyde.
- L'équilibre en stratégies pures :

$$p_1^* = (0, 1) \text{ et } p_2^* = (0, 1)$$

où **Bonnie et Clyde choisissent toujours** D.

Nous pouvons représenter les stratégies mixtes des joueurs dans la **forme normale du jeu** pour faciliter leur compréhension.

Nous pouvons représenter les stratégies mixtes des joueurs dans la **forme normale du jeu** pour faciliter leur compréhension.

		Clyde	
		t	$1-t$
		N	D
q	N	$(-1,-1)$	$(-10,0)$
Bonnie			
$1-q$	D	$(0,-10)$	$(-8,-8)$

Nous pouvons représenter les stratégies mixtes des joueurs dans la **forme normale du jeu** pour faciliter leur compréhension.

		Clyde	
		t	$1-t$
		N	D
Bonnie q	N	$(-1,-1)$	$(-10,0)$
Bonnie $1-q$	D	$(0,-10)$	$(-8,-8)$

Question :

Peut-il y avoir d'autres équilibres en stratégies mixtes ?

Probabilités Jointes

Étant donné que les stratégies mixtes (et donc les événements correspondants au choix de D et de N) sont **indépendantes** entre les deux joueurs, nous pouvons **calculer la probabilité jointe de réalisation de chaque profil de stratégies**.

Probabilités Jointes

Étant donné que les stratégies mixtes (et donc les événements correspondants au choix de D et de N) sont **indépendantes** entre les deux joueurs, nous pouvons **calculer la probabilité jointe de réalisation de chaque profil de stratégies**.

		Clyde	
		t	$1-t$
		N	D
q	N	$q \times t$	$q \times (1-t)$
Bonnie			
$1-q$	D	$(1-q) \times t$	$(1-q) \times (1-t)$

Espérances de gains

		Clyde	
		t	$1-t$
		N	D
q	N	$q \times t$	$q \times (1-t)$
Bonnie			
$1-q$	D	$(1-q) \times t$	$(1-q) \times (1-t)$

Les gains espérés des deux joueurs sont alors donnés :

$$\begin{aligned}
U_i(p1, p2) \equiv &\quad Eu_i(p1, p2) \equiv Eu_i(q, t) \\
= &\quad q \times t \times u_i(N, N) + q \times (1-t) \times u_i(N, D) \\
+ &\quad (1-q) \times t \times u_i(D, N) + (1-q) \times (1-t) \times u_i(D, D) \\
U_i(0, 0) = &\quad u_i(D, D)
\end{aligned}$$

		Clyde	
		t	$1-t$
		N	D
q	N	(-1,-1)	(-10,0)
Bonnie			
$1-q$	D	(0,-10)	(-8,-8)

Avec les valeurs numériques, le gain espéré du joueur 1 (Bonnie) devient alors :

		Clyde	
		t	$1-t$
		N	D
q	N	(-1,-1)	(-10,0)
Bonnie			
$1-q$	D	(0,-10)	(-8,-8)

Avec les valeurs numériques, le gain espéré du joueur 1 (Bonnie) devient alors :

$$\begin{aligned} U_1(q,t) = & \quad q \times t \times (-1) + q \times (1-t) \times (-10) \\ + & \quad (1-q) \times t \times 0 + (1-q) \times (1-t) \times (-8) \\ = & \quad q(t-2) + 8(t-1) \end{aligned}$$

		Clyde	
		t	$1-t$
		N	D
q	N	(-1,-1)	(-10,0)
Bonnie			
$1-q$	D	(0,-10)	(-8,-8)

Avec les valeurs numériques, le gain espéré du joueur 1 (Bonnie) devient alors :

$$\begin{aligned} U_1(q,t) = & \quad q \times t \times (-1) + q \times (1-t) \times (-10) \\ + & \quad (1-q) \times t \times 0 + (1-q) \times (1-t) \times (-8) \\ = & \quad q(t-2) + 8(t-1) \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\frac{dU_1}{dq} = t - 2 < 0 \Rightarrow q^* = 0$$

Le même raisonnement pour le second joueur $\Rightarrow t^* = 0$.

Le seul équilibre de Nash est $p^* = (0, 0)$.

Le seul équilibre de Nash est $p^* = (0, 0)$.

- Ce n'est pas surprenant car :

Le seul équilibre de Nash est $p^* = (0, 0)$.

- Ce n'est pas surprenant car :
  - la stratégie pure N est strictement dominée par D.

Le seul équilibre de Nash est $p^* = (0, 0)$.

- Ce n'est pas surprenant car :
  - la stratégie pure N est strictement dominée par D.
  - $\Rightarrow$ toute stratégie mixte qui accorderait un poids strictement positif ($q > 0$) à N ferait moins bien que la stratégie pure.

TODO

		I	
		Augmenter	*Non*
	$(Installer/E_0,\ Produire/E_1)$	(-50,40)	(50,60)
	$(Installer/E_0,\ Non/E_1)$	(-10,120)	(-10,100)
E	$(Non/E_0,\ Produire/E_1)$	(0,100)	(0,100)
	$(Non/E_0,\ Non/E_1)$	(0,100)	(0,100)

À vérifier :

Le Jeu de l'entrée II $\Rightarrow$ trois équilibres de Nash en stratégies pures :

- $((N, P), A) \to (0, 100)$,
- $((N, N), A) \to (0, 100)$ et
- $((I, P), N) \to (50, 60)$.

Il est possible de déterminer l'équilibre de Nash de manière plus constructive en utilisant les fonctions de meilleures réponses (ou fonction de réaction) des joueurs.

Plan

- Étant donné la **structure du jeu** et donc celle des **gains**.

- Étant donné la **structure du jeu** et donc celle des **gains**.
- Déterminer les stratégies du joueur i qui correspondent à **la plus grande satisfaction** pour lui face à tout profil s_{-i}.

- Étant donné la **structure du jeu** et donc celle des **gains**.
- Déterminer les stratégies du joueur i qui correspondent à **la plus grande satisfaction** pour lui face à tout profil s_{-i}.
- Ces stratégies correspondent à la meilleure situation que i peut obtenir face à p_{-i}.

- Étant donné la **structure du jeu** et donc celle des **gains**.
- Déterminer les stratégies du joueur i qui correspondent à **la plus grande satisfaction** pour lui face à tout profil s_{-i}.
- Ces stratégies correspondent à la meilleure situation que i peut obtenir face à p_{-i}.

Definition

Dans un jeu à n joueurs, la **fonction de meilleure réponse** du joueur i, $R_i(p_{-i})$ associe, à chaque combinaison de stratégies des autres joueurs p_{-i}, la stratégie du joueur i qui maximise son gain :

$$u_i(R_i(p_{-i}), p_{-i}) \geqslant u_i(p_i, p_{-i}), \forall p_i \in P_i, p_{-i} \in P_{-i}$$

Reprise du dilemme du prisonnier

		Clyde	
		N	D
Bonnie	N	(-1,-1)	(-10,0)
	D	(0,-10)	(-8,-8)

Reprise du dilemme du prisonnier

		Clyde	
		N	D
Bonnie	N	(-1,-1)	(-10,0)
	D	(0,-10)	(-8,-8)

Fonctions de meilleure réponse en stratégies pures de Bonnie et de Clyde :

Bonnie — $R_1(s_2)$	Clyde — $R_2(s_1)$
$N \rightarrow D$	$N \rightarrow D$
$D \rightarrow D$	$D \rightarrow D$

Bonnie : $N \rightarrow D$ car $u_1(D, N) = 0 > -1 = u_1(N, N)$

- Visualiser les meilleures réponses de chaque joueur dans la matrice du jeu :
  - Fonction de réaction de Bonnie : des carrés ($\square$) ;
  - celle de Clyde : des étoiles ($\bigstar$).

