

# Équilibre de Nash et Stratégies Mixtes dans le Sport de Compétition

MIF33 — Théorie des Jeux

TD 2

## 1 La fureur de vivre

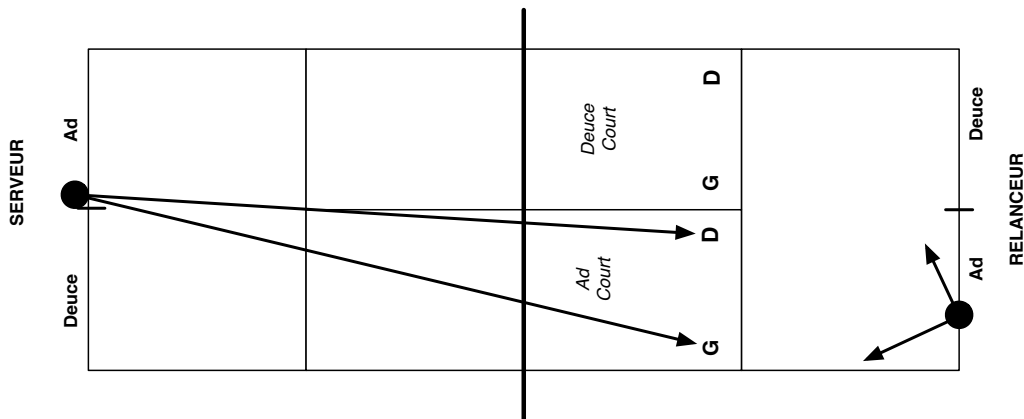
Deux conducteurs ( $A$  et  $B$ ) dirigent leur voiture l'une contre l'autre dans une rue trop étroite pour qu'elles puissent se croiser sans provoquer d'accident. Si un conducteur ralentit tandis que l'autre garde la même vitesse, il perd la face : il obtient alors une utilité de 0 et son adversaire obtient 4. Si les deux ralentissent en même temps, alors le jeu se termine en égalité et les deux obtiennent une utilité de 2. Si aucun ne ralentit alors l'accident arrive et chacun obtient une utilité de  $-2$ .

1. Précisez l'ensemble des joueurs et l'ensemble de stratégies de chaque joueur.
2. Donnez la forme normale du jeu.
3. Déterminez les équilibres de Nash en stratégies pures du jeu, (la stratégie mixte avec une solution constructive sera abordée la prochaine fois)

## 2 Le jeu du service au Tennis

La première étude mobilisant des observations sur les sportifs afin d'évaluer la pertinence du concept d'équilibre en stratégies mixtes est due à Walker et Wooders (2001). Nous allons reprendre point par point cette étude.

Dans cette étude les auteurs s'intéressent au tennis, et plus précisément, au jeu stratégique que constitue le service. En effet, lors d'un service, deux joueurs (le serveur et le relanceur) sont engagés dans une interaction stratégique. Le gain issu du jeu pour chaque joueur se ramène à la probabilité de gagner le point. Le serveur doit choisir entre deux stratégies : servir croisé ou servir décroisé. Compte tenu de la vitesse de la balle de service (bien souvent, plus de 200 km/h), le relanceur est obligé d'anticiper, ce qui l'amène, lui aussi à jouer soit *croisé* s'il anticipe un service croisé, soit *décroisé* s'il anticipe un service décroisé. Ainsi, on peut considérer que les deux joueurs *jouent simultanément*. Les choix sont résumés dans la figure suivante.



- Suivant la terminologie utilisée dans la figure, les stratégies sont définies de la manière suivante :
- lorsque le serveur sert côté « avantage » (*Ad*), il joue sur la gauche du relanceur (G) lorsqu’il croise alors qu’il joue sur la droite du relanceur (D) lorsqu’il décroise ;
  - lorsque le serveur sert du côté « égalité » (*Deuce*), il joue sur la gauche du relanceur (G) lorsqu’il décroise alors qu’il joue sur la droite du relanceur (D) lorsqu’il croise ;
  - dans tous les cas, le relanceur se place au milieu et choisit d’anticiper sur sa gauche (G) ou sur sa droite (D).

Dans ce jeu les gains des joueurs dans les différentes configurations se ramènent à la probabilité de gagner le point. Sur la base de statistiques des grands matches professionnels, les valeurs sont généralement proches de celles présentées dans le tableau suivant qui représente la forme normale du jeu :

|         |   | Relanceur |         |
|---------|---|-----------|---------|
|         |   | G         | D       |
| Serveur | G | (58,42)   | (79,21) |
|         | D | (73,27)   | (49,51) |

- **Quelles sont vos premières constatations sur ce tableau ?**
- **Quel est l’équilibre de Nash de ce jeu ?**
- Quelles prédictions peut-on faire à partir de ce jeu ?

