

LIF10 – FONDEMENTS DES BASES DE DONNÉES

TD3 – fermeture d'un ensemble d'attributs

Licence informatique – Automne 2016–2017

Les questions marquées du symbole (†) sont à préparer pour la séance

Algorithme 1 : $Closure(\Sigma, X)$

Data : Σ un ensemble de DF, X un ensemble d'attributs

Result : X^+ , la fermeture de X par Σ

```
1  $CI := X$  ;
2  $done := false$  ;
3 while ( $\neg done$ ) do
4    $done := true$  ;
5   forall the  $W \rightarrow Z \in \Sigma$  do
6     if  $W \subseteq CI \wedge Z \not\subseteq CI$  then
7        $CI := CI \cup Z$  ;
8        $done := false$  ;
9 return  $CI$ 
```

Exercice 1 : inférence de dépendances (†)

Soit Σ l'ensemble des dépendances suivantes

$BC \rightarrow A$
 $AC \rightarrow B$
 $AE \rightarrow C$

$D \rightarrow BE$
 $B \rightarrow DE$
 $C \rightarrow E$

- (†) En utilisant les règles le système d'Armstrong augmenté des règles de composition et décomposition, prouver que les DF suivantes appartiennent à $\Sigma^+ = \{f \mid \Sigma \models f\}$:
 - (†) $AD \rightarrow C$
 - (†) $AB \rightarrow C$
 - $AE \rightarrow BD$
 - $AC \rightarrow D$
 - $CD \rightarrow A$
- Même question en calculant la fermeture des parties gauches à partir de l'algorithme de fermeture.

Exercice 2 : fermeture algébrique

On rappelle qu'une preuve de $X \rightarrow Y$ à partir de Σ notée $\Sigma \vdash X \rightarrow Y$ est une *séquence* $\langle f_0, \dots, f_p \rangle$ de DFs telle que $f_p = X \rightarrow Y$ et $\forall i \in [0..p]$ on a soit $f_i \in \Sigma$, soit f_i est la conséquence de l'application d'une des règles d'Armstrong dont toutes les prémisses $f_0 \dots f_p$ apparaissent avant f_i dans la séquence. On définit la fermeture syntaxique par $X^* = \{A \mid \Sigma \vdash X \rightarrow A\}$. En algèbre abstraite on appelle *fermeture* une application $\phi : \wp(E) \rightarrow \wp(E)^1$ qui soit :

Extensive $X \subseteq \phi(X)$

Croissante $X \subseteq Y \Rightarrow \phi(X) \subseteq \phi(Y)$

Idempotente $\phi(\phi(X)) = \phi(X)$

1. Justifier que la fermeture X^* est bien une fermeture au sens algébrique du terme.
2. Prouver que pour tout ensemble d'attributs Y , si $X \subseteq Y \subseteq X^+$ alors $Y^+ = X^+$
3. En vous appuyant sur la propriété précédente, calculer l'ensemble des fermés $Cl(\Sigma) = \{X^+ \mid X \subseteq R\}$ pour l'ensemble des dépendances Σ défini dans l'exercice 1 en évitant d'énumérer des éléments « inutiles » parmi les 2^5 possibles.

Exercice 3 : correction de l'algorithme

On rappelle le lemme $\Sigma \vdash X \rightarrow Y$ ssi $Y \subseteq X^*$. Cet exercice a pour objectif de montrer que l'algorithme donné calcule bien X^* à partir de X et Σ donnés. Pour cela, on considère la trace de l'algorithme définie comme une séquence $\langle X_0 \dots X_n \rangle$ de longueur maximale telle que $X_0 = X$, $X_i \subset X_{i+1}$ et $X_{i+1} = X_i \cup Z$ avec $W \rightarrow Z \in \Sigma$ et $W \subseteq X_i$.

1. Montrer par récurrence sur la longueur de la trace que $X_n \subseteq X^*$. Pour l'étape de récurrence $X_i \subseteq X^*$, pour $A \in X_{i+1}$ on considèrera les cas $A \in X_i$ ou $A \notin X_i$ en on utilisera le lemme.
2. Conclure que $X_n \subseteq \{A \mid \Sigma \models X \rightarrow A\}$.
3. Prouver par induction que $X \subseteq Y$ implique $X_n \subseteq Y_n$.
4. Prouver par induction sur la longueur d'une preuve de $\Sigma \vdash X \rightarrow Y$ que $X^* \subseteq X_n$. Pour l'induction on procède cas par cas pour chaque règle d'Armstrong (utiliser la proposition précédente).
5. Conclure sur la correction de l'algorithme.

1. $\wp(E)$ désigne l'ensemble des parties de E , que l'on note parfois 2^E