		Clyde	
		N	D
Bonnie	N		$\bigstar$
	D	$\square$	$\boxed{\bigstar}$

(D, D) est l'équilibre de Nash $\Leftarrow$ l'intersection des deux courbes de réaction.

Reprise : Bataille des sexes

		Jacqueline	
		O	F
Paul	O	(2,1)	(0,0)
	F	(0,0)	(1,2)

Reprise : Bataille des sexes

		Jacqueline	
		O	F
Paul	O	(2,1)	(0,0)
	F	(0,0)	(1,2)

Fonctions de meilleure réponse en stratégies pures de Paul et de Jacqueline :

Paul — $R_1(s_2)$	Jacqueline — $R_2(s_1)$
$O \rightarrow O$	$O \rightarrow O$
$F \rightarrow F$	$F \rightarrow F$

Représentation des meilleures réponses :

		Jacqueline	
		O	F
Paul	O	$\boxed{\star}$	
	F		$\boxed{\star}$

Intersection :

- (O,O) et (F, F) $\Rightarrow$ équilibres de Nash en stratégies pures de ce jeu.

De manière plus générale :

Proposition

Si s^* est un équilibre de Nash, $s_i^* = R_i(s_{-i}^*), \forall i = 1 \dots n$

Preuve : Par définition, $R_i(s_{-i}^*)$ maximise $u_i(s_i, s_{-i}^*)$, pour tout joueur i.
$\Rightarrow$ aucun joueur n'a intérêt à dévier unilatéralement de sa stratégie s_i^*.
Recherche des équilibres de Nash $\equiv$ recherche des points d'intersection entre les fonctions de meilleures réponses de tous les joueurs.

Stratégies Mixtes

- La prise en compte de stratégies mixtes pourrait faire apparaître d'autres possibilités de meilleure réponse.

Stratégies Mixtes

- La prise en compte de stratégies mixtes pourrait faire apparaître d'autres possibilités de meilleure réponse.
- Reprenons, le jeu de la *Bataille des sexes* ?

Stratégies Mixtes

- La prise en compte de stratégies mixtes pourrait faire apparaître d'autres possibilités de meilleure réponse.
- Reprenons, le jeu de la *Bataille des sexes* ?
- Notons la stratégie mixte des 2 joueurs par :
  - $p_1 = (q, 1 - q)$
  - $p_2 = (t, 1 - t)$ avec $q, t \in [0, 1]$

Stratégies Mixtes

- La prise en compte de stratégies mixtes pourrait faire apparaître d'autres possibilités de meilleure réponse.
- Reprenons, le jeu de la *Bataille des sexes* ?
- Notons la stratégie mixte des 2 joueurs par :
  - $p_1 = (q, 1-q)$
  - $p_2 = (t, 1-t)$ avec $q, t \in [0, 1]$

			Jacqueline	
			t	$1-t$
			O	F
Paul	q	O	(2,1)	(0,0)
	$1-q$	F	(0,0)	(1,2)

		Jacqueline	
		t	$1-t$
		O	F
Paul q	O	(2,1)	(0,0)
$1-q$	F	(0,0)	(1,2)

Meilleure réponse en stratégies mixtes pour Paul ?

Comparons alors l'espérance d'utilité de Paul pour ses deux stratégies :

		Jacqueline	
		t	$1-t$
		O	F
Paul	q O	(2,1)	(0,0)
	$1-q$ F	(0,0)	(1,2)

Meilleure réponse en stratégies mixtes pour Paul ?

Comparons alors l'espérance d'utilité de Paul pour ses deux stratégies :

- $O : U_1(p_1, p_2) = E_{u_1}(p_1, p_2) = 2t + 0(1-t) = 2t$

		Jacqueline	
		t	$1-t$
		O	F
Paul q	O	(2,1)	(0,0)
$1-q$	F	(0,0)	(1,2)

Meilleure réponse en stratégies mixtes pour Paul ?

Comparons alors l'espérance d'utilité de Paul pour ses deux stratégies :

- $O : U_1(p_1, p_2) = E_{u_1}(p_1, p_2) = 2t + 0(1-t) = 2t$
- $F : U_1(p_1, p_2) = E_{u_1}(p_1, p_2) = 0t + 1(1-t) = 1-t$

		Jacqueline	
		t	$1-t$
		O	F
Paul q	O	(2,1)	(0,0)
$1-q$	F	(0,0)	(1,2)

Meilleure réponse en stratégies mixtes pour Paul ?

Comparons alors l'espérance d'utilité de Paul pour ses deux stratégies :

- $O : U_1(p_1, p_2) = E_{u_1}(p_1, p_2) = 2t + 0(1-t) = 2t$
- $F : U_1(p_1, p_2) = E_{u_1}(p_1, p_2) = 0t + 1(1-t) = 1-t$

Face à la stratégie mixte p_2 de Jacqueline, Paul choisira O si :

$$2t > 1 - t \Rightarrow t > \frac{1}{3}$$

$$t > \frac{1}{3} \Rightarrow q^* = 1$$

Conséquence :

$$t > \frac{1}{3} \Rightarrow q^* = 1$$

Conséquence :

1. Paul choisira d'aller **tout le temps** à l'Opéra ($q = 1$) si Jacqueline va à l'Opéra plus d'une soirée sur trois ($t > \frac{1}{3}$).

$$t > \frac{1}{3} \Rightarrow q^* = 1$$

Conséquence :

1. Paul choisira d'aller **tout le temps** à l'Opéra ($q = 1$) si Jacqueline va à l'Opéra plus d'une soirée sur trois ($t > \frac{1}{3}$).
2. Il choisira d'aller **tout le temps** au match de Foot ($q = 0$) si Jacqueline va au Foot plus de deux soirées sur trois ($t < \frac{1}{3} \Rightarrow (1 - t) > \frac{2}{3}$).

$$t > \frac{1}{3} \Rightarrow q^* = 1$$

Conséquence :

1. Paul choisira d'aller **tout le temps** à l'Opéra ($q = 1$) si Jacqueline va à l'Opéra plus d'une soirée sur trois ($t > \frac{1}{3}$).
2. Il choisira d'aller **tout le temps** au match de Foot ($q = 0$) si Jacqueline va au Foot plus de deux soirées sur trois ($t < \frac{1}{3} \Rightarrow (1 - t) > \frac{2}{3}$).
3. Si $t = \frac{1}{3}$, Paul est indifférent entre aller l'Opéra et Foot (toute combinaison de ces stratégies est équivalente pour lui).

Si $t = \frac{1}{3}$, Paul est indifférent entre aller l'Opéra et Foot (toute combinaison de ces stratégies est équivalente pour lui). $\Rightarrow$ Un principe général qui est souvent utile :

Si $t = \frac{1}{3}$, *Paul est indifférent entre aller l'Opéra et Foot (toute combinaison de ces stratégies est équivalente pour lui).* $\Rightarrow$ Un principe général qui est souvent utile :

Lemme

Un joueur qui maximise son utilité en utilisant une stratégie mixte sera nécessairement indifférent entre toutes les stratégies pures auxquelles la stratégie mixte attribue une probabilité strictement positive.