Walker et Wooders étudient dix grandes finales de tournois du Grand Chelem ou du Masters. Le tableau suivant donne les résultats agrégés pour l’ensemble de ces dix matches :

|                            |          |           |
|----------------------------|----------|-----------|
| Service                    | G        | 1622      |
|                            | D        | 1404      |
|                            | Total    | 3026      |
| Service en %               | G        | 54        |
|                            | D        | 46        |
| Points gagnés              | G        | 1040      |
|                            | D        | 918       |
| Taux de points gagnés en % | <b>G</b> | <b>64</b> |
|                            | <b>D</b> | <b>65</b> |

- **Que remarquez vous ?**
- **Quelles sont les limites de l’étude ?**

### 3 Le jeu du penalty

Le même type d’étude a été mené sur les *penalties* au football par Chiappori, Levitt et Groseclose (2002) et par Palacios-Huerta (2003). Comme le service au tennis, le penalty au football est une situation simple d’interaction stratégique entre deux joueurs (le tireur et le gardien) ayant les caractéristiques d’un jeu à somme constante (existence d’un unique équilibre de Nash). Considérons, de manière symétrique au tennis, que les joueurs aient deux stratégies. Le tireur peut choisir de tirer sur sa droite (D) ou sur sa gauche (G). Compte tenu de la force de frappe du tireur, le ballon met environ 3 dixièmes de seconde pour arriver sur la ligne de but ! Par conséquent, le gardien doit anticiper un tir à droite (D) ou un tir à gauche (G). Autrement dit, il s’agit bien d’un jeu simultané, les deux joueurs ignorant le choix de l’autre au moment de faire le leur.

Dans ce jeu, le gain du tireur correspond à la probabilité d’inscrire un but alors que celui du gardien est simplement la probabilité complémentaire (la probabilité que le tireur échoue). Sur la base de 1417 tirs de penalty analysés par Palacios-Huerta, les valeurs des gains sont celles présentées dans le tableau suivant :

|        |   | Gardien        |                |
|--------|---|----------------|----------------|
|        |   | G              | D              |
| Tireur | G | (58.30, 41.70) | (94.97, 5.03)  |
|        | D | (92.91, 7.09)  | (69.92, 30.08) |

– **Déterminez l'unique équilibre de Nash.**

Les données de Palacios-Huertas concernent 1417 penalties tirés dans les matchs des championnats espagnols, italiens ou anglais. Le tableau suivant rapporte au niveau agrégé les stratégies observées.

| Tireur |       | Gardien |       |
|--------|-------|---------|-------|
| G (%)  | D (%) | G (%)   | D (%) |
| 39.98  | 60.02 | 42.31   | 57.69 |

– **Ces observations sont-elles proches des prédictions théoriques ?**

Pour un joueur donné, le concept de stratégie mixtes implique qu'il doit avoir le même taux de réussite sur les deux stratégies pures. Prenons le cas de Zinédine Zidane, sur 40 penalties, il a tiré 19 fois à gauche (14 réussis) et 21 fois à droite (16 réussis).

– **Zinédine Zidane serait-il un excellent théoricien des jeux ?**

## Remarques et Conclusions

Notons que Palacio-Huerta montre également que les décisions des joueurs sont bien aléatoires et que, par conséquent, les choix présents sont indépendants des choix passés. Ainsi, contrairement à ce qui est observé dans l'étude sur le tennis de Walker et Wooders (2001), la seconde implication de l'équilibre de Nash en stratégie mixte (décision aléatoire) est également vérifiée.

Quelle conclusion peut-on tirer de l'ensemble de ces observations sur le sport de compétition ? Les expériences classiques en laboratoire montrent que les sujets novices n'adoptent pas les stratégies optimales dans les jeux en équilibre en stratégies mixtes alors les études de cas montrent que les sportifs professionnels (tennismen, footballeurs, etc.) trouvent, eux, la stratégie d'équilibre. Sur le spectre de l'expertise, on trouve à l'extrémité les novices (les sujets des expériences) pour lesquels la théorie ne marche pas, et à l'autre, les sportifs professionnels, pour lesquels la théorie semble correctement s'appliquer. Bien entendu, la majorité des jeux à somme constante « réels » se déroulent dans un contexte intermédiaire entre ces deux cas polaires ; or on sait très peu de choses sur ces cas « intermédiaires ».