



LOGIQUE

Logique des propositions

Algèbre de Boole

Méthodes de simplification des fonctions booléennes

OBJECTIFS

- Traiter formellement les notions de vérité et de fausseté
- Formaliser ce qu'on appelle le « raisonnement logique » ou la « déduction logique »

EXEMPLE

- Tous les mardis je vais au cinéma
- Ce soir je vais au cinéma
- Quel jour sommes-nous ?

UNE ÉNIGME POLICIÈRE

- Un meurtre a été commis au laboratoire, le corps se trouve dans la salle de conférences...
- On dispose des informations suivantes :
 - La secrétaire déclare qu'elle a vu l'ingénieur dans le couloir qui donne sur la salle de conférences
 - Le coup de feu a été tiré dans la salle de conférences, on l'a donc entendu de toutes les pièces voisines
 - L'ingénieur affirme n'avoir rien entendu
- On souhaite démontrer que
si la secrétaire dit vrai, alors l'ingénieur ment

LOGIQUE DES PROPOSITIONS

SYNTAXE

○ On définit :

- Les propositions : a, b, c, \dots
- Les constantes : Vrai et Faux
- Les connecteurs :
 - \wedge (conjonction)
 - \vee (disjonction)
 - \neg (négation)
 - \supset (implication)

CONSTRUCTION D'UNE FORMULE

- Une proposition est une formule
- Si X et Y sont des formules, alors $\neg X$, $X \vee Y$, $X \wedge Y$, $X \supset Y$ sont des formules
- On utilise de plus les parenthèses pour lever des ambiguïtés
- Exemples:
 - $a \wedge (c \vee \neg d)$
 - $(a \vee b) \supset \neg c$

LOGIQUE DES PROPOSITIONS

SÉMANTIQUE

- Les formules sont interprétées dans $\{\text{Vrai}, \text{Faux}\}$
- On définit l'interprétation associée à chaque connecteur grâce aux tables de vérité

L'OPÉRATEUR ET

X	Y	$X \wedge Y$
Vrai	Vrai	Vrai
Vrai	Faux	Faux
Faux	Vrai	Faux
Faux	Faux	Faux

Les deux doivent être vrais
pour que le ET soit vrai

L'OPÉRATEUR OU

X	Y	$X \vee Y$
Vrai	Vrai	Vrai
Vrai	Faux	Vrai
Faux	Vrai	Vrai
Faux	Faux	Faux

Il suffit que l'un des deux soit vrai
pour que le OU soit vrai

L'OPÉRATEUR NON

X	$\neg X$
Vrai	Faux
Faux	Vrai

L'OPÉRATEUR IMPLIQUE

X	Y	$X \supset Y$
Vrai	Vrai	Vrai
Vrai	Faux	Faux
Faux	Vrai	Vrai
Faux	Faux	Vrai

$X \supset Y$ signifie que si X est vrai alors Y est vrai
Le faux implique n'importe quoi

AUTRE DÉFINITION DE L'IMPLICATION

- On peut aussi définir l'implication en disant :
$$X \supset Y = \neg X \vee Y$$
- On retrouve la même table de vérité :

X	Y	$\neg X$	$\neg X \vee Y$
Vrai	Vrai	Faux	Vrai
Vrai	Faux	Faux	Faux
Faux	Vrai	Vrai	Vrai
Faux	Faux	Vrai	Vrai

DÉFINITION DE L'ÉQUIVALENCE

- $X \Leftrightarrow Y = (X \supset Y) \wedge (Y \supset X)$
- X est une **condition nécessaire et suffisante** pour Y, et on dit X **si et seulement si** Y
- Y est une condition nécessaire et suffisante pour X, et on dit Y si et seulement si X

CONDITIONS NÉCESSAIRES ET SUFFISANTES

- Lorsqu'on écrit $X \supset Y$:
 - X est une **condition suffisante** de Y, et on dit **X seulement si Y**
 - Y est une **condition nécessaire** de X, et on dit **Y si X**
- Dérivable \supset continue
 - Si une fonction est dérivable alors elle est continue
 - Mais une fonction continue n'est pas nécessairement dérivable
- Mardi \supset cinéma – (*Tous les mardis je vais au cinéma*)
 - Si on est mardi, alors je vais au cinéma
 - Mais si je vais au cinéma, on n'est pas nécessairement mardi

DÉFINITION DU OU-EXCLUSIF

- Le OU logique est dit inclusif.
- Le OU exclusif est celui du langage courant : fromage ou dessert.

