Théorie des Jeux

Dynamique et Rétroduction

Marc Plantevit

marc.plantevit@univ-lyon1.fr

- L'équilibre de Nash : très peu contraignant sur les actions choisies par les joueurs en dehors du chemin d'équilibre.

- L'équilibre de Nash : très peu contraignant sur les actions choisies par les joueurs en dehors du chemin d'équilibre.
- L'optimalité de ces choix peut parfois justement dépendre du fait que les actions correspondantes ne sont pas effectivement effectuées par les joueurs (car aucun ne dévie du chemin d'équilibre).

- L'équilibre de Nash : très peu contraignant sur les actions choisies par les joueurs en dehors du chemin d'équilibre.
- L'optimalité de ces choix peut parfois justement dépendre du fait que les actions correspondantes ne sont pas effectivement effectuées par les joueurs (car aucun ne dévie du chemin d'équilibre).
- $\Rightarrow$ Optimalité faible dans la mesure où, une fois en dehors du chemin d'équilibre, l'optimalité de telles actions sera mise en cause, ainsi que leur choix par les joueurs.

- L'équilibre de Nash : très peu contraignant sur les actions choisies par les joueurs en dehors du chemin d'équilibre.
- L'optimalité de ces choix peut parfois justement dépendre du fait que les actions correspondantes ne sont pas effectivement effectuées par les joueurs (car aucun ne dévie du chemin d'équilibre).
- $\Rightarrow$ Optimalité faible dans la mesure où, une fois en dehors du chemin d'équilibre, l'optimalité de telles actions sera mise en cause, ainsi que leur choix par les joueurs.
- Cette faiblesse réduit considérablement le pouvoir **prédictif** et la **robustesse** de tout équilibre de Nash en se basant sur de telles actions.

- L'équilibre de Nash : très peu contraignant sur les actions choisies par les joueurs en dehors du chemin d'équilibre.
- L'optimalité de ces choix peut parfois justement dépendre du fait que les actions correspondantes ne sont pas effectivement effectuées par les joueurs (car aucun ne dévie du chemin d'équilibre).
- $\Rightarrow$ Optimalité faible dans la mesure où, une fois en dehors du chemin d'équilibre, l'optimalité de telles actions sera mise en cause, ainsi que leur choix par les joueurs.
- Cette faiblesse réduit considérablement le pouvoir **prédictif** et la **robustesse** de tout équilibre de Nash en se basant sur de telles actions.
- *Nous allons voir des concepts d'équilibre cherchant à pallier cette insuffisance* bien connus en programmation dynamique : l'induction rétroactive ou rétroduction.

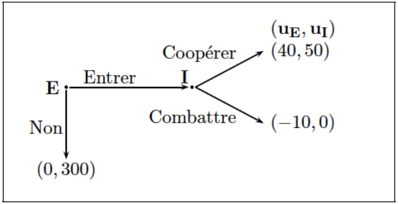
Concepts Étudiés

Équilibre parfait en sous-jeux de Selten

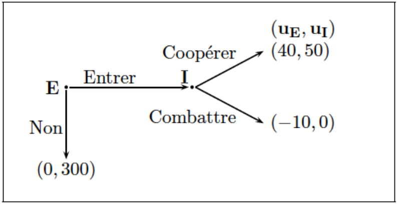
- le principe de Bellman et la rétroduction ;
- les sous-jeux d'un jeu ;
- l'équilibre parfait en sous-jeux ;
- les menaces crédibles ;
- les jeux de Stackelberg ;
- les stratégies complémentaires et substituables.

- Un nouveau concept d'équilibre le principe bien connu de la programmation dynamique (Bellman) : l'induction rétroactive ou la rétroduction (backward induction).
- Le principe de Bellman est souvent utilisé pour résoudre un problème d'optimisation dynamique :
    - on commence par chercher le **choix optimal de la dernière période** ;
    - on **remonte le temps** de période en période en cherchant à chaque période le choix optimal, une fois qu'on a pris en compte les choix optimaux des périodes ultérieures.

Reprenons le jeu de l'Entrée :

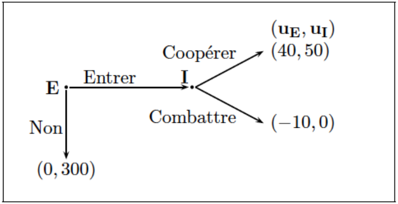


Reprenons le jeu de l'Entrée :



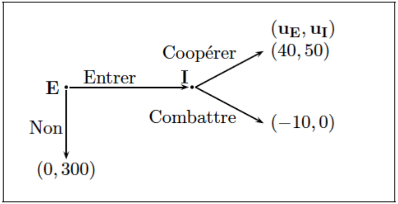
- Deux équilibres de Nash en stratégies pures : (Entrer, Coopérer) et (Non, Combattre)

Reprenons le jeu de l'Entrée :



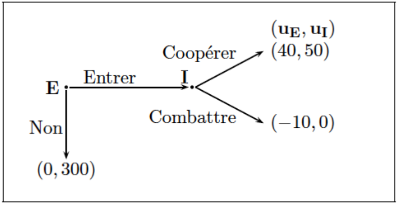
- Deux équilibres de Nash en stratégies pures : (Entrer, Coopérer) et (Non, Combattre)
- Mais :

Reprenons le jeu de l'Entrée :

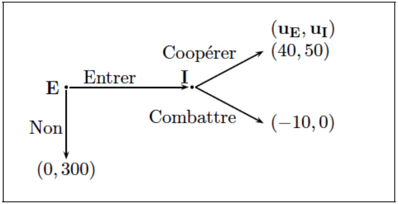


- Deux équilibres de Nash en stratégies pures : (Entrer, Coopérer) et (Non, Combattre)
- Mais :
  - L'équilibre (Non, Combattre) est basée sur la menace de combattre l'entrée si elle a lieu.