Si $t = \frac{1}{3}$, Paul est indifférent entre aller l'Opéra et Foot (toute combinaison de ces stratégies est équivalente pour lui). $\Rightarrow$ Un principe général qui est souvent utile :

Lemme

Un joueur qui maximise son utilité en utilisant une stratégie mixte sera nécessairement indifférent entre toutes les stratégies pures auxquelles la stratégie mixte attribue une probabilité strictement positive.

- Si cette indifférence n'était pas vérifiée, une stratégie qui donne une probabilité nulle à la stratégie pure la moins préférée serait meilleure.

- **Preuve :** Voir Osborne & Rubinstein(1994), p. 33-34.

La fonction de meilleure réponse de Paul :

$$R_1(t) = q^*(t) = \begin{cases} 1 & \text{Si} \quad t > \frac{1}{3} \\ [0,1] & \text{Si} \quad t = \frac{1}{3} \\ 0 & \text{Si} \quad t < \frac{1}{3} \end{cases}$$

			Jacqueline	
			t	$1-t$
			O	F
Paul	q	O	(2,1)	(0,0)
	$1-q$	F	(0,0)	(1,2)

Et pour Jacqueline :

			Jacqueline	
			t	$1-t$
			O	F
Paul	q	O	(2,1)	(0,0)
	$1-q$	F	(0,0)	(1,2)

Et pour Jacqueline :

- $O : U_2(p_1, p_2) = E_{u_2}(p_1, p_2) = 1q - 0(1-q) = q$

		Jacqueline	
		t	$1-t$
		O	F
Paul q	O	(2,1)	(0,0)
$1-q$	F	(0,0)	(1,2)

Et pour Jacqueline :

- $O : U_2(p_1, p_2) = E_{u_2}(p_1, p_2) = 1q - 0(1-q) = q$
- $F : U_2(p_1, p_2) = E_{u_2}(p_1, p_2) = 0q + 2(1-q) = 2 - 2q$

		Jacqueline	
		t	$1-t$
		O	F
Paul	q O	(2,1)	(0,0)
	$1-q$ F	(0,0)	(1,2)

Et pour Jacqueline :

- $O : U_2(p_1, p_2) = E_{u_2}(p_1, p_2) = 1q - 0(1-q) = q$
- $F : U_2(p_1, p_2) = E_{u_2}(p_1, p_2) = 0q + 2(1-q) = 2 - 2q$

Face à la stratégie mixte de Paul, Jacqueline choisira O $(t = 1)$ si

$$q > 2 - 2q \Rightarrow q > \frac{2}{3}.$$

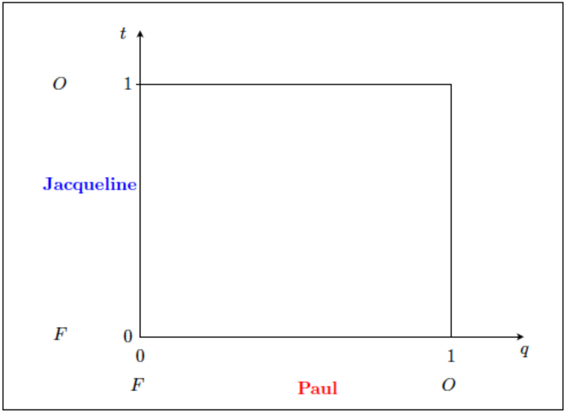
$\Rightarrow$ *Seulement si Paul va à l'Opéra plus de deux soirée sur trois.*

La fonction de meilleure réponse de Jacqueline est :

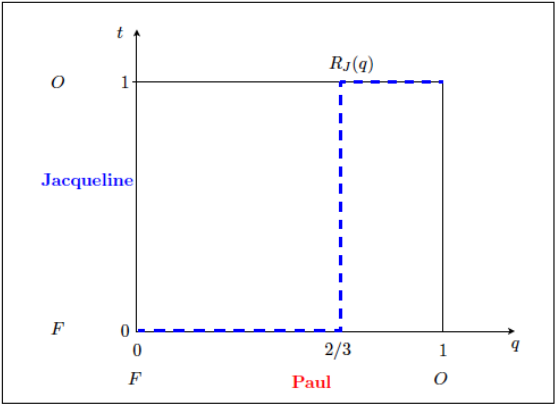
$$R_2(q) = t^*(q) = \begin{cases} 1 & \text{Si} \quad q > \frac{2}{3} \\ [0,1] & \text{Si} \quad q = \frac{2}{3} \\ 0 & \text{Si} \quad q < \frac{2}{3} \end{cases}$$

Représentation graphique

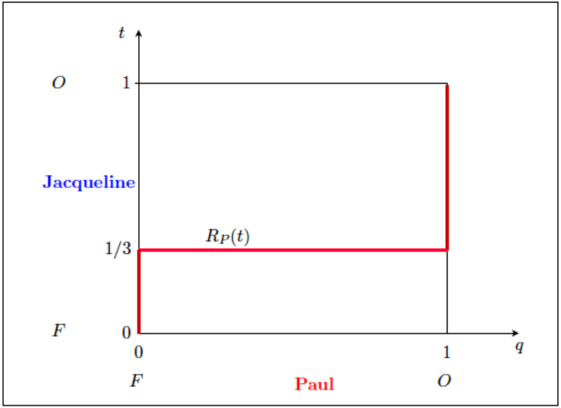
Nous pouvons représenter ces fonctions sur un graphique :



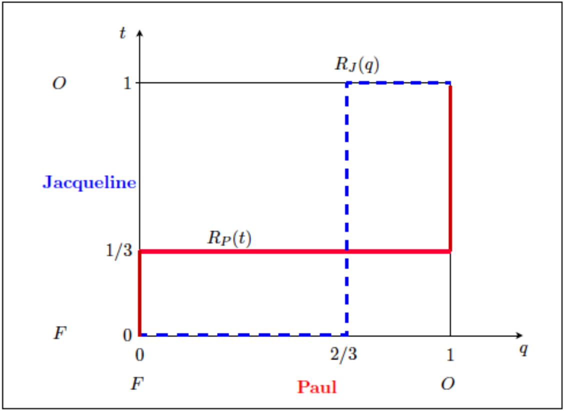
Uniquement Jacqueline :



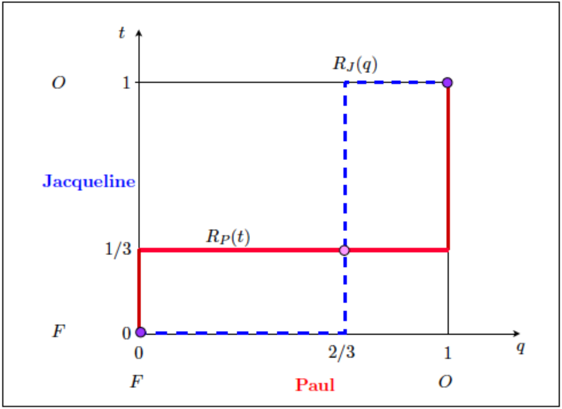
Uniquement Paul :



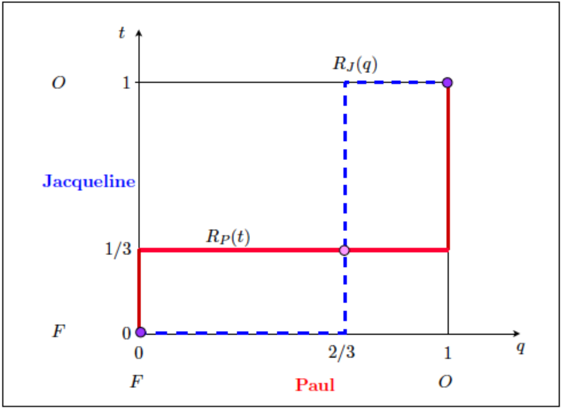
Les deux :