X	Y	X OU-ex Y
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Le OU-ex est vrai si l'un des deux est vrai **mais pas les deux en même temps** (c'est le contraire de l'équivalence)

PROPRIÉTÉS DES FORMULES

- Une formule est **valide** si elle est toujours vraie (quelque soit l'interprétation)
- Une formule est **consistante** s'il existe une interprétation dans laquelle elle est vraie. Elle est **inconsistante** dans le cas contraire
- Problème : étant donnée une formule est-elle valide ? consistante ?
- Exemple : que dire de la formule $(a \supset b) \supset (\neg b \supset \neg a)$

DRESSONS LA TABLE DE VÉRITÉ

a	b	$a \supset b$	$\neg b$	$\neg a$	$\neg b \supset \neg a$	$(a \supset b) \supset (\neg b \supset \neg a)$
V	V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V

CONCLUSION

- Quelles que soient les valeurs de a et b , cette formule est toujours vraie. Elle est donc **valide**.
- On peut montrer également que $(\neg a \supset \neg b) \supset (b \supset a)$
- C'est la **contraposée** des mathématiques

RÈGLES DE TRANSFORMATION (1)

- Toutes les formules qui suivent sont valides. Elles sont utiles pour simplifier des formules. Elles peuvent se démontrer en établissant leurs tables de vérité.
- $X \vee \neg X = V$ (tiers exclu)
- $X \wedge \neg X = F$ (contradiction)
- $\neg \neg X = X$ (involution)
- $X \vee X = X \wedge X = X$ (idempotence)

RÈGLES DE TRANSFORMATION (2)

- $\neg V = F, \quad \neg F = V$
- $F \wedge X = F, \quad V \wedge X = X, \quad F \vee X = X, \quad V \vee X = V$
 - Faux est élément neutre pour le OU et absorbant pour le ET
 - Vrai est élément neutre pour le ET et absorbant pour le OU
- $X \wedge (X \vee Y) = X, \quad X \vee (X \wedge Y) = X$ (absorption)
- $X \vee (\neg X \wedge Y) = X \vee Y$
- $X \supset Y = \neg X \vee Y$

RÈGLES DE TRANSFORMATION (3)

- Lois de De Morgan :

- $\neg(X \vee Y) = \neg X \wedge \neg Y$
- $\neg(X \wedge Y) = \neg X \vee \neg Y$

- $((X \supset Y) \wedge X) \supset Y$ (modus ponens)

- $((X \supset Y) \wedge \neg Y) \supset \neg X$ (modus tollens)

- $(X \supset Y) = (\neg Y \supset \neg X)$ (contraposition)

RÈGLES DE TRANSFORMATION (4)

○ Commutativité et associativité de \vee et \wedge

- $X \vee Y = Y \vee X, \quad X \wedge Y = Y \wedge X$
- $X \vee (Y \vee Z) = (X \vee Y) \vee Z = X \vee Y \vee Z$
- $X \wedge (Y \wedge Z) = (X \wedge Y) \wedge Z = X \wedge Y \wedge Z$

○ Distributivité de \vee par rapport à \wedge et de \wedge par rapport à \vee

- $X \vee (Y \wedge Z) = (X \vee Y) \wedge (X \vee Z), \quad X \wedge (Y \vee Z) = (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z)$

○ Transitivité de \supset

- $((X \supset Y) \wedge (Y \supset Z)) \supset (X \supset Z)$

RÈGLES DE TRANSFORMATION (5)

- $F \supset X = V$

- $V \supset X = X$

- $X \supset F = \neg X$

- $X \supset V = V$

EXEMPLE D'APPLICATION DES RÈGLES DE TRANSFORMATION

$$\begin{aligned}\neg(p \supset q) & \\ &= \neg(\neg p \vee q) \\ &= \neg\neg p \wedge \neg q \\ &= p \wedge \neg q\end{aligned}$$

