Fondements des bases de données

Couvertures d'ensembles de dépendances fonctionnelles

Équipe pédagogique BD

https://perso.liris.cnrs.fr/marc.plantevit/doku/doku.php?id=lifbdw2_2020a

Version du 25 septembre 2020

La notion de couverture est une relation d'équivalence entre des ensembles de contraintes.

Couverture d'un ensemble de DFs

Soit Σ et Γ deux ensembles de DFs, Γ est une couverture de Σ *ssi*

$$\Gamma^+ = \Sigma^+$$

- Une couverture d'un ensemble de DF est donc une représentation alternative
- Mais qui possède exactement la même sémantique.
- C'est exactement le même ensemble de DF qui est implicite.
- On a intérêt à choisir de bons représentants au sein des classes.

Propriétés des couvertures

- un ensemble F de DF est dit non redondant s'il n'existe pas de couverture G de F telle que $G \subseteq F$ avec $G \neq F$.
- un ensemble F de DF est dit minimum s'il n'existe pas de couverture G de F tel que $|G| \leq |F|$.
- F est dit optimal s'il n'existe pas de couverture G de F avec moins d'attributs que dans F.

Propriétés immédiates [1]

- une couverture minimum est non redondante ;
- une couverture optimum est minimum.

1. On utilise souvent aussi la contraposée de chaque implication.

Algorithme : couverture minimum

Data: F un ensemble de DF
Result: G une couverture minimum de F

$G := \emptyset$
for $X \to Y \in F$ **do**
  $G := G \cup \{X \to X^+\}$
end
for $X \to X^+ \in G$ **do**
  if $G - \{X \to X^+\} \vdash X \to X^+$ **then**
    $G := G - \{X \to X^+\}$
  end
end
return G

- Cet algorithme est polynomial dans le nombre de DF dans F et le nombre d'attributs dans F.
- La couverture minimum calculée par l'algorithme n'est pas forcément unique : d'autres couvertures peuvent avoir le même nombre de DF, mais être différentes.
- Parmi celles-ci, certaines sont optimum ; malheureusement, leur calcul est un problème difficile dans le cas général (NP-Complet).

Exemple

$$F = \left\{ \begin{array}{lll} AB \rightarrow C & C \rightarrow A & BC \rightarrow D \\ ACD \rightarrow B & D \rightarrow EF & ABE \rightarrow C \\ CF \rightarrow BD & CE \rightarrow AF & \end{array} \right\}$$

1. A partir des df $X \rightarrow Y$ de F, construire G l'ensemble des règles de la forme $X \rightarrow X^+$.
   - $AB \rightarrow AB^+ = ABCDEF = R$
   - $C \rightarrow C^+ = AC$
   - $BC \rightarrow BC^+ = R$
   - $ACD \rightarrow ACD^+ = R$
   - $D \rightarrow D^+ = DEF$
   - $ABE \rightarrow ABE^+ = R$
   - $CF \rightarrow CF^+ = R$
   - $CE \rightarrow CE^+ = R$

Supprimer de G les règles inutiles ;

G	
	$AB \to AB^+ = ABCDEF = R$
	$C \to C^+ = AC$
	$BC \to BC^+ = R$
	$ACD \to ACD^+ = R$
	$D \to D^+ = DEF$
	$ABE \to ABE^+ = R$
	$CF \to CF^+ = R$
	$CE \to CE^+ = R$

Supprimer de G les règles inutiles ;

$AB \to AB^+ = ABCDEF = R$ utile ?
Oui si $AB^+_{G \setminus AB \to R} \neq R$.

G	
	$AB \to AB^+ = ABCDEF = R$
	$C \to C^+ = AC$
	$BC \to BC^+ = R$
	$ACD \to ACD^+ = R$
	$D \to D^+ = DEF$
	$ABE \to ABE^+ = R$
	$CF \to CF^+ = R$
	$CE \to CE^+ = R$

- $AB^+ = AB \neq R \Rightarrow AB \to AB^+ = ABCDEF = R$ est utile !

Supprimer de G les règles inutiles ;

$C \rightarrow C^+ = AC$ utile ?

G	
	$AB \rightarrow AB^+ = ABCDEF = R$
	$C \rightarrow C^+ = AC$
	$BC \rightarrow BC^+ = R$
	$ACD \rightarrow ACD^+ = R$
	$D \rightarrow D^+ = DEF$
	$ABE \rightarrow ABE^+ = R$
	$CF \rightarrow CF^+ = R$
	$CE \rightarrow CE^+ = R$

- $C^+ = C \neq AC \Rightarrow C \rightarrow C^+ = AC$ est utile !

Supprimer de G les règles inutiles ;

$BC \to BC^+ = R$ utile ?	
G	
	$AB \to AB^+ = ABCDEF = R$
	$C \to C^+ = AC$
	$BC \to BC^+ = R$
	$ACD \to ACD^+ = R$
	$D \to D^+ = DEF$
	$ABE \to ABE^+ = R$
	$CF \to CF^+ = R$
	$CE \to CE^+ = R$

- $BC^+ = R \Rightarrow BC \to BC^+ = R$ n'est pas utile ! . On la supprime de G.

Supprimer de G les règles inutiles ;

$ACD \to ACD^+ = R$ utile ?