Les points d'intersection sont les équilibres :

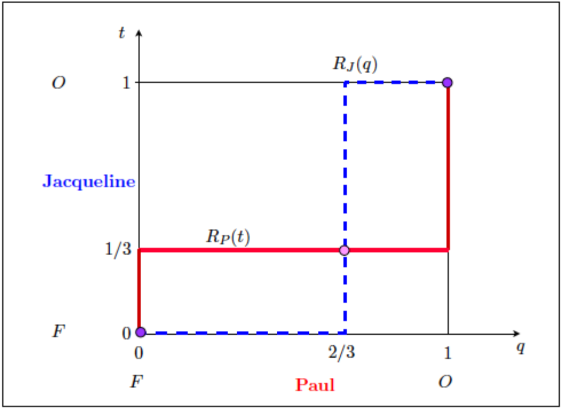


Les points d'intersection sont les équilibres :



- On a bien nos deux équilibres en stratégies pures (O,O) et (F,F).

Les points d'intersection sont les équilibres :



- On a bien nos deux équilibres en stratégies pures (O,O) et (F,F).
- un nouvel équilibre en stratégies mixtes apparaît : $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

Dans l'équilibre $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$, Paul va à l'opéra deux soirées sur trois et Jacqueline, une soirée sur trois. Leur gain espéré est alors :

$$E_{u_i} = \frac{2}{3}, i = 1, 2.$$

Dans l'équilibre $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$, Paul va à l'opéra deux soirées sur trois et Jacqueline, une soirée sur trois. Leur gain espéré est alors :

$$E_{u_i} = \frac{2}{3}, i = 1, 2.$$

TODO

Vérifiez que les trois équilibres correspondent bien à des couples de stratégies (p_1^*, p_2^*) telles que $p_1^* = R_1(p_2^*)$ et $p_2^* = R_2(p_1^*)$.

Calculez les gains correspondants aux trois équilibres.

Plan

Non-existence de l'équilibre de Nash

Il n'existe pas nécessairement un équilibre de Nash pour les jeux où les stratégies sont des **actions directes** des joueurs.

Non-existence de l'équilibre de Nash

Il n'existe pas nécessairement un équilibre de Nash pour les jeux où les stratégies sont des **actions directes** des joueurs.

La bataille des sexes 30 ans plus tard :

- le désir de Jacqueline de passer ses soirées avec Paul a disparu ;
- Paul a gardé son amour romantique et il préfère toujours être avec Jacqueline plutôt qu'être seul.

Non-existence de l'équilibre de Nash

Il n'existe pas nécessairement un équilibre de Nash pour les jeux où les stratégies sont des **actions directes** des joueurs.

La bataille des sexes 30 ans plus tard :

- le désir de Jacqueline de passer ses soirées avec Paul a disparu ;
- Paul a gardé son amour romantique et il préfère toujours être avec Jacqueline plutôt qu'être seul.

		Jacqueline	
		O	F
Paul	O	(2,0)	(0,2)
	F	(0,1)	(1,0)

Non-existence de l'équilibre de Nash

Il n'existe pas nécessairement un équilibre de Nash pour les jeux où les stratégies sont des **actions directes** des joueurs.

La bataille des sexes 30 ans plus tard :

- le désir de Jacqueline de passer ses soirées avec Paul a disparu ;
- Paul a gardé son amour romantique et il préfère toujours être avec Jacqueline plutôt qu'être seul.

		Jacqueline O	**Jacqueline** F
Paul	O	(2,0)	(0,2)
	F	(0,1)	(1,0)

- Il n'existe pas d'équilibre de Nash en stratégies pures.

Non-existence de l'équilibre de Nash

Il n'existe pas nécessairement un équilibre de Nash pour les jeux où les stratégies sont des **actions directes** des joueurs.

La bataille des sexes 30 ans plus tard :

- le désir de Jacqueline de passer ses soirées avec Paul a disparu ;
- Paul a gardé son amour romantique et il préfère toujours être avec Jacqueline plutôt qu'être seul.

		Jacqueline	
		O	F
Paul	O	(2,0)	(0,2)
	F	(0,1)	(1,0)

- Il n'existe pas d'équilibre de Nash en stratégies pures.
- $\Rightarrow$ Un équilibre de Nash en stratégies mixtes $p^* = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. **(à vérifier)**

- La **non existence** de l'équilibre de Nash correspond à l'absence d'intersection entre les fonctions de meilleures réponses.

- La **non existence** de l'équilibre de Nash correspond à l'absence d'intersection entre les fonctions de meilleures réponses.
- S'il y a de forte discontinuités dans les fonctions de réaction, cela devient possible.

- La **non existence** de l'équilibre de Nash correspond à l'absence d'intersection entre les fonctions de meilleures réponses.
- S'il y a de forte discontinuités dans les fonctions de réaction, cela devient possible.
- De manière plus précise, on est assuré d'avoir un équilibre de Nash si :

- La **non existence** de l'équilibre de Nash correspond à l'absence d'intersection entre les fonctions de meilleures réponses.
- S'il y a de forte discontinuités dans les fonctions de réaction, cela devient possible.
- De manière plus précise, on est assuré d'avoir un équilibre de Nash si :
    1. l'ensemble des stratégies de chaque joueur est convexe et compact, et si

- La **non existence** de l'équilibre de Nash correspond à l'absence d'intersection entre les fonctions de meilleures réponses.
- S'il y a de forte discontinuités dans les fonctions de réaction, cela devient possible.
- De manière plus précise, on est assuré d'avoir un équilibre de Nash si :
  1. l'ensemble des stratégies de chaque joueur est convexe et compact, et si
  2. la fonction de paiement de chaque joueur est continue et concave en la propre stratégie du joueur.
- Ces propriétés assurent que les fonctions de réactions se comportent bien et se croisent au moins une fois.

Conditions d'existence

- **Ensemble compact** : ensemble fermé et borné ;

Conditions d'existence

- **Ensemble compact** : ensemble fermé et borné ;
- **Convexité d'un ensemble** $\Rightarrow$ ensemble contenant toute combinaison convexe de deux points lui appartenant ;

Conditions d'existence

- **Ensemble compact** : ensemble fermé et borné ;
- **Convexité d'un ensemble** $\Rightarrow$ ensemble contenant toute combinaison convexe de deux points lui appartenant ;
- **Jeu fini :** jeu où les ensembles de stratégies des joueurs sont finis ;

Conditions d'existence

- **Ensemble compact** : ensemble fermé et borné ;
- **Convexité d'un ensemble** $\Rightarrow$ ensemble contenant toute combinaison convexe de deux points lui appartenant ;
- **Jeu fini :** jeu où les ensembles de stratégies des joueurs sont finis ;
- **Continuité et la concavité** en son propre argument de la fonction de paiement + ensemble de stratégies convexe et compact

Conditions d'existence

- **Ensemble compact** : ensemble fermé et borné ;
- **Convexité d'un ensemble** $\Rightarrow$ ensemble contenant toute combinaison convexe de deux points lui appartenant ;
- **Jeu fini :** jeu où les ensembles de stratégies des joueurs sont finis ;
- **Continuité et la concavité** en son propre argument de la fonction de paiement + ensemble de stratégies convexe et compact
  - le maximum de cette fonction (la meilleure réponse) se modifie de manière continue et reste toujours dans l'ensemble des stratégies.