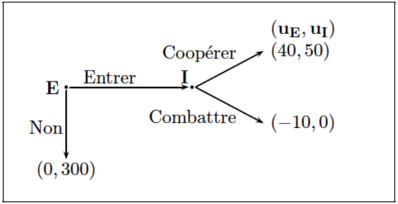
Reprenons le jeu de l'Entrée :



- Deux équilibres de Nash en stratégies pures : (Entrer, Coopérer) et (Non, Combattre)
- Mais :
  - L'équilibre (Non, Combattre) est basée sur la menace de combattre l'entrée si elle a lieu.
- **Est-ce que cette menace va vraiment être exécutée ?**

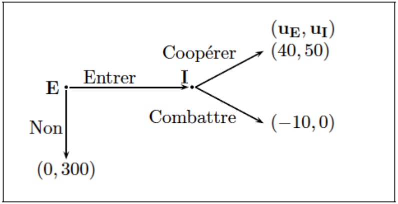


Non puisque l'entrée n'aura pas lieu à cet équilibre.



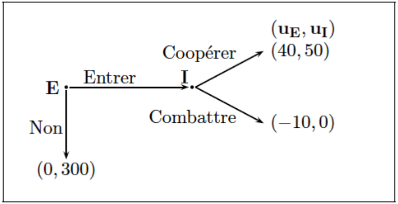
Non puisque l'entrée n'aura pas lieu à cet équilibre.

- Si I devait faire face à l'entrée, aurait-elle choisi cette stratégie de Combattre ?



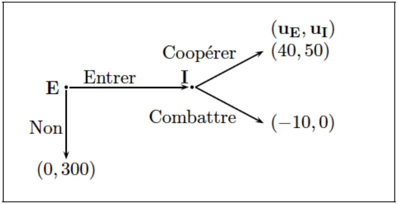
Non puisque l'entrée n'aura pas lieu à cet équilibre.

- Si I devait faire face à l'entrée, aurait-elle choisi cette stratégie de Combattre ?
- $u_I(\text{Entrer, Combattre}) = 0 < u_I(\text{Entrer, Coopérer}) = 50$



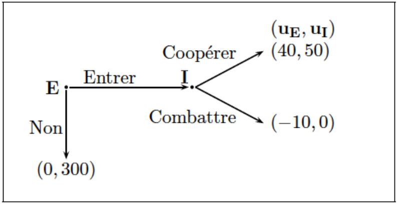
Non puisque l'entrée n'aura pas lieu à cet équilibre.

- Si I devait faire face à l'entrée, aurait-elle choisi cette stratégie de Combattre ?
- $u_I(\text{Entrer, Combattre}) = 0 < u_I(\text{Entrer, Coopérer}) = 50$
- Menace non crédible et l'équilibre de Nash (Non, Combattre) est soutenu par cette menace.



Non puisque l'entrée n'aura pas lieu à cet équilibre.

- Si I devait faire face à l'entrée, aurait-elle choisi cette stratégie de Combattre ?
- $u_I(\text{Entrer, Combattre}) = 0 < u_I(\text{Entrer, Coopérer}) = 50$
- Menace non crédible et l'équilibre de Nash (Non, Combattre) est soutenu par cette menace.

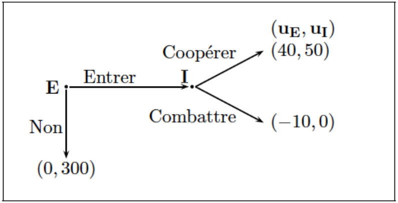


Non puisque l'entrée n'aura pas lieu à cet équilibre.

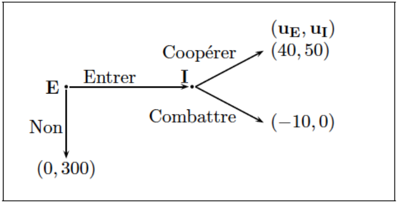
- Si I devait faire face à l'entrée, aurait-elle choisi cette stratégie de Combattre ?
- $u_I(\text{Entrer, Combattre}) = 0 < u_I(\text{Entrer, Coopérer}) = 50$
- Menace non crédible et l'équilibre de Nash (Non, Combattre) est soutenu par cette menace.

Faiblesse de l'équilibre de Nash

- L'existence de telles menaces souligne la faiblesse de l'équilibre de Nash.
- Ce concept d'équilibre ne distingue pas les **plans d'action** et le **jeu effectif** : l'équilibre de Nash est établi au niveau des plans d'actions définis sur le déroulement total du jeu.



- Cela ne pose pas de problème dans les **jeux simultanés**.
- Mais quand il y a une séquentialité de décisions, un joueur ne s'en tiendra à son plan d'action qui **ssi** cela est **optimal** pour lui quand c'est **son tour de jouer**.



- Cela ne pose pas de problème dans les **jeux simultanés**.
- Mais quand il y a une séquentialité de décisions, un joueur ne s'en tiendra à son plan d'action qui **ssi** cela est **optimal** pour lui quand c'est **son tour de jouer**.
- Par conséquent, quand l'entrée a lieu et que c'est le tour de la firme installée de jouer, **il n'y a aucune raison qu'elle choisisse de combattre l'entrée.**

Plan

1. Sous-jeux et équilibres parfaits en sous Jeu
2. Paradoxe de la rétroduction
3. Application : une taxinomie des stratégies d'investissement

Sous-jeux

- Nous pouvons généraliser l'idée de base qui exige l'optimalité des choix chaque fois qu'un joueur doit jouer en introduisant le concept de **sous-jeu** et le combiner avec le principe de **rétroduction**.