RETOUR SUR L'ÉNIGME POLICIÈRE

- Un meurtre a été commis au laboratoire, le corps se trouve dans la salle de conférences...
- On dispose des informations suivantes :
 - La secrétaire déclare qu'elle a vu l'ingénieur dans le couloir qui donne sur la salle de conférences
 - Le coup de feu a été tiré dans la salle de conférences, on l'a donc entendu de toutes les pièces voisines
 - L'ingénieur affirme n'avoir rien entendu
- On souhaite démontrer que
si la secrétaire dit vrai, alors l'ingénieur ment

FORMALISATION EN CALCUL DES PROPOSITIONS

- On dispose des informations suivantes :
 - La secrétaire déclare qu'elle a vu l'ingénieur dans le couloir qui donne sur la salle de conférences
 - Le coup de feu a été tiré dans la salle de conférences, on l'a donc entendu de toutes les pièces voisines
 - L'ingénieur affirme n'avoir rien entendu
- On souhaite démontrer que si la secrétaire dit vrai, alors l'ingénieur ment

- p : la secrétaire dit vrai
- q : l'ingénieur était dans le couloir au moment du crime
- r : l'ingénieur était dans une pièce voisine de la salle de conférences
- s : l'ingénieur a entendu le coup de feu
- t : l'ingénieur dit vrai

RÉSOLUTION DE L'ÉNIGME

La secrétaire déclare qu'elle a vu l'ingénieur dans le couloir qui donne sur la salle de conférences :

$$p \supset q \text{ et } q \supset r$$

Le coup de feu a été tiré dans la salle de conférences, on l'a donc entendu de toutes les pièces voisines :

$$r \supset s$$

L'ingénieur affirme n'avoir rien entendu :

$$t \supset \neg s$$

On souhaite démontrer que si la secrétaire dit vrai, alors l'ingénieur ment :

$$(p \supset \neg t)$$

Il s'agit donc de prouver la validité de la formule :

$$(p \supset q \wedge q \supset r \wedge r \supset s \wedge t \supset \neg s) \supset (p \supset \neg t)$$

p : la secrétaire dit vrai

q : l'ingénieur était dans le couloir au moment du crime

r : l'ingénieur était dans une pièce voisine de la salle de conférences

s : l'ingénieur a entendu le coup de feu

t : l'ingénieur dit vrai

DÉMONSTRATION

$$(p \supset q \wedge q \supset r \wedge r \supset s \wedge t \supset \neg s) \supset (p \supset \neg t)$$

- Rappel : $X \supset Y$ est faux si X vrai et Y faux
- La formule ne peut être fausse que si
 - $(p \supset \neg t)$ est faux, soit p et t vrais
 - la prémisse est vraie, soit toutes les implications vraies
- Comme t doit être vrai, s doit être faux, donc r faux, donc q faux, donc p faux
- Il y a donc contradiction
- Donc la formule ne peut pas être fausse

APPLICATIONS DE LA LOGIQUE EN INFORMATIQUE

- **En algorithmique** : nier des conditions, spécifier des invariants, des pré-conditions et des post-conditions
- **En architecture** : réalisation de toute fonction de traitement de code binaire à partir des seules portes logiques binaires OU, ET, NON (électronique numérique)
- **En base de données** : interprétation logique des BD, logique pour l'interrogation des BD, expression des contraintes d'intégrité, BD déductives
- **En Intelligence Artificielle** : représentation des connaissances, systèmes experts

ALGÈBRE DE BOOLE

- En informatique, on utilise plutôt 1 (tension haute) à la place de Vrai, et 0 (tension basse) à la place de Faux

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$
1	1	0	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	0

LES CONNECTEURS EN ALGÈBRE DE BOOLE

- On obtient les relations suivantes :
 - $\neg X = 1 - X$ qu'on notera \bar{X}
 - $X \wedge Y = X \cdot Y$
 - $X \vee Y = \min(X + Y, 1)$ qu'on notera $X + Y$
- On remplace $X \supset Y$ par $\neg X \vee Y$, soit $\bar{X} + Y$