Conditions d'existence

- **Ensemble compact** : ensemble fermé et borné ;
- **Convexité d'un ensemble** ⇒ ensemble contenant toute combinaison convexe de deux points lui appartenant ;
- **Jeu fini :** jeu où les ensembles de stratégies des joueurs sont finis ;
- **Continuité et la concavité** en son propre argument de la fonction de paiement + ensemble de stratégies convexe et compact
  - le maximum de cette fonction (la meilleure réponse) se modifie de manière continue et reste toujours dans l'ensemble des stratégies.
- ⇒ Intersection des fonctions (ou dans un cadre plus général, des correspondances) de meilleures réponses.

- Stratégies mixtes dans un jeu fini $\Rightarrow$ elles sont définies dans l'intervalle fermé $[0, 1]$, et sur un support fini (S_i) $\Rightarrow$ compacité et convexité

- Stratégies mixtes dans un jeu fini $\Rightarrow$ elles sont définies dans l'intervalle fermé $[0, 1]$, et sur un support fini (S_i) $\Rightarrow$ compacité et convexité
- $\Rightarrow$ **Théorème de Nash**.

- Stratégies mixtes dans un jeu fini $\Rightarrow$ elles sont définies dans l'intervalle fermé $[0,1]$, et sur un support fini (S_i) $\Rightarrow$ compacité et convexité
- $\Rightarrow$ **Théorème de Nash**.

Théorème de Nash

Tout jeu fini possède au moins un équilibre de Nash si les stratégies mixtes sont autorisées.

Bien-être social

- Les concepts d'équilibre correspondent à des mécanismes particuliers de *coordination de stratégies individuelles*.

Bien-être social

- Les concepts d'équilibre correspondent à des mécanismes particuliers de *coordination de stratégies individuelles*.
- Dans les jeux non coopératifs, chaque joueur cherche *unilatéralement à améliorer sa situation individuelle*.

Bien-être social

- Les concepts d'équilibre correspondent à des mécanismes particuliers de *coordination de stratégies individuelles*.
- Dans les jeux non coopératifs, chaque joueur cherche *unilatéralement à améliorer sa situation individuelle*.
- Est-ce que la solution qui est donnée par l'équilibre de Nash correspond à un mécanisme de coordination efficace ?

Bien-être social

- Les concepts d'équilibre correspondent à des mécanismes particuliers de *coordination de stratégies individuelles*.
- Dans les jeux non coopératifs, chaque joueur cherche *unilatéralement à améliorer sa situation individuelle*.
- Est-ce que la solution qui est donnée par l'équilibre de Nash correspond à un mécanisme de coordination efficace ?

Efficacité parétienne et optimum de Pareto

- Nous allons utiliser ces concepts pour répondre à cette question.

Optimum de Pareto

Efficacité au sens de Pareto

1. Le résultat $\hat{\mathbf{s}}$ **Pareto-domine** le résultat s si :

Optimum de Pareto

Efficacité au sens de Pareto

1. Le résultat $\hat{\mathbf{s}}$ **Pareto-domine** le résultat s si :
   - $u_i(\hat{s}) \geqslant u_i(s), \forall i$ et

Optimum de Pareto

Efficacité au sens de Pareto

1. Le résultat $\hat{s}$ **Pareto-domine** le résultat s si :
   - $u_i(\hat{s}) \geqslant u_i(s), \forall i$ et
   - $\exists j,\ u_j(\hat{s}) > u_j(s)$.

Optimum de Pareto

Efficacité au sens de Pareto

1. Le résultat $\hat{\mathbf{s}}$ **Pareto-domine** le résultat s si :
   - $u_i(\hat{s}) \geqslant u_i(s), \forall i$ et
   - $\exists j,\ u_j(\hat{s}) > u_j(s)$.
2. un résultat $s*$ est un **optimum de Pareto** s'il n'existe pas un autre résultat qui le Pareto-domine.

Optimum de Pareto

Efficacité au sens de Pareto

1. Le résultat $\hat{\mathbf{s}}$ **Pareto-domine** le résultat s si :
   - $u_i(\hat{s}) \geqslant u_i(s), \forall i$ et
   - $\exists j, \ u_j(\hat{s}) > u_j(s)$.
2. un résultat s^* est un **optimum de Pareto** s'il n'existe pas un autre résultat qui le Pareto-domine.
3. Les résultats $\hat{\mathbf{s}}$ et $\mathbf{s}$ ne sont pas Pareto-comparables si

$$\exists i, \ u_i(\hat{s}) > u_i(s) \text{ et } \exists j \neq i, \ u_j(\hat{s}) < u_j(s)$$

Dans le dilemme du prisonnier :

		Clyde	
		N	D
Bonnie	N	$(-1,-1)$	$(-10,0)$
	D	$(0,-10)$	$(-8,-8)$

Dans le dilemme du prisonnier :

		Clyde	
		N	D
Bonnie	N	$(-1,-1)$	$(-10,0)$
	D	$(0,-10)$	$(-8,-8)$

- (D,D) est un équilibre de Nash mais (N,N) Pareto-domine cet équilibre.

Proposition

Un équilibre de Nash n'est pas nécessairement un optimum de Pareto.

Proposition

Un équilibre de Nash n'est pas nécessairement un optimum de Pareto.

Dans la bataille des sexes :

		Jacqueline	
		O	F
Paul	O	(2,1)	(0,0)
	F	(0,0)	(1,2)

- Les résultats (O,O) et (F,F) ne sont pas Pareto-comparables.

Proposition

Un équilibre de Nash n'est pas nécessairement un optimum de Pareto.

Dans la bataille des sexes :

		Jacqueline	
		O	F
Paul	O	(2,1)	(0,0)
	F	(0,0)	(1,2)

- Les résultats (O,O) et (F,F) ne sont pas Pareto-comparables.

L'équilibre de Nash n'est pas nécessairement efficace ... ni unique.

Multiplicité

		Jacqueline	
		O	F
Paul	O	(2,1)	(0,0)
	F	(0,0)	(1,2)

Multiplicité

		Jacqueline	
		O	F
Paul	O	(2,1)	(0,0)
	F	(0,0)	(1,2)

(O,O) et (F,F) sont des équilibres de Nash.

Multiplicité

		Jacqueline	
		O	F
Paul	O	(2,1)	(0,0)
	F	(0,0)	(1,2)

(O,O) et (F,F) sont des équilibres de Nash.

- Nous ne sommes pas capables, sans aucune information supplémentaire, de prédire quelle sera exactement la solution du jeu .

Multiplicité

		Jacqueline	
		O	F
Paul	O	(2,1)	(0,0)
	F	(0,0)	(1,2)

(O,O) et (F,F) sont des équilibres de Nash.

- Nous ne sommes pas capables, sans aucune information supplémentaire, de prédire quelle sera exactement la solution du jeu .
- Les deux résultats sont **également vraisemblables**.

Multiplicité

		Jacqueline	
		O	F
Paul	O	(2,1)	(0,0)
	F	(0,0)	(1,2)

(O,O) et (F,F) sont des équilibres de Nash.

- Nous ne sommes pas capables, sans aucune information supplémentaire, de prédire quelle sera exactement la solution du jeu .
- Les deux résultats sont **également vraisemblables**.
- De manière générales, il arrive souvent que les courbes de réactions se coupent plus d'une fois.