Sous-jeux

- Nous pouvons généraliser l'idée de base qui exige l'optimalité des choix chaque fois qu'un joueur doit jouer en introduisant le concept de **sous-jeu** et le combiner avec le principe de **rétroduction**.

Definition

Un **sous-jeu** d'un jeu en forme extensive J est constitué par :

Sous-jeux

- Nous pouvons généraliser l'idée de base qui exige l'optimalité des choix chaque fois qu'un joueur doit jouer en introduisant le concept de **sous-jeu** et le combiner avec le principe de **rétroduction**.

Definition

Un **sous-jeu** d'un jeu en forme extensive J est constitué par :

- un ensemble K de sommets, comprenant un sommet de J et les sommets consécutifs à celui-ci, muni de la propriété suivante : si un sommet k de K appartient à un ensemble d'information h non-réduit à un singleton alors tous les sommets de h appartiennent à K $(h \subset K)$;

Sous-jeux

- Nous pouvons généraliser l'idée de base qui exige l'optimalité des choix chaque fois qu'un joueur doit jouer en introduisant le concept de **sous-jeu** et le combiner avec le principe de **rétroduction**.

Definition

Un **sous-jeu** d'un jeu en forme extensive J est constitué par :

- un ensemble K de sommets, comprenant un sommet de J et les sommets consécutifs à celui-ci, muni de la propriété suivante : si un sommet k de K appartient à un ensemble d'information h non-réduit à un singleton alors tous les sommets de h appartiennent à K $(h \subset K)$;
- l'ensemble des arcs reliant les différents sommets de K ;

Sous-jeux

- Nous pouvons généraliser l'idée de base qui exige l'optimalité des choix chaque fois qu'un joueur doit jouer en introduisant le concept de **sous-jeu** et le combiner avec le principe de **rétroduction**.

Definition

Un **sous-jeu** d'un jeu en forme extensive J est constitué par :

- un ensemble K de sommets, comprenant un sommet de J et les sommets consécutifs à celui-ci, muni de la propriété suivante : si un sommet k de K appartient à un ensemble d'information h non-réduit à un singleton alors tous les sommets de h appartiennent à K $(h \subset K)$;
- l'ensemble des arcs reliant les différents sommets de K ;
- les gains terminaux de J correspondants aux sommets terminaux de K.

Definition

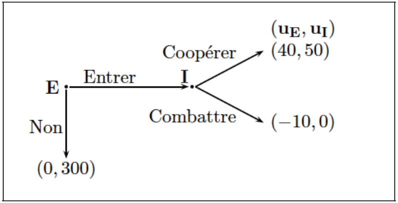
Quand un sous-jeu est différent du jeu original, on l'appelle un **sous-jeu propre**.

Definition

Quand un sous-jeu est différent du jeu original, on l'appelle un **sous-jeu propre**.

- Tout jeu J en forme extensive contient au moins un sous-jeu : lui-même.

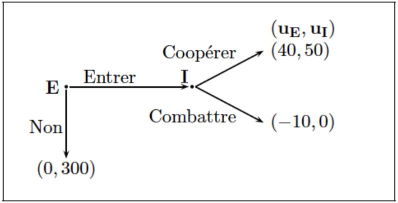
Le jeu de l'Entrée



Deux sous-jeux :

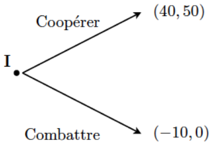
- Le jeu original et

Le jeu de l'Entrée



Deux sous-jeux :

- Le jeu original et
- un sous-jeu qui commence au sommet I :



- Quand le jeu contient des sous-jeux propres, on utilise cette particularité pour affiner le concept d'équilibre de manière à **éliminer les menaces non crédibles**.

- Quand le jeu contient des sous-jeux propres, on utilise cette particularité pour affiner le concept d'équilibre de manière à **éliminer les menaces non crédibles**.
- $\Rightarrow$ Permettra d'appliquer le concept d'équilibre de Nash dans chaque sous-jeu et donc de manière plus **pertinente**.

Definition (Selten (1975))

Un profil de stratégies du jeu J est **un équilibre (de Nash) parfait en sous-jeux (EPSJ)** s'il correspond à un équilibre de Nash dans chaque sous-jeu du jeu J.

Definition (Selten (1975))

Un profil de stratégies du jeu J est **un équilibre (de Nash) parfait en sous-jeux (EPSJ)** s'il correspond à un équilibre de Nash dans chaque sous-jeu du jeu J.

- Un EPSJ doit être un équilibre de Nash du jeu original, car ce dernier correspond à l'un des sous-jeux.

Pour chercher les EPSJ d'un jeu **fini** on utilise la rétroduction :

Pour chercher les EPSJ d'un jeu **fini** on utilise la rétroduction :

- Commencer par chercher les équilibres de Nash des sous-jeux les plus proches des nœuds terminaux ;

Pour chercher les EPSJ d'un jeu **fini** on utilise la rétroduction :

- Commencer par chercher les équilibres de Nash des sous-jeux les plus proches des nœuds terminaux ;
- remplacer ces sous-jeux par les résultats d'équilibre correspondants ;

Pour chercher les EPSJ d'un jeu **fini** on utilise la rétroduction :

- Commencer par chercher les équilibres de Nash des sous-jeux les plus proches des nœuds terminaux ;
- remplacer ces sous-jeux par les résultats d'équilibre correspondants ;
- Remonter vers les sous-jeux qui contiennent ces sous-jeux terminaux.