G	
	$AB \to AB^+ = ABCDEF = R$
	$C \to C^+ = AC$
	$ACD \to ACD^+ = R$
	$D \to D^+ = DEF$
	$ABE \to ABE^+ = R$
	$CF \to CF^+ = R$
	$CE \to CE^+ = R$

- $ACD^+ = R \Rightarrow ACD \to R$ n'est pas utile ! . On la supprime de G.

Supprimer de G les règles inutiles ;

$D \rightarrow DEF$ utile ?

G	
	$AB \rightarrow AB^+ = ABCDEF = R$
	$C \rightarrow C^+ = AC$
	$D \rightarrow D^+ = DEF$
	$ABE \rightarrow ABE^+ = R$
	$CF \rightarrow CF^+ = R$
	$CE \rightarrow CE^+ = R$

- $D^+ = D \neq DEF \Rightarrow D \rightarrow DEF$ est utile.

Supprimer de G les règles inutiles ;

$ABE \to R$ utile ?

G	
	$AB \to AB^+ = ABCDEF = R$
	$C \to C^+ = AC$
	$D \to D^+ = DEF$
	$ABE \to ABE^+ = R$
	$CF \to CF^+ = R$
	$CE \to CE^+ = R$

- $ABE^+ = R \Rightarrow ABE \to R$ est inutile. On la supprime

Supprimer de G les règles inutiles ;

$CF \rightarrow R$ utile ?

G	
	$AB \rightarrow AB^+ = ABCDEF = R$
	$C \rightarrow C^+ = AC$
	$D \rightarrow D^+ = DEF$
	$CF \rightarrow CF^+ = R$
	$CE \rightarrow CE^+ = R$

- $CF^+ = ACF \neq R \Rightarrow CF \rightarrow R$ est utile.

Supprimer de G les règles inutiles ;

$CE \to R$ utile ?

G	
	$AB \to AB^+ = ABCDEF = R$
	$C \to C^+ = AC$
	$D \to D^+ = DEF$
	$CF \to CF^+ = R$
	$CE \to CE^+ = R$

- $CE^+ = ACE \neq R \Rightarrow CE \to R$ est utile.

Une[2] couverture G de F est :

G	
	$AB \rightarrow ABCDEF = R$
	$C \rightarrow AC$
	$D \rightarrow DEF$
	$CF \rightarrow R$
	$CE \rightarrow R$

2. Attention, une couverture minimum n'est pas unique.

Exercice

Calculer les couvertures des ensembles suivants

F_1

$$\begin{array}{lll} AB \rightarrow D & C \rightarrow A & BC \rightarrow D \\ D \rightarrow EF & BE \rightarrow C & CF \rightarrow B \\ CE \rightarrow A & CE \rightarrow G & \end{array}$$

F_2

$$\begin{array}{lll} AB \rightarrow C & C \rightarrow A & BC \rightarrow D \\ D \rightarrow EF & BE \rightarrow C & CF \rightarrow B \\ CE \rightarrow F & & \end{array}$$

Calcul d'une couverture canonique

Pour décomposer selon F, on va utiliser un ensemble F' qui soit :

- Couverture de F : $F^+ = F'^+$,
- Minimal : on ne peut pas retirer de DF en préservant toujours la couverture,
- Sans attributs redondants, ni à droite ni à gauche,
- Regroupé : il n'y a pas deux DF avec la même partie gauche.

On a vu des algorithmes qui permettent de produire une telle couverture. Ces étapes sont nécessaires pour assurer que les algorithmes vont bien produire un bon schéma !

Réduction du nombre d'attribut pour un ensemble de DF

```
Data: Un ensemble minimum de DF F sur R.
Min := F
/* Réduction des parties gauches                                    */
for X → Y ∈ Min do
    W := X
    for A ∈ X do
        if Min ⊨ (W − A) → X then  W := W − {A} ;
    end
    Min := (Min − {X → Y}) ∪ {W → Y}
end
/* Réduction des parties droites                                    */
for X → Y ∈ Min do
    W := Y
    for A ∈ Y do
        G := (Min − {X → Y}) ∪ {X → (W − A)}
        if G ⊨ X → Y then  W := W − {A} ;
    end
    Min := (Min − {X → Y}) ∪ {X → W}
end
return Min
```

Exemple de réduction

Soit l'ensemble de DFs Σ[3] :

$$\Sigma = AB \rightarrow ABCDF;\ B \rightarrow BCD;\ DE \rightarrow F;\ E \rightarrow D$$

Couverture minimum G : $\{AB \rightarrow ABCDF;\ B \rightarrow BCD;\ E \rightarrow DEF\}$

- Réduction des parties gauches :

$$Min = AB \rightarrow ABCDF;\ B \rightarrow BCD;\ E \rightarrow DEF$$

- Réduction des parties droites :

$$Min = AB \rightarrow F;\ B \rightarrow CD;\ E \rightarrow DF$$

3. Attention, sur cet exemple, Σ n'est pas une couverture minimum.

Conclusion

Ce qu'il faut retenir

- Couverture d'un ensemble de DFs : une représentation alternative véhiculant la même sémantique.
- Propriétés d'une (bonne) couverture : non redondante, minimum, optimum.
- Algorithme de calcul d'une couverture minimum.
- Algorithme de calcul d'une couverture "canonique" (minimum + réduction parties gauches et droites).

Fin.