# LifBDW2 – Bases de données avancées
## *TD3 – fermeture d'un ensemble d'attributs*

Licence informatique – Automne 2020–2021

*Les questions marquées du symbole (†) sont à préparer pour la séance*

---

**Algorithme 1:** *Closure*$(\Sigma, X)$

---

**Data** : $\Sigma$ un ensemble de DF, $X$ un ensemble d'attributs
**Result** : $X^+$, la fermeture de $X$ par $\Sigma$

```
Cl := X;
done := false;
while (¬done) do
    done := true;
    forall the W → Z ∈ Σ do
        if W ⊆ Cl ∧ Z ⊈ Cl then
            Cl := Cl ∪ Z;
            done := false;
return Cl
```

---

### Exercice 1 : inférence de dépendances (†)

Soit $\Sigma$ l'ensemble des dépendances suivantes

$$
\begin{array}{ll}
BC \rightarrow A & D \rightarrow BE \\
AC \rightarrow B & B \rightarrow DE \\
AE \rightarrow C & C \rightarrow E
\end{array}
$$

1. (†) En utilisant les règles le système d'Armstrong augmenté des règles de composition et décomposition, prouver que les DF suivantes appartiennent à $\Sigma^+ = \{f \mid \Sigma \models f\}$ :
   1. (†) $AD \rightarrow C$
   2. (†) $AB \rightarrow C$
   3. $AE \rightarrow BD$
   4. $AC \rightarrow D$
   5. $CD \rightarrow A$
2. Même question en calculant la fermeture des parties gauches à partir de l'algorithme de fermeture.

## Exercice 2 : fermeture algébrique

On rappelle qu'une preuve de $X \to Y$ à partir de $\Sigma$ notée $\Sigma \vdash X \to Y$ est une *séquence* $\langle f_0, \dots, f_p \rangle$ de DFs telle que $f_p = X \to Y$ et $\forall i \in [0..p]$ on a soit $f_i \in \Sigma$, soit $f_i$ est la conséquence de l'application d'une des règles d'Armstrong dont toutes les prémisses $f_0 \dots f_p$ apparaissent avant $f_i$ dans la séquence. On définit la fermeture syntaxique par $X^\star = \{A \mid \Sigma \vdash X \to A\}$. En algèbre abstraite on appelle *fermeture* une application $\phi : \wp(E) \to \wp(E)$ [1] qui soit :

**Extensive** $X \subseteq \phi(X)$

**Croissante** $X \subseteq Y \Rightarrow \phi(X) \subseteq \phi(Y)$

**Idempotente** $\phi(\phi(X)) = \phi(X)$

1. Justifier que la fermeture $X^\star$ est bien une fermeture au sens algébrique du terme.
2. Prouver que pour tout ensemble d'attributs $Y$, si $X \subseteq Y \subseteq X^+$ alors $Y^+ = X^+$
3. En vous appuyant sur la propriété précédente, calculer l'ensemble des fermés $Cl(\Sigma) = \{X^+ \mid X \subseteq R\}$ pour l'ensemble des dépendances $\Sigma$ défini dans l'exercice 1 en évitant d'énumérer des éléments « inutiles » parmi les $2^5$ possibles.

## Exercice 3 : correction de l'algorithme

On rappelle le lemme $\Sigma \vdash X \to Y$ ssi $Y \subseteq X^\star$. Cet exercice a pour objectif de montrer que l'algorithme donné calcule bien $X^\star$ à partir de $X$ et $\Sigma$ donnés. Pour cela, on considère la trace de l'algorithme définie comme une séquence $\langle X_0 \dots X_n \rangle$ de longueur maximale telle que $X_0 = X$, $X_i \subset X_{i+1}$ et $X_{i+1} = X_i \cup Z$ avec $W \to Z \in \Sigma$ et $W \subseteq X_i$.

1. Montrer par récurrence sur la longueur de la trace que $X_n \subseteq X^\star$. Pour l'étape de récurrence $X_i \subseteq X^\star$, pour $A \in X_{i+1}$ on considèrera les cas $A \in X_i$ ou $A \notin X_i$ en on utilisera le lemme.
2. Conclure que $X_n \subseteq \{A \mid \Sigma \models X \to A\}$.
3. Prouver par induction que $X \subseteq Y$ implique $X_n \subseteq Y_n$.
4. Prouver par induction sur la longueur d'une preuve de $\Sigma \vdash X \to Y$ que $X^\star \subseteq X_n$. Pour l'induction on procède cas par cas pour chaque règle d'Armstrong (utiliser la proposition précédente).
5. Conclure sur la correction de l'algorithme.

1. $\wp(E)$ désigne l'ensemble des parties de $E$, que l'on note parfois $2^E$