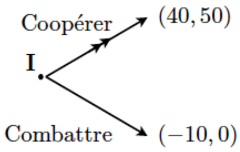
Pour chercher les EPSJ d'un jeu **fini** on utilise la rétroduction :

- Commencer par chercher les équilibres de Nash des sous-jeux les plus proches des nœuds terminaux ;
- remplacer ces sous-jeux par les résultats d'équilibre correspondants ;
- Remonter vers les sous-jeux qui contiennent ces sous-jeux terminaux.
- Recommencer l'opération jusqu'à ce que l'on ait atteint l'équilibre de Nash du sous-jeu qui découle du nœud initial.

Retour à l'exemple

Remplacer le sous-jeu propre par le résultat correspondant au choix de ne pas combattre l'entrant :

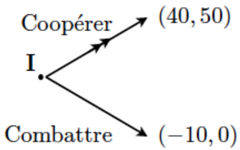
Le sous-jeu



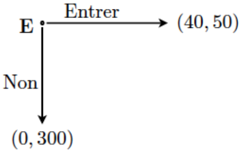
Retour à l'exemple

Remplacer le sous-jeu propre par le résultat correspondant au choix de ne pas combattre l'entrant :

Le sous-jeu



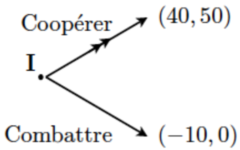
Le jeu réduit



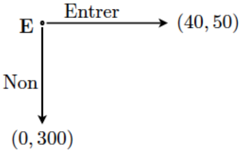
Retour à l'exemple

Remplacer le sous-jeu propre par le résultat correspondant au choix de ne pas combattre l'entrant :

Le sous-jeu



Le jeu réduit

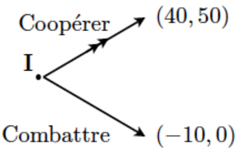


- L'entrant potentiel choisit alors d'entrer et nous avons l'équilibre **(Entrer, Coopérer)**.

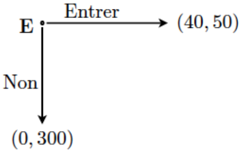
Retour à l'exemple

Remplacer le sous-jeu propre par le résultat correspondant au choix de ne pas combattre l'entrant :

Le sous-jeu



Le jeu réduit



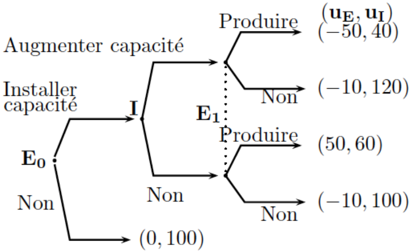
- L'entrant potentiel choisit alors d'entrer et nous avons l'équilibre **(Entrer, Coopérer)**.
- $\Rightarrow$ La menace de combattre l'entrée n'est pas une menace crédible car elle ne fait pas partie de l'équilibre de Nash d'un sous-jeu et ne sera jamais choisie quand il faudra exécuter effectivement cette menace.

Généralisation

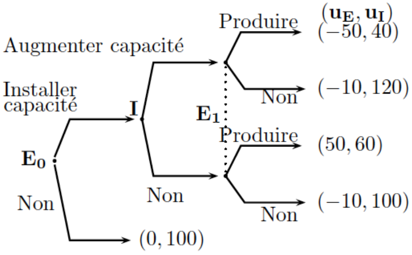
Proposition

Dans tout jeu sous forme extensive, l'ensemble des EPSJ est l'ensemble des profils de stratégies obtenus en combinant la procédure de Nash avec le principe de rétroduction.

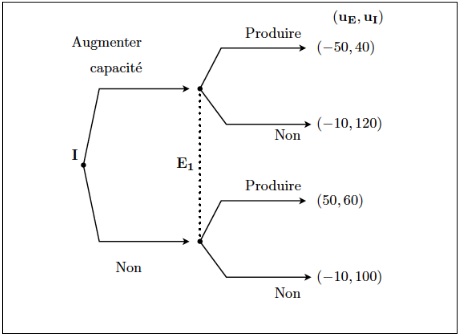
Reprenons le jeu de l'Entrée II :

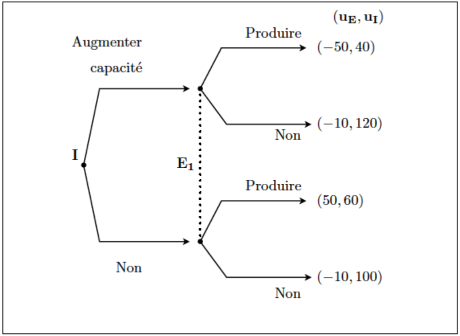


Reprenons le jeu de l'Entrée II :



- Ce jeu possède un **seul sous-jeu propre** commençant au sommet **I**.


$(\mathbf{u_E}, \mathbf{u_I})$
Augmenter
capacité
Produire
$(-50, 40)$
Non
$(-10, 120)$
I
$\mathbf{E_1}$
Produire
$(50, 60)$
Non
Non
$(-10, 100)$



- Nous pouvons facilement construire la forme normale de ce sous-jeu pour en déterminer les équilibres de Nash.

Symboles utilisés : N(on), A(ugmenter capacité), P(roduire).