ÉCRITURE DES RÈGLES DE TRANSFORMATION EN ALGÈBRE DE BOOLE (1)

- $X + \bar{X} = 1, \quad X \cdot \bar{X} = 0$ (tiers exclu, contradiction)
- $\overline{\bar{X}} = X, \quad X + X = X, \quad X \cdot X = X$ (involution, idempotence)
- $\bar{0} = 1, \quad \bar{1} = 0$
- $X + 0 = X, \quad X \cdot 0 = 0, \quad X + 1 = 1, \quad X \cdot 1 = X$
(éléments neutres et absorbants)
- $X \cdot (X + Y) = X, \quad X + X \cdot Y = X$ (absorption)
- $X + \bar{X} \cdot Y = X + Y$
- $\overline{X + Y} = \bar{X} \cdot \bar{Y}, \quad \overline{X \cdot Y} = \bar{X} + \bar{Y}$ (De Morgan)

ÉCRITURE DES RÈGLES DE TRANSFORMATION EN ALGÈBRE DE BOOLE (2)

- $X+Y = Y+X, \quad X.Y = Y.X$ (commutativité)
- $X+(Y+Z) = (X+Y)+Z = X+Y+Z$ (associativité)
- $X.(Y.Z) = (X.Y).Z = X.Y.Z$ (associativité)
- $X.(Y+Z) = X.Y+X.Z$ (distributivité)
- $X+Y.Z = (X+Y).(X+Z)$ (distributivité)

FONCTIONS BOOLÉENNES

- En algèbre de Boole, on parle de fonctions booléennes plutôt que de formules.
- Exemple : $F = a(b+\bar{c})+bc\bar{a}$
- On peut aussi définir une fonction booléenne à partir de sa table de vérité

EXEMPLE : UNE FONCTION “MAJORITÉ”

a	b	c	M
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$$M = \bar{a}bc + a\bar{b}c + ab\bar{c} + abc$$

POURQUOI SIMPLIFIER UNE FONCTION BOOLÉENNE ?

- Pour dresser plus facilement sa table de vérité afin de :
 - Déterminer la validité de la fonction
 - La comparer avec une autre fonction
- Pour concevoir un circuit intégré réalisant la fonction avec le moins de portes logiques possible

EXEMPLE À L'AIDE DES RÈGLES DE L'ALGÈBRE DE BOOLE

- Reprenons la fonction “majorité”

$$\begin{aligned}M &= \bar{a}bc + a\bar{b}c + ab\bar{c} + abc \\ &= bc(\bar{a}+a) + a(\bar{b}c + b\bar{c}) \\ &= bc + a(\bar{b}c + b\bar{c})\end{aligned}$$

- Peut-on trouver plus simple ?

DEUXIÈME EXEMPLE

$$\begin{aligned} F &= abc + a(b\bar{c} + \bar{b}c) \\ &= abc + ab\bar{c} + a\bar{b}c \\ &= ab(c + \bar{c}) + a\bar{b}c \\ &= ab + a\bar{b}c \\ &= a(b + \bar{b}c) \\ &= a(b + c) \end{aligned}$$

