

LIF10 – FONDEMENTS DES BASES DE DONNÉES

TD3 – fermeture d'un ensemble d'attributs

Licence informatique – Automne 2014–2015

Les questions marquées du symbole (†) sont à préparer pour la séance

Algorithme 1: fermeture d'un ensemble d'attributs par des dépendances fonctionnelles

Data : Σ un ensemble de DF, X un ensemble d'attributs.

Result : X^+ , la fermeture de X par Σ .

```
1 unused :=  $\Sigma$ 
2 closure :=  $X$ 
3 repeat
4   closure' := closure;
5   if  $W \rightarrow Z \in \textit{unused}$  and  $W \subseteq \textit{closure}$  then
6     unused := unused -  $\{W \rightarrow Z\}$ ;
7     closure := closure  $\cup$   $Z$ ;
8 until closure' = closure;
9 return closure;
```

Exercice 1 : inférence de dépendances (†)

Soit Σ l'ensemble des dépendances suivantes

$BC \rightarrow A$	$D \rightarrow BE$
$AC \rightarrow B$	$B \rightarrow DE$
$AE \rightarrow C$	$C \rightarrow E$

- (†) En utilisant les règles le système d'Armstrong augmenté des règles de composition et décomposition, prouver que les DF suivantes appartiennent à $\Sigma^+ = \{f \mid \Sigma \models f\}$:
 - (†) $AD \rightarrow C$
 - (†) $AB \rightarrow C$
 - (†) $AE \rightarrow BD$
 - $AC \rightarrow D$
 - $CD \rightarrow A$
- Même question en calculant la fermeture des parties gauches à partir de l'algorithme de fermeture.

Exercice 2 : correction de l'algorithme (†)

On rappelle qu'une preuve de $X \rightarrow Y$ à partir de Σ notée $\Sigma \vdash X \rightarrow Y$ est une *séquence* $\langle f_0, \dots, f_p \rangle$ de DFs telle que $f_p = X \rightarrow Y$ et $\forall i \in [0..p]$ on a soit $f_i \in \Sigma$, soit f_i est la conséquence de l'application d'une des règles d'Armstrong dont toutes les prémisses $f_0 \dots f_p$ apparaissent avant f_i dans la séquence. On donne le lemme

$$\Sigma \vdash X \rightarrow Y \text{ ssi } Y \subseteq X^*$$

Cet exercice a pour objectif de montrer que l'algorithme donné calcule bien $X^* = \{A \mid \Sigma \vdash X \rightarrow A\}$ à partir de X et Σ donnés. Pour cela, on considère la trace de l'algorithme définie comme une séquence $\langle X_0 \dots X_n \rangle$ de longueur maximale telle que $X_0 = X$, $X_i \subseteq X_{i+1}$ et $X_{i+1} = X_i \cup Z$ avec $W \rightarrow Z \in \Sigma$ et $W \subseteq X_i$. Notons que l'on fait abstraction du maintien de *unused* et *closure'* par soucis de simplification.

1. (†) Montrer par récurrence sur la longueur de la trace que $X_n \subseteq X^*$. Pour l'étape de récurrence $X_i \subseteq X^*$, pour $A \in X_{i+1}$ on considèrera les cas $A \in X_i$ ou $A \notin X_i$ en on utilisera le lemme.
2. Conclure que $X_n \subseteq \{A \mid \Sigma \vdash X \rightarrow A\}$.
3. Prouver par induction que $X \subseteq Y$ implique $X_n \subseteq Y_n$.
4. Prouver par induction sur la longueur d'une preuve de $\Sigma \vdash X \rightarrow Y$ que $X^* \subseteq X_n$. Pour l'induction on procède cas par cas pour chaque règle d'Armstrong (utiliser la proposition précédente).
5. Conclure sur la correction de l'algorithme.

Exercice 3 : fermeture algébrique

En algèbre abstraite on appelle fermeture une application $\phi : \wp(E) \rightarrow \wp(E)$ qui soit :

- *extensive* $X \subseteq \phi(X)$
- *croissante* $X \subseteq Y \Rightarrow \phi(X) \subseteq \phi(Y)$
- *idempotente* $\phi(\phi(X)) = \phi(X)$

1. Justifier que la fermeture X^+ est bien nommée. On utilisera la correction de l'algorithme.
2. En vous appuyant sur les propriétés précédentes calculer l'ensemble des fermés pour l'ensemble des dépendances Σ défini dans l'exercice 1, i.e., éviter d'énumérer des éléments « inutiles » parmi les $2^{|ABCDE|}$ solutions possibles.