		I	
		A	N
E	P	(-50,40)	(50, 60)
	N	(-10,120)	(-10, 100)

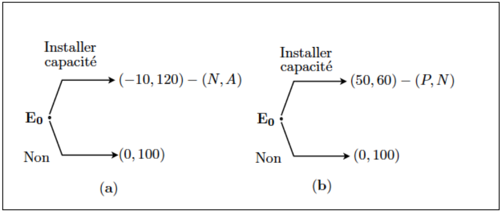
Symboles utilisés : N(on), A(ugmenter capacité), P(roduire).

		I	
		A	N
E	P	(-50,40)	(50, 60)
	N	(-10,120)	(-10, 100)

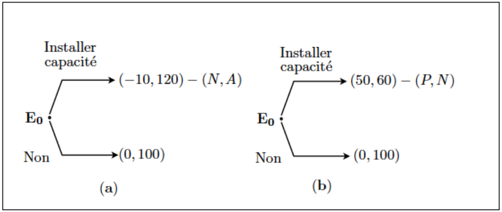
Ce sous-jeu possède deux équilibres de Nash :

- $s* = (s_E^*, s_I^*) = (N, A) \to (-10, 120)$ et
- $v* = (v_E^*, v_I^*) = (P, N) \to (50, 60)$.

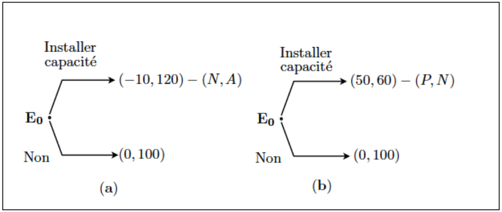
Nous pouvons considérer les deux jeux réduits correspondant à ces équilibres.



- Deux EPSJ : **((N,N) ,A)** et **((I , P) ,N)**.



- Deux EPSJ : **((N,N) ,A)** et **((I , P) ,N)**.
- Équilibre de Nash ((N, P) ,A) est éliminé car le profil $w = (P, A)$ ne fait pas partie des équilibres de Nash du sous-jeu.



- Deux EPSJ : **((N,N) ,A)** et **((I , P) ,N)**.
- Équilibre de Nash ((N, P) ,A) est éliminé car le profil $w = (P, A)$ ne fait pas partie des équilibres de Nash du sous-jeu.

Remarque :

Chaque équilibre de Nash du jeu original n'est pas nécessairement un EPSJ.

- Dans le jeu de l'Entrée I, le blocage de l'entrée est basé sur une **menace qui ne sera jamais réellement exécutée**.

- Dans le jeu de l'Entrée I, le blocage de l'entrée est basé sur une **menace qui ne sera jamais réellement exécutée**.
- Ce type de menace ne peut faire partie des EPSJ puisque l'on considère **l'optimalité des choix dans chaque sous-jeu** au lieu de considérer uniquement dans le jeu entier.

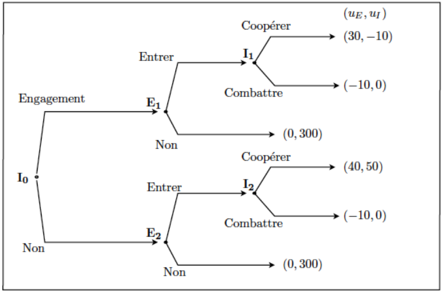
- Dans le jeu de l'Entrée I, le blocage de l'entrée est basé sur une **menace qui ne sera jamais réellement exécutée**.
- Ce type de menace ne peut faire partie des EPSJ puisque l'on considère **l'optimalité des choix dans chaque sous-jeu** au lieu de considérer uniquement dans le jeu entier.
- Dans le jeu de l'Entrée II, la **menace** d'augmenter la capacité est bien **crédible** puisqu'elle fait partie de l'équilibre de Nash du sous-jeu et la firme installée a intérêt à l'exécuter effectivement.

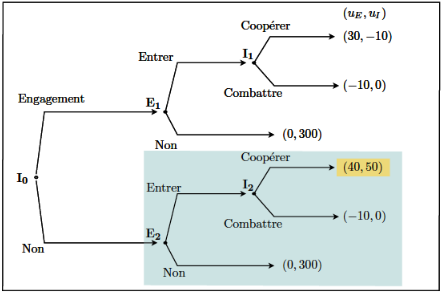
- Dans le jeu de l'Entrée I, le blocage de l'entrée est basé sur une **menace qui ne sera jamais réellement exécutée**.
- Ce type de menace ne peut faire partie des EPSJ puisque l'on considère **l'optimalité des choix dans chaque sous-jeu** au lieu de considérer uniquement dans le jeu entier.
- Dans le jeu de l'Entrée II, la **menace** d'augmenter la capacité est bien **crédible** puisqu'elle fait partie de l'équilibre de Nash du sous-jeu et la firme installée a intérêt à l'exécuter effectivement.
- $\Rightarrow$ Si ce qui se passe avant le jeu (menace, communication, etc.) doit **changer l'ensemble des équilibres**, il doit se baser sur une menace crédible et **modifier la structure du jeu**.

- Dans le jeu de l'Entrée I, le blocage de l'entrée est basé sur une **menace qui ne sera jamais réellement exécutée**.
- Ce type de menace ne peut faire partie des EPSJ puisque l'on considère **l'optimalité des choix dans chaque sous-jeu** au lieu de considérer uniquement dans le jeu entier.
- Dans le jeu de l'Entrée II, la **menace** d'augmenter la capacité est bien **crédible** puisqu'elle fait partie de l'équilibre de Nash du sous-jeu et la firme installée a intérêt à l'exécuter effectivement.
- $\Rightarrow$ Si ce qui se passe avant le jeu (menace, communication, etc.) doit **changer l'ensemble des équilibres**, il doit se baser sur une menace crédible et **modifier la structure du jeu**.
- Nous devons alors construire le nouveau jeu qui tient compte de cette modification. $\Rightarrow$ la nouvelle version du Jeu de l'entrée adaptée de (Dixit 1982).

