

RAPPELS DE LOGIQUE POUR PROLOG

<https://perso.liris.cnrs.fr/marie.lefevre/ens/LIFprolog/>



Logique des propositions

Logique des prédicats

Unification

LOGIQUE DES PROPOSITIONS

SYNTAXE

- On définit :
 - Les propositions : a, b, c, \dots
 - Les constantes : V et F
 - Les connecteurs :
 - \wedge (conjonction)
 - \vee (disjonction)
 - \neg (négation)
 - \supset (implication)

CONSTRUCTION D'UNE FORMULE

- Une proposition est une formule
- Si a et b sont des formules, alors $\neg a$, $a \vee b$, $a \wedge b$, $a \supset b$ sont des formules

LOGIQUE DES PROPOSITIONS

SÉMANTIQUE

- Les formules sont interprétées dans $\{V,F\}$
- On définit l'interprétation associée à chaque connecteur grâce aux tables de vérité

TABLES DE VÉRITÉ DES CONNECTEURS

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \supset B$
V	V	F	V	V	V
V	F	F	F	V	F
F	V	V	F	V	V
F	F	V	F	F	V

PROPRIÉTÉS DES FORMULES

- Une formule est **valide** si elle est toujours vraie (quelque soit l'interprétation)
- Une formule est **consistante** s'il existe une interprétation dans laquelle elle est vraie. Elle est **inconsistante** dans le cas contraire
- Problème : étant donnée une formule, est-elle valide ? consistante ?
- Exemple : que dire de la formule
$$(a \supset b) \supset (\neg b \supset \neg a)$$

DRESSONS LA TABLE DE VÉRITÉ

a	b	$a \supset b$	$\neg b$	$\neg a$	$\neg b \supset \neg a$	$(a \supset b) \supset (\neg b \supset \neg a)$
V	V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V

RÈGLES DE TRANSFORMATION (1)

- $a \vee \neg a$ (loi du tiers exclu)
- $((a \supset b) \wedge a) \supset b$ (modus ponens)
- $((a \supset b) \wedge \neg b) \supset \neg a$ (modus tollens)
- $(a \supset b) \Leftrightarrow (\neg b \supset \neg a)$ (contraposition)
- $\neg \neg a \Leftrightarrow a$ (double négation)
- $a \supset b \Leftrightarrow \neg a \vee b$
- $a \vee a \Leftrightarrow a \wedge a \Leftrightarrow a$ (idempotence)

RÈGLES DE TRANSFORMATION (2)

- Lois de De Morgan :

- $\neg(a \vee b) \Leftrightarrow \neg a \wedge \neg b$
- $\neg(a \wedge b) \Leftrightarrow \neg a \vee \neg b$

- Commutativité et associativité de \vee et \wedge

- Distributivité de \vee par rapport à \wedge
et de \wedge par rapport à \vee

- $X \wedge (X \vee Y) = X$, $X \vee (X \wedge Y) = X$ (absorption)

- $X \vee (\neg X \wedge Y) = X \vee Y$

UNE ÉNIGME POLICIÈRE

- Un meurtre a été commis au laboratoire, le corps se trouve dans la salle de conférences...
- On dispose des informations suivantes :
 - La secrétaire déclare qu'elle a vu l'ingénieur dans le couloir qui donne sur la salle de conférences
 - Le coup de feu a été tiré dans la salle de conférences, on l'a donc entendu de toutes les pièces voisines
 - L'ingénieur affirme n'avoir rien entendu
- On souhaite démontrer que :
si la secrétaire dit vrai, alors l'ingénieur ment

FORMALISATION EN CALCUL DES PROPOSITIONS

- p : la secrétaire dit vrai
- q : l'ingénieur était dans le couloir au moment du crime
- r : l'ingénieur était dans une pièce voisine de la salle de conférences
- s : l'ingénieur a entendu le coup de feu
- t : l'ingénieur dit vrai

RÉSOLUTION DE L'ÉNIGME

- Les informations de l'énoncé se traduisent par les implications :

la secrétaire déclare qu'elle a vu l'ingénieur dans le couloir : $p \supset q$

qui donne sur la salle de conférences : $q \supset r$

le coup de feu a été tiré dans la salle de conférences, on l'a donc entendu de toutes les pièces voisines : $r \supset s$

l'ingénieur affirme n'avoir rien entendu : $t \supset \neg s$

si la secrétaire dit vrai, alors l'ingénieur ment : $p \supset \neg t$

- Il s'agit de prouver la validité de la formule :

$$(p \supset q \wedge q \supset r \wedge r \supset s \wedge t \supset \neg s) \supset (p \supset \neg t)$$

DÉMONSTRATION

$$(p \supset q \wedge q \supset r \wedge r \supset s \wedge t \supset \neg s) \supset (p \supset \neg t)$$

- La formule ne peut être **fausse** que si
 - $(p \supset \neg t)$ est **faux**, i.e. p et t vrais
 - **et la prémisse est vraie**, i.e. toutes les implications vraies
- Comme t doit être vrai, s doit être faux, donc r faux, donc q faux, donc p faux, et il y a contradiction

