Lif10 – Fondements des bases de données
TD4 – fermeture d'un ensemble d'attributs

Licence informatique – Automne 2014–2015

Les questions marquées du symbole (†) sont à préparer pour la séance

Exercice 1 : dépendances fonctionnelles satisfaites par une instance (†)

Soit la relation de la table 1 dans laquelle ont indique pour chaque employé sont numéro, le numéro de son département, l'année d'entrée de l'employé dans le département, le nom du département en question et le numéro du responsable.

1. (†) Écrire la liste de toutes les DF que vous pouvez trouver. Proposer une méthode pour ne pas en oublier.
2. Indiquer à votre avis quelles sont les DFs précédentes qui n'ont pas d'interprétation naturelle vis-à-vis des données.

	A	B	C	D	E
t_1	1	1	85	Biochimie	5
t_2	1	5	94	Admission	12
t_3	2	2	92	Informatique	2
t_4	3	2	98	Informatique	2
t_5	4	3	98	Géophysique	2
t_6	5	1	75	Biochimie	5
t_7	6	5	88	Admission	12

Table 1 – Affectation des employés à un département

Exercice 2 : dépendances fonctionnelles et logique propositionnelle ([1])

Dans cet exercice on va s'intéresser au lien entre les dépendances fonctionnelles $X \to Y$ et les formules de la logique propositionnelle classique de la forme $X \Rightarrow Y$ pour montrer que la correspondance entre les notations n'est pas simplement superficielle.

Soit Σ un ensemble de DFs sur un schéma $\mathbf{R}$. A chaque attribut $A \in \mathbf{R}$ on associe une *variable propositionnelle* $\underline{A} \in \mathcal{P}$. On étend cette transformation aux DFs en faisant correspondre à une DF $A_1 \dots A_p \to B_1 \dots B_q \in \Sigma$ la formule de logique propositionnelle $\underline{A}_1 \wedge \dots \wedge \underline{A}_p \Rightarrow \underline{B}_1 \wedge \dots \wedge \underline{B}_q$ sur l'ensemble de propositions $\mathcal{P}$. Enfin, on note $\underline{\Sigma}$ l'ensemble de formules logiques correspondant aux DFs de Σ en étendant la transformation à un ensmeble de dépendances. Soit $\alpha = A_1 \dots A_p \to B_1 \dots B_q$ une DF. On va montrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes :

$$\Sigma \models \alpha \tag{1}$$

$$\Sigma \models_2 \alpha \tag{2}$$

$$\underline{\Sigma} \models_P \underline{\alpha} \tag{3}$$

Dans ces formules, $\Sigma \models \alpha$ désigne l'implication logique entre un ensemble de DFs et une DF, $\Sigma \models_2 \alpha$ désigne l'implication logique de DFs limitée *aux relations ne contenant que deux tuples*, autrement dit $\Sigma \models_2 \alpha \equiv \forall r.(|r| = 2 \wedge r \models \Sigma) \Rightarrow r \models \alpha$. Enfin, $\underline{\Sigma} \models_P \underline{\alpha}$ désigne l'implication logique classique, c'est-à-dire, que pour toute valuation des variables propositionnelles $\nu : \mathcal{P} \to \{0, 1\}$ telle que $\nu \models \underline{\Sigma}$ on a aussi $\nu \models \underline{\alpha}$. On donne le lemme suivant :

Lemme 1. *Soient $\nu : \mathcal{P} \to \{0, 1\}$ une valuation des variables propositionnelles, $r = \{t_1, t_2\}$ la relation à deux tuples tels que $t_1[A] = 1$ et $t_2[A] = \nu(\underline{A})$ pour tout $A \in \mathbf{R}$ et $\alpha = A_1 \dots A_p \to B_1 \dots B_q$ une dépendance arbitraire. Alors on a $\nu \models_P \underline{\alpha}$ si et seulement si $r \models \alpha$.*

1. Montrer que la proposition (1) est équivalente à la proposition (2). Pour le sens (2) $\Rightarrow$ (1) on procédera par l'absurde en montrant que supposer $\Sigma \models_2 \alpha$ et $\Sigma \not\models \alpha$ conduit à une contradiction.
2. Montrer le lemme 1 en construisant une relation à deux tuples « à la Armstrong » à partir d'une interprétation ν donnée et vice-versa.
3. Montrer que la proposition (3) est équivalente à la proposition (2) en utilisant le lemme 1. Procéder par l'absurde pour les deux implications.
4. Conclure.