Le jeu de l'Entrée III

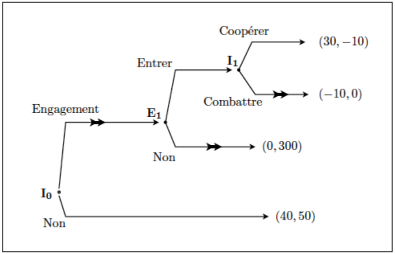
- Possibilité pour la firme installée d'effectuer un investissement **irréversible** avant le début du jeu initial.
- Investissement est parfaitement **observable** par E et I ne peut le rentabiliser que s'il l'utilise pour combattre l'entrée :
  - des capacités qui resteront excédentaires ;
  - campagne de promotion qui ne sera pas pleinement exploitée dans le cas où I ne combat pas l'entrant.


(u_E, u_I)
Coopérer
$(30, -10)$
Entrer
$\mathbf{I_1}$
Combattre
$(-10, 0)$
Engagement
$\mathbf{E_1}$
$(0, 300)$
Non
Coopérer
$(40, 50)$
$\mathbf{I_0}$
Entrer
$\mathbf{I_2}$
Combattre
$(-10, 0)$
$\mathbf{E_2}$
Non
$(0, 300)$
Non



Si **I** choisit de ne pas s'engager dans l'investissement ⇒ le jeu initial dont nous connaissons l'**EPSJ** : **(Entrer, Coopérer).**

⇒ Remplacer cette branche par le résultat de ce sous-jeu.



- *Une flèche (↠) représente les stratégies optimales de chaque joueur, à chacun de ses ensembles d'information.*
- ⇒ L'EPSJ : ((Non/E1, Entrer/E2) , (Engagement, Combattre/I1, Coopérer/I2))
- L'entrée est bien bloquée de manière optimale ⇐ la menace de combattre est maintenant crédible.

Nous connaissons maintenant les conditions sous lesquelles un investissement de la part d'une firme installée peut lui permettre de protéger son marché. Cet investissement doit :

Nous connaissons maintenant les conditions sous lesquelles un investissement de la part d'une firme installée peut lui permettre de protéger son marché. Cet investissement doit :

- être irréversible ;

Nous connaissons maintenant les conditions sous lesquelles un investissement de la part d'une firme installée peut lui permettre de protéger son marché. Cet investissement doit :

- être irréversible ;
- être parfaitement observable par l'entrant potentiel ;

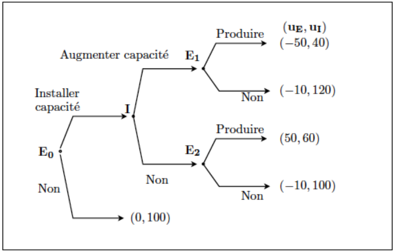
Nous connaissons maintenant les conditions sous lesquelles un investissement de la part d'une firme installée peut lui permettre de protéger son marché. Cet investissement doit :

- être irréversible ;
- être parfaitement observable par l'entrant potentiel ;
- modifier les gains du jeu de marché de manière à crédibiliser la menace de combattre de la firme entrante.

Plan

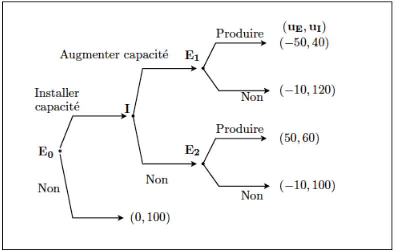
1. Sous-jeux et équilibres parfaits en sous Jeu
2. Paradoxe de la rétroduction
3. Application : une taxinomie des stratégies d'investissement

Jeu de l'entrée 2 en information imparfaite :



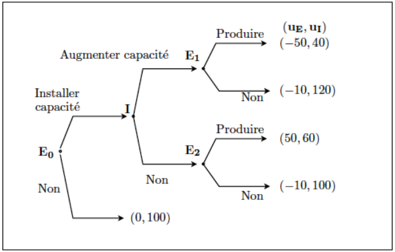
- Cette fois-ci, l'entrant observe le choix de capacité de la firme installée.

Jeu de l'entrée 2 en information imparfaite :



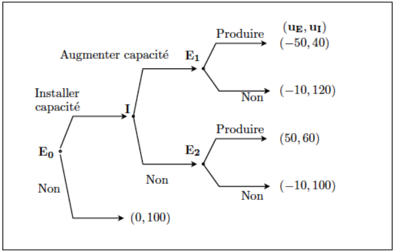
- Cette fois-ci, l'entrant observe le choix de capacité de la firme installée.
- Seul EPSJ : **((N /E0, N /E1, Produire /E2) ,A /I)**

Jeu de l'entrée 2 en information imparfaite :



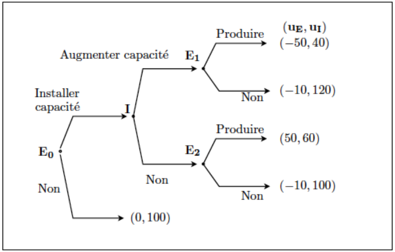
- Cette fois-ci, l'entrant observe le choix de capacité de la firme installée.
- Seul EPSJ : **((N /E0, N /E1, Produire /E2) ,A /I)**
- équilibre soutenu par le fait qu'au nœud **I** la firme installée anticipe le fait que sont choix d'augmenter la capacité sera suivi par le choix optimal de l'entrant potentiel de ne pas produire.