Multiplicité

		Jacqueline	
		O	F
Paul	O	(2,1)	(0,0)
	F	(0,0)	(1,2)

(O,O) et (F,F) sont des équilibres de Nash.

- Nous ne sommes pas capables, sans aucune information supplémentaire, de prédire quelle sera exactement la solution du jeu .
- Les deux résultats sont **également vraisemblables**.
- De manière générales, il arrive souvent que les courbes de réactions se coupent plus d'une fois.
- **Question :** Que doit-on faire dans ce cas pour pouvoir prédire les résultats possibles de ce jeu ?

Équivalence des équilibres

- Si les différents équilibres correspondent à des situations suffisamment similaires $\Rightarrow$ la multiplicité ne pose pas de problème (acceptable).

Équivalence des équilibres

- Si les différents équilibres correspondent à des situations suffisamment similaires $\Rightarrow$ la multiplicité ne pose pas de problème (acceptable).
- Précisons nos propos :

Definition

Deux équilibres de Nash p et p' sont **équivalents** si $u_i(p) = u_i(p'), \ \forall i \in I$.

Équivalence des équilibres

- Si les différents équilibres correspondent à des situations suffisamment similaires $\Rightarrow$ la multiplicité ne pose pas de problème (acceptable).
- Précisons nos propos :

Definition

Deux équilibres de Nash p et p' sont **équivalents** si $u_i(p) = u_i(p'), \ \forall i \in I$.

Definition

Deux équilibres de Nash $p = (p_i, p_{-i})$ et $p' = (p'_i, p'_{-i})$ sont **interchangeables** si (p_i, p'_{-i}) et $(p'_i, p_{-i}), \forall i$ sont aussi des équilibres de Nash.

Équilibres de Nash équivalents

Alors on pourra prédire ce qui va résulter de ce jeu malgré la multiplicité.

Équilibres de Nash équivalents

Alors on pourra prédire ce qui va résulter de ce jeu malgré la multiplicité.

Bataille des sexes :

- Les deux équilibres ne sont pas équivalents car les gains des joueurs sont asymétriques.
- Ils ne sont pas interchangeables car (F,O) et (O,F) ne sont pas des équilibres de Nash.

Équilibres de Nash équivalents

Alors on pourra prédire ce qui va résulter de ce jeu malgré la multiplicité.

Bataille des sexes :

- Les deux équilibres ne sont pas équivalents car les gains des joueurs sont asymétriques.
- Ils ne sont pas interchangeables car (F,O) et (O,F) ne sont pas des équilibres de Nash.

- L'équivalence et l'interchangeabilité sont des propriétés assez rares.

Équilibres de Nash équivalents

Alors on pourra prédire ce qui va résulter de ce jeu malgré la multiplicité.

Bataille des sexes :

- Les deux équilibres ne sont pas équivalents car les gains des joueurs sont asymétriques.
- Ils ne sont pas interchangeables car (F,O) et (O,F) ne sont pas des équilibres de Nash.

- L'équivalence et l'interchangeabilité sont des propriétés assez rares.
- **Que peut-on alors dire dans le cas d'équilibre multiple ?**

Conventions

Le problème principal que la multiplicité fait apparaître dans les interactions est celui de la **coordination** des choix.

Conventions

Le problème principal que la multiplicité fait apparaître dans les interactions est celui de la **coordination** des choix.

- En effet, Paul et Jacqueline doivent se coordonner pour organiser leur soirée.

Conventions

Le problème principal que la multiplicité fait apparaître dans les interactions est celui de la **coordination** des choix.

- En effet, Paul et Jacqueline doivent se coordonner pour organiser leur soirée.
- Si vous avez donné rendez-vous à un ami pour aller au cinéma, vous allez naturellement vous retrouver devant ... la porte du cinéma, même si vous n'avez pas initialement précisé le lieu du rendez-vous.

Conventions

Le problème principal que la multiplicité fait apparaître dans les interactions est celui de la **coordination** des choix.

- En effet, Paul et Jacqueline doivent se coordonner pour organiser leur soirée.
- Si vous avez donné rendez-vous à un ami pour aller au cinéma, vous allez naturellement vous retrouver devant ... la porte du cinéma, même si vous n'avez pas initialement précisé le lieu du rendez-vous.
- Ce type de *choix évident pour tous les joueurs* a été appelé **point focal** par Schelling.

Exemple : le jeu du cartel

- Deux firmes similaires forment un cartel de manière à constituer un monopole.

Exemple : le jeu du cartel

- Deux firmes similaires forment un cartel de manière à constituer un monopole.
- **Problème :** décider le partage des profits du cartel.

Exemple : le jeu du cartel

- Deux firmes similaires forment un cartel de manière à constituer un monopole.
- **Problème :** décider le partage des profits du cartel.
- Chaque firme propose une proportion s_i qu'elle désire obtenir

$$s_i \in S_i = \{0, \frac{1}{2}, 1\}, i = 1, 2.$$

Exemple : le jeu du cartel

- Deux firmes similaires forment un cartel de manière à constituer un monopole.
- **Problème :** décider le partage des profits du cartel.
- Chaque firme propose une proportion s_i qu'elle désire obtenir

$$s_i \in S_i = \{0, \frac{1}{2}, 1\}, i = 1, 2.$$

- **Choix compatibles** $(s_1 + s_2 \leqslant 1) \Rightarrow u_i(s_1, s_2) = s_i$.

Exemple : le jeu du cartel

- Deux firmes similaires forment un cartel de manière à constituer un monopole.
- **Problème :** décider le partage des profits du cartel.
- Chaque firme propose une proportion s_i qu'elle désire obtenir

$$s_i \in S_i = \{0, \frac{1}{2}, 1\}, i = 1, 2.$$

- **Choix compatibles** $(s_1 + s_2 \leqslant 1) \Rightarrow u_i(s_1, s_2) = s_i$.
- Sinon le cartel explose $\Rightarrow u_i = -1$.

		Firme B		
		0	$\frac{1}{2}$	1
Firme A	0	$(0, 0)$	$(0, \frac{1}{2})$	$(0, 1)$
	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2}, 0)$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	$(-1, -1)$
	1	$(1, 0)$	$(-1, -1)$	$(-1, -1)$

		Firme B		
		0	$\frac{1}{2}$	1
Firme A	0	$(0,0)$	$(0,\frac{1}{2})$	$(0,1)$
	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2},0)$	$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$	$(-1,-1)$
	1	$(1,0)$	$(-1,-1)$	$(-1,-1)$

- Trois équilibres de Nash : $(1,0)$, $(0,1)$ et $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

		Firme B		
		0	$\frac{1}{2}$	1
Firme A	0	$(0,0)$	$(0,\frac{1}{2})$	$(0,1)$
	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2},0)$	$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$	$(-1,-1)$
	1	$(1,0)$	$(-1,-1)$	$(-1,-1)$

- Trois équilibres de Nash : $(1,0)$, $(0,1)$ et $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.
- Ils ne sont ni équivalents, ni interchangeables $\Rightarrow$ **Résultat ?**

- Pourtant, un des équilibres correspond mieux que les autres à la nature des relations qui existent entre les firmes.