MÉTHODES DE SIMPLIFICATION DES FONCTIONS BOOLÉENNES

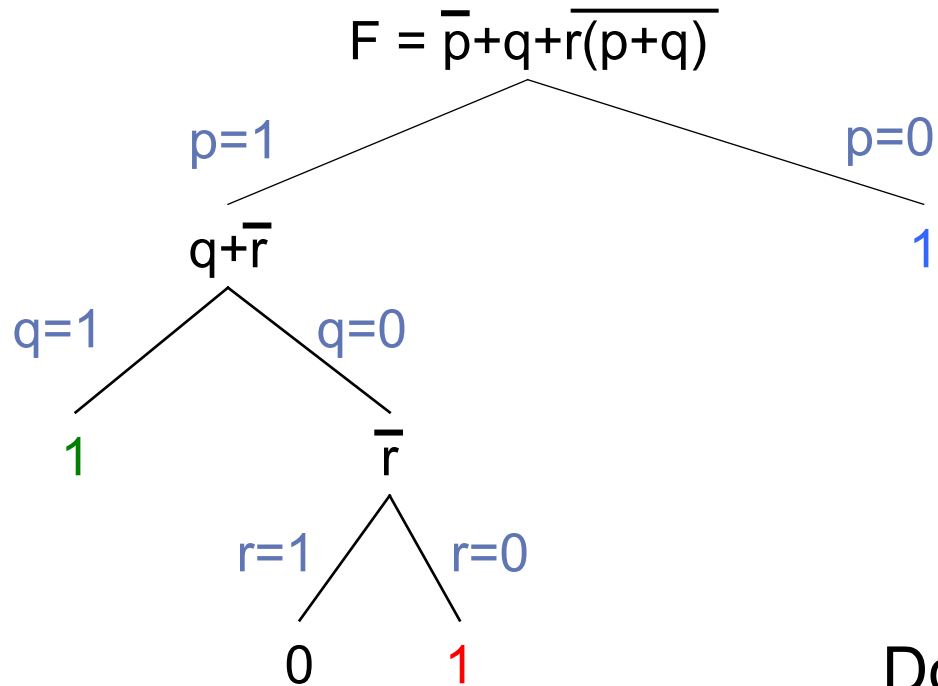
- Deux méthodes permettent de simplifier plus efficacement des fonctions compliquées que la seule application des règles de l'algèbre de Boole.
- Les diagrammes de Quine
- Les tables de Karnaugh

MÉTHODE DES DIAGRAMMES DE QUINE

○ Principe :

- On choisit une des variables qui interviennent le plus souvent dans la fonction booléenne à simplifier
- On considère le cas où elle vaut 0 et le cas où elle vaut 1
- On simplifie les deux expressions obtenues
- On itère le processus sur les deux expressions simplifiées

EXEMPLE



Donc $F = pq + p\bar{q}\bar{r} + \bar{p}$

UTILISATION DES DIAGRAMMES DE QUINE

- Les diagrammes de Quine permettent de mettre une fonction booléenne sous la forme d'une somme de produits.
- Ils permettent aussi de vérifier la validité d'une expression booléenne :
toutes les feuilles sont-elles égales à 1 ?
- Ils sont particulièrement bien adaptés pour des expressions contenant des implications

MÉTHODE DES TABLES DE KARNAUGH

- La fonction doit être en premier lieu exprimée comme une somme de produits.
 - Pour ce faire, on utilise les règles de l'algèbre de Boole ou les diagrammes de Quine.
- On dresse ensuite une table de Karnaugh, qui est une table de vérité à deux dimensions. Sur chaque dimension on peut représenter les valeurs possibles de deux variables.