Jeu de l'entrée 2 en information imparfaite :



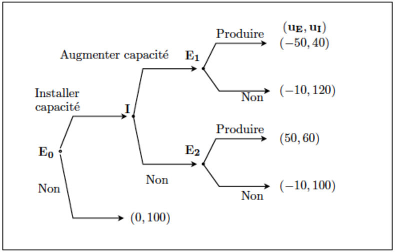
- Cette fois-ci, l'entrant observe le choix de capacité de la firme installée.
- Seul EPSJ : **((N /E0, N /E1, Produire /E2) ,A /I)**
- équilibre soutenu par le fait qu'au nœud **I** la firme installée anticipe le fait que sont choix d'augmenter la capacité sera suivi par le choix optimal de l'entrant potentiel de ne pas produire.
- C'est la réaction qu'elle peut attendre d'un concurrent rationnel.

Jeu de l'entrée 2 en information imparfaite :



- Cette fois-ci, l'entrant observe le choix de capacité de la firme installée.
- Seul EPSJ : **((N /E0, N /E1, Produire /E2) ,A /I)**
- équilibre soutenu par le fait qu'au nœud **I** la firme installée anticipe le fait que sont choix d'augmenter la capacité sera suivi par le choix optimal de l'entrant potentiel de ne pas produire.
- C'est la réaction qu'elle peut attendre d'un concurrent rationnel.
- Mais si son concurrent était rationnel, elle n'aurait pas eu à se poser la question de l'augmentation de la capacité (puisqu'un concurrent rationnel ne serait jamais entré).

Jeu de l'entrée 2 en information imparfaite :



- Cette fois-ci, l'entrant observe le choix de capacité de la firme installée.
- Seul EPSJ : **((N /E0, N /E1, Produire /E2) ,A /I)**
- équilibre soutenu par le fait qu'au nœud **I** la firme installée anticipe le fait que sont choix d'augmenter la capacité sera suivi par le choix optimal de l'entrant potentiel de ne pas produire.
- C'est la réaction qu'elle peut attendre d'un concurrent rationnel.
- Mais si son concurrent était rationnel, elle n'aurait pas eu à se poser la question de l'augmentation de la capacité (puisqu'un concurrent rationnel ne serait jamais entré).
- **le paradoxe de la rationalité**

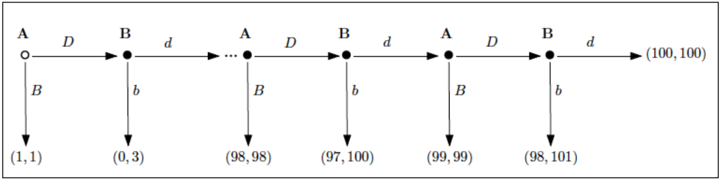
Si le nœud auquel on considère les choix ne peut être atteint que comme résultat des choix erronés, comment peut-on supposer que le concurrent va jouer de manière rationnelle dans la suite du jeu ?

- Cette possibilité d'incohérence peut conduire parfois à des résultats surprenants.

L'application de la rétroduction det l'EPSJ se base sur des choix optimaux dans tous les sous-jeux.

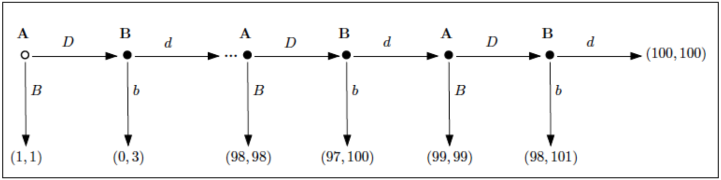
- Est-ce que cela implique que le résultat de l'EPSJ est nécessairement socialement optimal ?
- La réponse est négative.
- Comme pour les équilibres de Nash, il n'y a aucune raison pour que l'EPSJ nous conduise à un optimum de Pareto.

Le jeu du mille-pattes de Rosenthal (1980)



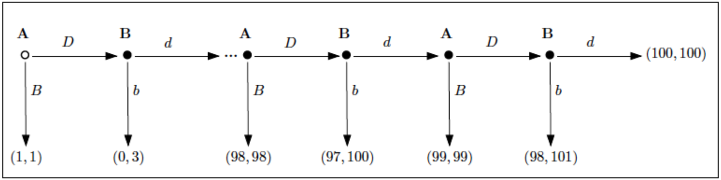
- Appliquons la rétroduction à ce jeu :

Le jeu du mille-pattes de Rosenthal (1980)



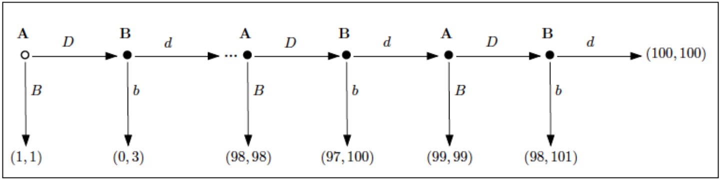
- Appliquons la rétroduction à ce jeu :
- à la dernière étape, **B** choisit **b** puisque $101 > 100$

Le jeu du mille-pattes de Rosenthal (1980)



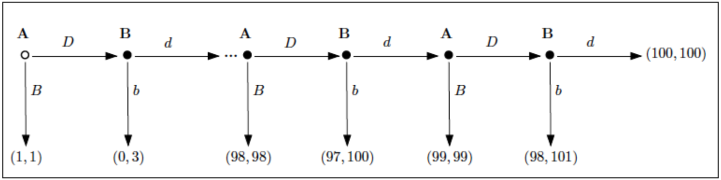
- Appliquons la rétroduction à ce jeu :
- à la dernière étape, **B** choisit **b** puisque $101 > 100$
- Alors **A** choisit **B** puisque $99 > 98$.