- Pourtant, un des équilibres correspond mieux que les autres à la nature des relations qui existent entre les firmes.
- Firmes similaires $\Rightarrow$ partage égalitaire $\Rightarrow$ équilibre $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

- Pourtant, un des équilibres correspond mieux que les autres à la nature des relations qui existent entre les firmes.
- Firmes similaires $\Rightarrow$ partage égalitaire $\Rightarrow$ équilibre $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.
- $\Rightarrow$ Coordination des firmes sur cet équilibre $\Leftarrow$ Point focal.

- Pourtant, un des équilibres correspond mieux que les autres à la nature des relations qui existent entre les firmes.
- Firmes similaires $\Rightarrow$ partage égalitaire $\Rightarrow$ équilibre $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.
- $\Rightarrow$ Coordination des firmes sur cet équilibre $\Leftarrow$ Point focal.
- Conventions sociales $\Leftarrow$ points focaux en vue de faciliter la coordination.
    - rouler du même côté de la route ;
    - s'arrêter au feu rouge ;
    - se retrouver au point de rencontre dans un aéroport ou une gare ;
    - faire la queue ;
    - ...

Domination

- Si multiplicité et un équilibre clairement Pareto-domine un autre

Domination

- Si multiplicité et un équilibre clairement Pareto-domine un autre
- $\Rightarrow$ point focal

Domination

- Si multiplicité et un équilibre clairement Pareto-domine un autre
- $\Rightarrow$ point focal
- $\Rightarrow$ Coordination sur l'équilibre dominant.

Domination

- Si multiplicité et un équilibre clairement Pareto-domine un autre
- $\Rightarrow$ point focal
- $\Rightarrow$ Coordination sur l'équilibre dominant.

Bataille des sexes III

		Jacqueline	
		O	F
Paul	O	(2,2)	(0,0)
	F	(0,0)	(x,x)

Domination

- Si multiplicité et un équilibre clairement Pareto-domine un autre
- $\Rightarrow$ point focal
- $\Rightarrow$ Coordination sur l'équilibre dominant.

Bataille des sexes III

		Jacqueline	
		O	F
Paul	O	(2,2)	(0,0)
	F	(0,0)	(x,x)

- Si $0 < x < 2$ alors (O,O) et (F,F) sont tous les deux des équilibres de Nash et **(O,O) pareto-domine (F,F)**.

Domination

- Si multiplicité et un équilibre clairement Pareto-domine un autre
- $\Rightarrow$ point focal
- $\Rightarrow$ Coordination sur l'équilibre dominant.

<u>Bataille des sexes III</u>

		Jacqueline	
		O	F
Paul	O	(2,2)	(0,0)
	F	(0,0)	(x,x)

- Si $0 < x < 2$ alors (O,O) et (F,F) sont tous les deux des équilibres de Nash et **(O,O) pareto-domine (F,F)**.
- La coordination sur (O,O) est facile à prédire.

Domination

- Si multiplicité et un équilibre clairement Pareto-domine un autre
- $\Rightarrow$ point focal
- $\Rightarrow$ Coordination sur l'équilibre dominant.

Bataille des sexes III

		Jacqueline	
		O	F
Paul	O	(2,2)	(0,0)
	F	(0,0)	(x,x)

- Si $0 < x < 2$ alors (O,O) et (F,F) sont tous les deux des équilibres de Nash et **(O,O) pareto-domine (F,F)**.
- La coordination sur (O,O) est facile à prédire.
- Mais quid si $x = 1.99$?

- La dynamique de déroulement du jeu + la rationalité des joueurs peuvent nous guider quant aux résultats qui peuvent émerger.
- On peut avoir des mécanismes de coordination.
- Bataille ses sexes : Paul rentre à la maison avec deux billets pour l'Opéra $\Rightarrow$ l'équilibre (O,O).
- Communication avant le jeu $\Rightarrow$ modification de la structure du jeu.

Communication avant le jeu

- Joueurs $\Rightarrow$ se mettre d'accord avant le jeu sur l'équilibre qu'ils vont jouer ?

Communication avant le jeu

- Joueurs $\Rightarrow$ se mettre d'accord avant le jeu sur l'équilibre qu'ils vont jouer ?
- Bonnie et Clyde $\Rightarrow$ se mettre d'accord pour ne jamais dénoncer $\Rightarrow$ *résultat Pareto-optimal* ?

Communication avant le jeu

- Joueurs $\Rightarrow$ se mettre d'accord avant le jeu sur l'équilibre qu'ils vont jouer ?
- Bonnie et Clyde $\Rightarrow$ se mettre d'accord pour ne jamais dénoncer $\Rightarrow$ *résultat Pareto-optimal* ?
- Quoi qu'ils se disent avant (*cheap talk*), les joueurs seront dans une situation non-coopérative dès que le jeu commence.

Communication avant le jeu

- Joueurs ⇒ se mettre d'accord avant le jeu sur l'équilibre qu'ils vont jouer ?
- Bonnie et Clyde ⇒ se mettre d'accord pour ne jamais dénoncer ⇒ *résultat Pareto-optimal* ?
- Quoi qu'ils se disent avant (*cheap talk*), les joueurs seront dans une situation non-coopérative dès que le jeu commence.
- Dénoncer domine fortement Nier ⇒ aucune entente tacite ne peut assurer la stratégie N.

Communication avant le jeu

- Joueurs $\Rightarrow$ se mettre d'accord avant le jeu sur l'équilibre qu'ils vont jouer ?
- Bonnie et Clyde $\Rightarrow$ se mettre d'accord pour ne jamais dénoncer $\Rightarrow$ *résultat Pareto-optimal* ?
- Quoi qu'ils se disent avant (*cheap talk*), les joueurs seront dans une situation non-coopérative dès que le jeu commence.
- Dénoncer domine fortement Nier $\Rightarrow$ aucune entente tacite ne peut assurer la stratégie N.
- Tentation de dénoncer $\Leftarrow$ *respecter l'entente* $\Rightarrow$ risque de se trouver dans une très mauvaise posture.

- Jeux non-coopératifs : respect de l'accord tacite **uniquement** si cela est dans l'intérêt du joueur.
  - Principe de **rationalité individuelle**.

- Jeux non-coopératifs : respect de l'accord tacite **uniquement** si cela est dans l'intérêt du joueur.
  - Principe de **rationalité individuelle**.
- Cela n'est pas vérifié pour la stratégie N dans le Dilemme du prisonnier.

- Jeux non-coopératifs : respect de l'accord tacite **uniquement** si cela est dans l'intérêt du joueur.
  - Principe de **rationalité individuelle**.
- Cela n'est pas vérifié pour la stratégie N dans le Dilemme du prisonnier.
- $\Rightarrow$ Un accord respecté uniquement s'il change la structure du jeu :
  - le déroulement du jeu ;
  - les ensembles de stratégies ;
  - les gains.

- Jeux non-coopératifs : respect de l'accord tacite **uniquement** si cela est dans l'intérêt du joueur.
  - Principe de **rationalité individuelle**.
- Cela n'est pas vérifié pour la stratégie N dans le Dilemme du prisonnier.
- $\Rightarrow$ Un accord respecté uniquement s'il change la structure du jeu :
  - le déroulement du jeu ;
  - les ensembles de stratégies ;
  - les gains.
- $\Rightarrow$ Nécessité de menaces crédibles (Bonnie et la bande ...).

- Équilibre corrélé $\Rightarrow$ un autre type de problème $\Rightarrow$ problème de coordination.

