LOGIQUE

Logique des propositions

Algèbre de Boole

Méthodes de simplification des fonctions booléennes

Objectifs

- Traiter formellement les notions de vérité et de fausseté
- Formaliser ce qu’on appelle le « raisonnement logique » ou la « déduction logique »

EXEMPLE

- Tous les mardis je vais au cinéma
- Ce soir je vais au cinéma
- Quel jour sommes-nous ?

UNE ÉNIGME POLICIÈRE

- Un meurtre a été commis au laboratoire, le corps se trouve dans la salle de conférences…
- On dispose des informations suivantes :
  - La secrétaire déclare qu'elle a vu l'ingénieur dans le couloir qui donne sur la salle de conférences
  - Le coup de feu a été tiré dans la salle de conférences, on l'a donc entendu de toutes les pièces voisines
  - L'ingénieur affirme n'avoir rien entendu
- On souhaite démontrer que si la secrétaire dit vrai, alors l'ingénieur ment

LOGIQUE DES PROPOSITIONS
SYNTAXE

- On définit :
  - Les propositions : a, b, c, …
  - Les constantes : Vrai et Faux
  - Les connecteurs :
    - $\wedge$ (conjonction)
    - $\vee$ (disjonction)
    - $\neg$ (négation)
    - $\supset$ (implication)

Construction d'une formule

- Une proposition est une formule
- Si X et Y sont des formules, alors $\neg X$, $X \vee Y$, $X \wedge Y$, $X \supset Y$ sont des formules
- On utilise de plus les parenthèses pour lever des ambiguïtés
- Exemples:
  - $a \wedge (c \vee \neg d)$
  - $(a \vee b) \supset \neg c$

Logique des propositions
Sémantique

- Les formules sont interprétées dans {Vrai,Faux}
- On définit l'interprétation associée à chaque connecteur grâce aux tables de vérité

L'OPÉRATEUR ET

X	Y	X ∧ Y
Vrai	Vrai	Vrai
Vrai	Faux	Faux
Faux	Vrai	Faux
Faux	Faux	Faux

Les deux doivent être vrais pour que le ET soit vrai

L'OPÉRATEUR OU

X	Y	X v Y
Vrai	Vrai	Vrai
Vrai	Faux	Vrai
Faux	Vrai	Vrai
Faux	Faux	Faux

Il suffit que l'un des deux soit vrai pour que le OU soit vrai

L'OPÉRATEUR NON

X	$\neg$X
Vrai	Faux
Faux	Vrai

L'OPÉRATEUR IMPLIQUE

X	Y	X ⊃ Y
Vrai	Vrai	Vrai
Vrai	Faux	Faux
Faux	Vrai	Vrai
Faux	Faux	Vrai

X ⊃Y signifie que si X est vrai alors Y est vrai
Le faux implique n'importe quoi

AUTRE DÉFINITION DE L'IMPLICATION

- On peut aussi définir l'implication en disant :

  $X \supset Y = \neg X \vee Y$

- On retrouve la même table de vérité :

X	Y	$\neg X$	$\neg X \vee Y$
Vrai	Vrai	Faux	Vrai
Vrai	Faux	Faux	Faux
Faux	Vrai	Vrai	Vrai
Faux	Faux	Vrai	Vrai

DÉFINITION DE L'ÉQUIVALENCE

- $X \Leftrightarrow Y = (X \supset Y) \wedge (Y \supset X)$

- X est une condition nécessaire et suffisante pour Y, et on dit X si et seulement si Y

- Y est une condition nécessaire et suffisante pour X, et on dit Y si et seulement si X

CONDITIONS NÉCESSAIRES ET SUFFISANTES

- Lorsqu'on écrit $X \supset Y$:
  - X est une condition suffisante de Y,
    et on dit X seulement si Y
  - Y est une condition nécessaire de X,
    et on dit Y si X

- Dérivable $\supset$ continue
  - Si une fonction est dérivable alors elle est continue
  - Mais une fonction continue n'est pas nécessairement dérivable
- Mardi $\supset$ cinéma – (Tous les mardis je vais au cinéma)
  - Si on est mardi, alors je vais au cinéma
  - Mais si je vais au cinéma, on n'est pas nécessairement mardi

DÉFINITION DU OU-EXCLUSIF

- Le OU logique est dit inclusif.
- Le OU exclusif est celui du langage courant : fromage ou dessert.

X	Y	X OU-ex Y
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Le OU-ex est vrai si l'un des deux est vrai mais pas les deux en même temps

(c'est le contraire de l'équivalence)

Propriétés des formules

- Une formule est valide si elle est toujours vraie (quelque soit l'interprétation)
- Une formule est consistante s'il existe une interprétation dans laquelle elle est vraie. Elle est inconsistante dans le cas contraire

- Problème : étant donnée une formule est-elle valide ? consistante ?

- Exemple : que dire de la formule

$$(a \supset b) \supset (\neg b \supset \neg a)$$

DRESSONS LA TABLE DE VÉRITÉ

a	b	$a \supset b$	$\neg b$	$\neg a$	$\neg b \supset \neg a$	$(a \supset b) \supset (\neg b \supset \neg a)$
V	V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V

Conclusion

- Quelles que soient les valeurs de a et b, cette formule est toujours vraie. Elle est donc valide.
- On peut montrer également que

  $(\neg a \supset \neg b) \supset (b \supset a)$
- C'est la contraposée des mathématiques

Règles de transformation (1)

- Toutes les formules qui suivent sont valides. Elles sont utiles pour simplifier des formules. Elles peuvent se démontrer en établissant leurs tables de vérité.