Le jeu du mille-pattes de Rosenthal (1980)



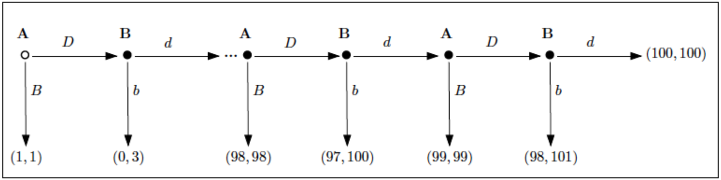
- Appliquons la rétroduction à ce jeu :
- à la dernière étape, **B** choisit **b** puisque $101 > 100$
- Alors **A** choisit **B** puisque $99 > 98$.
- ...

Le jeu du mille-pattes de Rosenthal (1980)



- Appliquons la rétroduction à ce jeu :
- à la dernière étape, **B** choisit **b** puisque $101 > 100$
- Alors **A** choisit **B** puisque $99 > 98$.
- ...
- Anticipant ces choix, à la première étape, *A choisit B*.

Le jeu du mille-pattes de Rosenthal (1980)



- Appliquons la rétroduction à ce jeu :
- à la dernière étape, **B** choisit **b** puisque $101 > 100$
- Alors **A** choisit **B** puisque $99 > 98$.
- ...
- Anticipant ces choix, à la première étape, *A choisit B*.
- l'EPSJ $\Rightarrow$ les gains $(1,1) \leq_i (100,100)$, $i = A, B$.

- L'équilibre de ce jeu correspond à la pire des situations du point de vue social.
- Expériences $\Rightarrow$ cet équilibre sort très rarement.
- $\Rightarrow$ Au moins au début du jeu, les joueurs choisissent D et d plutôt que B et b.
- Ces joueurs seraient-ils irrationnels ?
- Question : Que penserait B s'il observe que A choisit D à la première étape ?

NB

- le joueur A peut donner un signal à B en vue de modifier ses choix futurs.
- Ce raisonnement est à la base de d'une approche des équilibres d'un jeu séquentiel bien différente de la rétroduction : l'*induction projective* (forward induction).

Plan

1. Sous-jeux et équilibres parfaits en sous Jeu
2. Paradoxe de la rétroduction
3. Application : une taxinomie des stratégies d'investissement

- Les modèles de type Stackelberg (dont le modèle de Dixit) ⇒ la firme installée peut s'engager dans un investissement irréversible.
- ⇒ Valeur stratégique que si et seulement s'il influence les comportements du concurrent.
- ⇒ Un cadre à deux périodes où ces influences seront étudiées plus en détail (Jeu d'investissement).

stratégies complémentaires et substituables

- Un jeu simultané entre deux agents ;
- les actions a_i appartiennent à l'ensemble des nombres réels ;
- Les fonctions de profits $\Pi_i(a_i, a_j)$ deux fois continûment différentiables et strictement concaves en a_i.

$\Rightarrow$ Les conditions suffisantes pour l'équilibre de Nash :

$$\frac{\delta \Pi_i}{\delta a_i}(a_i^*, a_j^*) = 0 \forall i \neq j$$

$R_i(a_j)$: la meilleure réponse de la firme i quand son concurrent choisit a_j :

$$\frac{\delta \Pi_i}{\delta a_i}(R_i(a_j), a_j) = 0.$$

Si solution intérieure $\rightarrow a_i = R_i(a_j)$ est unique du fait de la stricte concavité et c'est la fonction de réaction de la firme i.

Un **équilibre de Nash** de ce jeu : une paire de stratégies(a_i^*, a_j^*) telle que $a_i^* = R_i(a_j),\ i \neq j = 1, 2.$

La pente de la fonction de réaction joue un rôle important dans la détermination de l'équilibre.

Différentiant l'équation précédente donne :

$$R_i'(a_j) = \frac{\delta^2 \Pi_i / \delta a_i \delta a_j}{-\delta^2 \Pi_i / (\delta a_i)^2}$$

$$\Rightarrow sgn(R_i'(a_j)) = sgn(\frac{\delta^2 \Pi_i}{\delta a_i \delta a_j}$$

La pente de la courbe de réaction dépend donc de la dérivée seconde croisée du profit de la firme i.

Cette dérivée traduit l'influence de l'action de j sur le profit marginal de i.

La courbe de réaction est croissante si

$$\frac{\delta^2 \Pi_i}{\delta a_i \delta a_j} > 0$$

Les actions des deux firmes sont alors des **stratégies complémentaires** : à partir d'une situation où $\frac{\delta \Pi_i}{\delta a_i} = 0$,

$$a_j \nearrow \Rightarrow \frac{\delta \Pi_i}{\delta a_i} > 0 \Rightarrow a_i = R(a_j) \nearrow$$

pour atteindre à nouveau $\frac{\delta \Pi_i}{\delta a_i} = 0$.

Elle est décroissante si

$$\frac{\delta^2 \Pi_i}{\delta a_i \delta a_j} < 0$$

Les actions des deux firmes sont des **stratégies substituables** : à partir d'une situation où $\frac{\delta \Pi_i}{\delta a_i} = 0$,

$$a_j \nearrow \Rightarrow \frac{\delta \Pi_i}{\delta a_i} < 0 \Rightarrow R(a_j) \searrow$$

pour atteindre à nouveau $\frac{\delta \Pi_i}{\delta a_i} = 0$.

- prix : souvent des stratégies complémentaires.
- quantités : des stratégies substituables.

Courbes de réaction