- Équilibre corrélé $\Rightarrow$ un autre type de problème $\Rightarrow$ problème de coordination.
- Solutions possibles : **les conventions**

- Équilibre corrélé $\Rightarrow$ un autre type de problème $\Rightarrow$ problème de coordination.
- Solutions possibles : **les conventions**
- Mais aussi : **l'intervention neutre du tierce personne.**

Équilibre corrélé

La tierce personne la plus neutre : la Nature et son intervention aléatoire.

- Pile ou face au début du match de football $\Rightarrow$ un événement aléatoire observable conjointement par tous les joueurs.

Équilibre corrélé

La tierce personne la plus neutre : la Nature et son intervention aléatoire.

- Pile ou face au début du match de football $\Rightarrow$ un événement aléatoire observable conjointement par tous les joueurs.
- Un événement aléatoire observé conjointement par tous les joueurs peut **faciliter** la coordination.

Équilibre corrélé

La tierce personne la plus neutre : la Nature et son intervention aléatoire.

- Pile ou face au début du match de football $\Rightarrow$ un événement aléatoire observable conjointement par tous les joueurs.
- Un événement aléatoire observé conjointement par tous les joueurs peut **faciliter** la coordination.
- Bataille des sexes :

Équilibre corrélé

La tierce personne la plus neutre : la Nature et son intervention aléatoire.

- Pile ou face au début du match de football $\Rightarrow$ un événement aléatoire observable conjointement par tous les joueurs.
- Un événement aléatoire observé conjointement par tous les joueurs peut **faciliter** la coordination.
- Bataille des sexes :
  - Paul et Jacqueline peuvent demander à leur voisin de jouer à Pile ou Face entre F et O ;

Équilibre corrélé

La tierce personne la plus neutre : la Nature et son intervention aléatoire.

- Pile ou face au début du match de football $\Rightarrow$ un événement aléatoire observable conjointement par tous les joueurs.
- Un événement aléatoire observé conjointement par tous les joueurs peut **faciliter** la coordination.
- Bataille des sexes :
  - Paul et Jacqueline peuvent demander à leur voisin de jouer à Pile ou Face entre F et O ;
  - Il dira à chacun de jouer O (si Pile est tiré) ou de jouer F (si Face est tiré).

Équilibre corrélé

La tierce personne la plus neutre : la Nature et son intervention aléatoire.

- Pile ou face au début du match de football $\Rightarrow$ un événement aléatoire observable conjointement par tous les joueurs.
- Un événement aléatoire observé conjointement par tous les joueurs peut **faciliter** la coordination.
- Bataille des sexes :
  - Paul et Jacqueline peuvent demander à leur voisin de jouer à Pile ou Face entre F et O ;
  - Il dira à chacun de jouer O (si Pile est tiré) ou de jouer F (si Face est tiré).
- Le gain espéré :

$$U_i = E_{u_i} = \frac{1}{2}u_i(O,O) + \frac{1}{2}u_i(F,F) = \frac{1}{2}2 + \frac{1}{2}1 = \frac{3}{2}$$

Équilibre corrélé

La tierce personne la plus neutre : la Nature et son intervention aléatoire.

- Pile ou face au début du match de football $\Rightarrow$ un événement aléatoire observable conjointement par tous les joueurs.
- Un événement aléatoire observé conjointement par tous les joueurs peut **faciliter** la coordination.
- Bataille des sexes :
  - Paul et Jacqueline peuvent demander à leur voisin de jouer à Pile ou Face entre F et O ;
  - Il dira à chacun de jouer O (si Pile est tiré) ou de jouer F (si Face est tiré).
- Le gain espéré :

$$U_i = E_{u_i} = \frac{1}{2}u_i(O,O) + \frac{1}{2}u_i(F,F) = \frac{1}{2}2 + \frac{1}{2}1 = \frac{3}{2}$$

Ces gains espérés $>$ aux gains de l'équilibre de Nash en stratégies mixtes : $p* = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$.

Voisin non corruptible $\Rightarrow$ aléa impartial $\Rightarrow$ Joueurs ont intérêt à suivre sa recommandation.

- Tout événement **aléatoire et objectif** peut jouer ce rôle de coordination.
- Ces événements instaure une corrélation entre les choix des agents $\Rightarrow$ **équilibre corrélé d'Aumann**

Remarque

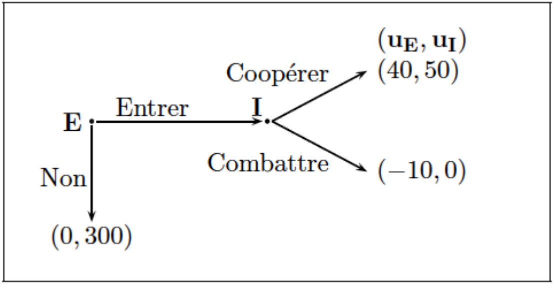
Il s'agit bien d'un équilibre non-coopératif :

- aucun joueur ne s'est engagé en une action particulière à l'avance ;
- s'il suit l'indication, c'est parce qu'il y a intérêt.

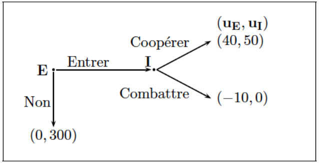
Plan

Reprise : le problème de l'entrant

Rappel :



Quel va être le résultat de ce jeu ?



$$I : \begin{cases} \text{Coopérer} & \text{si Entrer} \\ \{\text{Coopérer, Combattre}\} & \text{sinon} \end{cases}$$

$$E : \begin{cases} \text{Entrer} & \text{si Coopérer} \\ \text{Non} & \text{sinon} \end{cases}$$

Forme normale du jeu $\Rightarrow$ représenter ces fonctions de réaction $\square$ pour E et $\star$ pour I.

Forme normale du jeu $\Rightarrow$ représenter ces fonctions de réaction $\square$ pour E et $\bigstar$ pour I.

		I	
		Coopérer	Combattre
E	Entrer	$\boxed{\bigstar}$	
	Non	$\bigstar$	$\boxed{\bigstar}$

Forme normale du jeu $\Rightarrow$ représenter ces fonctions de réaction $\square$ pour E et $\star$ pour I.

		I	
		Coopérer	Combattre
E	Entrer	$\boxed{\star}$	
	Non	$\star$	$\boxed{\star}$

- Deux équilibres de Nash : (Entrer, Coopérer) et (Non, Combattre).

- Ces équilibres sont ni **équivalents**, ni **interchangeables**, et il n'y a pas **dominance parétienne** entre eux.

- Ces équilibres sont ni **équivalents**, ni **interchangeables**, et il n'y a pas **dominance parétienne** entre eux.
- Aucun ne constitue un point focal $\Rightarrow$ les deux sont a priori vraisemblables du point de vue de l'équilibre de Nash.

- Ces équilibres sont ni **équivalents**, ni **interchangeables**, et il n'y a pas **dominance parétienne** entre eux.
- Aucun ne constitue un point focal $\Rightarrow$ les deux sont a priori vraisemblables du point de vue de l'équilibre de Nash.

$\Rightarrow$ Possibilité pour I de bloquer l'entrée sur son marché, grâce à la **menace de combattre l'entrée**.

- Ces équilibres sont ni **équivalents**, ni **interchangeables**, et il n'y a pas **dominance parétienne** entre eux.
- Aucun ne constitue un point focal $\Rightarrow$ les deux sont a priori vraisemblables du point de vue de l'équilibre de Nash.

$\Rightarrow$ Possibilité pour I de bloquer l'entrée sur son marché, grâce à la **menace de combattre l'entrée**.

- Crédibilité de la menace ? (prochainement)