A	B	$A \supset B$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

LOGIQUE DES PRÉDICATS

SYNTAXE

- On définit :
 - Les constantes : V et F
 - Les connecteurs : $\wedge \vee \neg \supset$
 - Les variables : x, y, z, \dots
 - Les fonctions : f, g, h, \dots
 - Les prédicats : p, q, r, \dots dont ceux d'arité 0 : a, b, c, \dots
 - Les quantificateurs : \forall, \exists

DÉFINITIONS

○ Terme :

- Une variable est un terme
- Une constante est un terme
- Si t_1, t_2, \dots, t_n sont des termes, alors $f(t_1, t_2, \dots, t_n)$ est un terme
- Exemple : $\text{fils}(x)$

○ Atome :

- Si t_1, t_2, \dots, t_n sont des termes, et p un prédicat, alors $p(t_1, t_2, \dots, t_n)$ est un atome
- Exemple : $\text{pere}(x, y)$

CONSTRUCTION D'UNE FORMULE

- V, F sont des formules
- Un atome est une formule
- Si F_1 et F_2 sont les formules, alors $\neg F_1, F_1 \wedge F_2, F_1 \vee F_2, F_1 \supset F_2$ sont des formules
- Si F est une formule, alors $\forall x F$ et $\exists x F$ sont des formules

- Exemples :
 - $\forall x \text{ pere}(x, \text{fils}(x))$
 - $\forall x \forall y \forall z (\text{pere}(x, y) \wedge \text{pere}(y, z)) \supset \text{papy}(x, z)$
- Remarque : la logique des propositions est un cas particulier de la logique des prédicats

EXEMPLES DE FORMULES VALIDES

- $\forall x \neg A \Leftrightarrow \neg \exists x A$

- $\forall x A \Leftrightarrow \neg \exists x \neg A$

- Comment déterminer qu'une formule est valide ?

DÉFINITIONS

○ Littéral

- Un atome est un littéral (positif)
- La négation d'un atome est un littéral (négatif)

○ Une **clause** est une formule qui a la forme d'une disjonction de littéraux

- Exemple : $P(x,y) \vee \neg Q(z)$

○ Une **clause concrète** est une clause sans variable

○ Une **clause de Horn** est une clause comportant au plus un littéral positif

On peut toujours transformer une formule en un ensemble (conjonction) de clauses

PRINCIPE DE RÉOLUTION

- C'est une règle d'inférence qui s'applique aux clauses
- Principe sur des clauses concrètes :
 - $G = G_1 \vee G_2 \vee \dots \vee G_n$
 - $H = \neg G_1 \vee H_2 \vee \dots \vee H_m$
 - $K = G_2 \vee \dots \vee G_n \vee H_2 \vee \dots \vee H_m$
- K est le résolvant de G et H, on peut l'ajouter à la conjonction de clauses
- G_1 et $\neg G_1$ sont des littéraux complémentaires

JUSTIFICATION

$$(P \vee A) \wedge (\neg P \vee B) \\ = (P \wedge B) \vee (A \wedge \neg P) \vee (A \wedge B)$$

$$(P \vee A) \wedge (\neg P \vee B) \wedge (A \vee B) \\ = ((P \wedge B) \vee (A \wedge \neg P) \vee (A \wedge B)) \wedge (A \vee B) \\ = (A \wedge P \wedge B) \vee (A \wedge \neg P) \vee (A \wedge B) \vee (P \wedge B) \vee (A \wedge \neg P \wedge B) \vee (A \wedge B) \\ = (A \wedge B) \vee (A \wedge \neg P) \vee (P \wedge B)$$

CAS PARTICULIERS

- P et $\neg P \vee Q$ se résolvent en Q (modus ponens)
- $\neg G \vee H$ et $\neg H \vee K$ se résolvent en $\neg G \vee K$ (enchaînement)
- $\neg Q$ et $\neg P \vee Q$ se résolvent en $\neg P$ (modus tollens)

UTILISATION

- Le principe de résolution est une règle d'inférence saine, i.e. tout résolvant est une conséquence logique des deux clauses parentes
- Pour appliquer le principe de résolution à des clauses non concrètes, on définit **l'unification**, afin de rechercher des littéraux complémentaires

UNIFICATION

- Deux termes t_1 et t_2 sont unifiables s'il existe une substitution σ des variables de t_1 et t_2 telle que $\sigma t_1 = \sigma t_2$
- Exemples :
 - $\text{pere}(X,\text{jean})$ s'unifie avec $\text{pere}(Y,Z)$ si $X|Y$ et $\text{jean}|Z$
 - $\text{pere}(\text{jean},\text{mere}(X))$ s'unifie avec $\text{pere}(Y,\text{mere}(\text{pierre}))$ si $\text{jean}|Y$ et $X|\text{pierre}$

RÉFUTATION PAR RÉOLUTION

- Pour prouver que H est une conséquence logique de G :
 - On transforme G et H en ensemble de clauses
 - On applique le principe de résolution à $G \wedge \neg H$ jusqu'à trouver la clause vide (faux)
- Ce principe est complet pour les clauses de Horn (Prolog)