TABLE DE KARNAUGH À 3 VARIABLES

Entre deux cases adjacentes, seule la valeur d'une variable change

AB \ C	00	01	11	10
0				
1				

REEMPLIR LA TABLE DE KARNAUGH

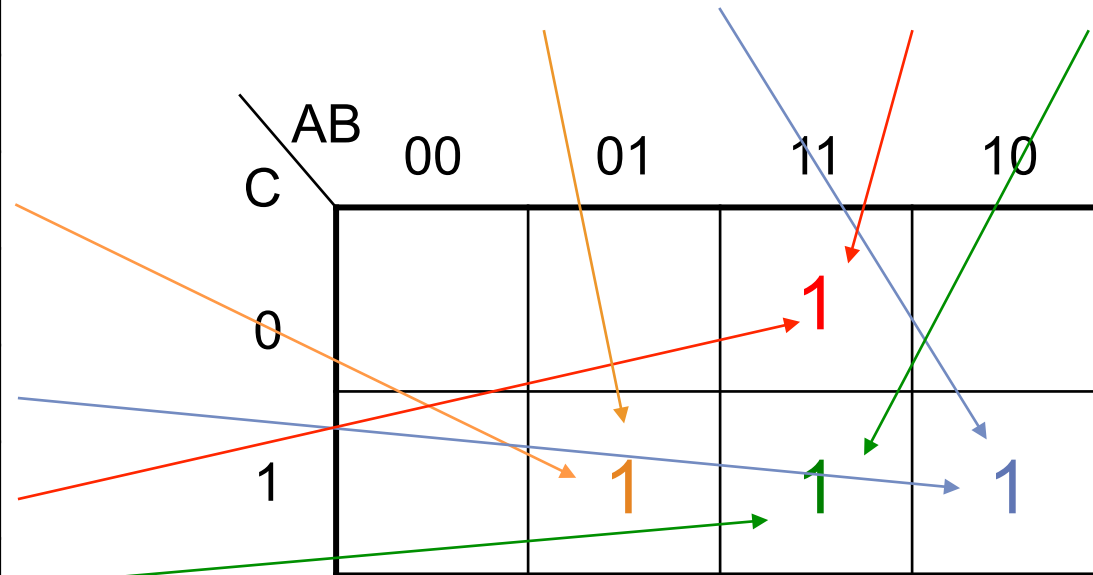
- On met 1 dans une case de la table si la fonction est vraie pour les valeurs des variables correspondant à cette case.
- On procède à des regroupements de 1 adjacents.
- On cherche à effectuer les groupements les plus grands afin de simplifier au maximum.
- Les regroupements sont des rectangles de 2^n termes.

RETOUR SUR LA FONCTION "MAJORITÉ"

1. REMPLIR LA TABLE

a	b	c	M
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$$M = \bar{a}bc + a\bar{b}c + ab\bar{c} + abc$$



RETOUR SUR LA FONCTION "MAJORITÉ"

2. SIMPLIFIER

C \ AB	00	01	11	10
0			1	
1		1	1	1

The Karnaugh map shows the function F(A,B,C) with prime implicants highlighted: a blue box around the cells (0,1) and (1,1) representing BC; a red box around the cells (0,1) and (1,1) representing AB; and an orange box around the cells (1,1) and (1,0) representing AC.

$$\text{Donc } F = BC + AB + AC$$

C'est plus simple que ce que l'on avait trouvé
avec les règles de l'algèbre de Boole

TABLE DE KARNAUGH À 4 VARIABLES

		BA			
		00	01	11	10
DC	00				
	01				
	11				
	10				

EXEMPLES DE SIMPLIFICATION SUR DES TABLES DE KARNAUGH À 4 VARIABLES (1)

	BA			
DC	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	0	1	1	0
11	0	1	1	0
10	0	1	1	0

$$S = A$$

	BA			
DC	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	0	0	0	0
11	0	0	0	0
10	1	1	1	1

$$S = \bar{C}$$

	BA			
DC	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	0	0	0
11	0	0	1	1
10	0	0	1	1

$$S = DB$$



Ici les deux lignes sont bien adjacentes

EXEMPLES DE SIMPLIFICATION SUR DES TABLES DE KARNAUGH À 4 VARIABLES (2)

DC \ BA	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	1	0	0	1
11	1	0	0	1
10	0	0	0	0

$S = C\bar{A}$

DC \ BA	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	0	0	0
11	0	0	0	0
10	1	0	0	1

$S = \bar{C}\bar{A}$

DC \ BA	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	1	1	0
11	0	1	1	0
10	0	0	0	0

$S = CA$

BILAN

	Remplissage	Simplification
Table à 3 variables	Terme à 3 variables → 1 case Terme à 2 variables → 2 cases Terme à 1 variable → 4 cases	2 cases → terme à 2 variables 4 cases → terme à 1 variable
Table à 4 variables	Terme à 4 variables → 1 case Terme à 3 variables → 2 cases Terme à 2 variables → 4 cases Terme à 1 variable → 8 cases	2 cases → terme à 3 variables 4 cases → terme à 2 variables 8 cases → terme à 1 variable

ET POUR 5 VARIABLES ?

		BA			
		00	01	11	10
DC	00				
	01				
	11				
	10				

E= 0

		BA			
		00	01	11	10
DC	00				
	01				
	11				
	10				

E= 1

Si F est la fonction à simplifier,
R1 l'expression obtenue pour la première table
et R2 celle pour la deuxième
Alors $F = E.R1 + E.R2$