- $X \vee \neg X = V$ (tiers exclu)
- $X \wedge \neg X = F$ (contradiction)
- $\neg\neg X = X$ (involution)
- $X \vee X = X \wedge X = X$ (idempotence)

Règles de transformation (2)

- $\neg V = F$, $\neg F = V$

- $F \wedge X = F$, $V \wedge X = X$, $F \vee X = X$, $V \vee X = V$
  - Faux est élément neutre pour le OU et absorbant pour le ET
  - Vrai est élément neutre pour le ET et absorbant pour le OU

- $X \wedge (X \vee Y) = X$, $X \vee (X \wedge Y) = X$ (absorption)
- $X \vee (\neg X \wedge Y) = X \vee Y$
- $X \supset Y = \neg X \vee Y$

RÈGLES DE TRANSFORMATION (3)

- Lois de De Morgan :
  - $\neg(X \vee Y) = \neg X \wedge \neg Y$
  - $\neg(X \wedge Y) = \neg X \vee \neg Y$

- $((X \supset Y) \wedge X) \supset Y$ (modus ponens)
- $((X \supset Y) \wedge \neg Y) \supset \neg X$ (modus tollens)
- $(X \supset Y) = (\neg Y \supset \neg X)$ (contraposition)

RÈGLES DE TRANSFORMATION (4)

- Commutativité et associativité de $\vee$ et $\wedge$
  - $X \vee Y = Y \vee X$, $X \wedge Y = Y \wedge X$
  - $X \vee (Y \vee Z) = (X \vee Y) \vee Z = X \vee Y \vee Z$
  - $X \wedge (Y \wedge Z) = (X \wedge Y) \wedge Z = X \wedge Y \wedge Z$

- Distributivité de $\vee$ par rapport à $\wedge$ et de $\wedge$ par rapport à $\vee$
  - $X \vee (Y \wedge Z) = (X \vee Y) \wedge (X \vee Z)$, $X \wedge (Y \vee Z) = (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z)$

- Transitivité de $\supset$
  - $((X \supset Y) \wedge (Y \supset Z)) \supset (X \supset Z)$

RÈGLES DE TRANSFORMATION (5)

- $F \supset X = V$
- $V \supset X = X$
- $X \supset F = \neg X$
- $X \supset V = V$

Exemple d'application des règles de transformation

- $\neg(p \supset q)$

  $= \neg(\neg p \vee q)$

  $= \neg\neg p \wedge \neg q$

  $= p \wedge \neg q$

RETOUR SUR L'ÉNIGME POLICIÈRE

- Un meurtre a été commis au laboratoire, le corps se trouve dans la salle de conférences…
- On dispose des informations suivantes :
  - La secrétaire déclare qu'elle a vu l'ingénieur dans le couloir qui donne sur la salle de conférences
  - Le coup de feu a été tiré dans la salle de conférences, on l'a donc entendu de toutes les pièces voisines
  - L'ingénieur affirme n'avoir rien entendu
- On souhaite démontrer que si la secrétaire dit vrai, alors l'ingénieur ment

FORMALISATION EN CALCUL DES PROPOSITIONS

- On dispose des informations suivantes :
  - La secrétaire déclare qu'elle a vu l'ingénieur dans le couloir qui donne sur la salle de conférences
  - Le coup de feu a été tiré dans la salle de conférences, on l'a donc entendu de toutes les pièces voisines
  - L'ingénieur affirme n'avoir rien entendu
- On souhaite démontrer que si la secrétaire dit vrai, alors l'ingénieur ment

- p : la secrétaire dit vrai
- q : l'ingénieur était dans le couloir au moment du crime
- r : l'ingénieur était dans une pièce voisine de la salle de conférences
- s : l'ingénieur a entendu le coup de feu
- t : l'ingénieur dit vrai

Résolution de l'énigme

La secrétaire déclare qu'elle a vu l'ingénieur dans le couloir qui donne sur la salle de conférences :

$$p \supset q \quad \text{et} \quad q \supset r$$

Le coup de feu a été tiré dans la salle de conférences, on l'a donc entendu de toutes les pièces voisines :

$$r \supset s$$

L'ingénieur affirme n'avoir rien entendu :

$$t \supset \neg s$$

On souhaite démontrer que si la secrétaire dit vrai, alors l'ingénieur ment :

$$(p \supset \neg t)$$

- p : la secrétaire dit vrai
- q : l'ingénieur était dans le couloir au moment du crime
- r : l'ingénieur était dans une pièce voisine de la salle de conférences
- s : l'ingénieur a entendu le coup de feu
- t : l'ingénieur dit vrai

Il s'agit donc de prouver la validité de la formule :

$$(p \supset q \wedge q \supset r \wedge r \supset s \wedge t \supset \neg s) \supset (p \supset \neg t)$$

DÉMONSTRATION

$$(p \supset q \wedge q \supset r \wedge r \supset s \wedge t \supset \neg s) \supset (p \supset \neg t)$$

- Rappel : $X \supset Y$ est faux si X vrai et Y faux
- La formule ne peut être fausse que si
  - $(p \supset \neg t)$ est faux, soit p et t vrais
  - la prémisse est vraie, soit toutes les implications vraies
- Comme t doit être vrai, s doit être faux, donc r faux, donc q faux, donc p faux
- Il y a donc contradiction
- Donc la formule ne peut pas être fausse

Applications de la logique en informatique

- En algorithmique : nier des conditions, spécifier des invariants, des pré-conditions et des post-conditions
- En architecture : réalisation de toute fonction de traitement de code binaire à partir des seules portes logiques binaires OU, ET, NON (électronique numérique)
- En base de données : interprétation logique des BD, logique pour l'interrogation des BD, expression des contraintes d'intégrité, BD déductives
- En Intelligence Artificielle : représentation des connaissances, systèmes experts

Algèbre de Boole

- En informatique, on utilise plutôt 1 (tension haute) à la place de Vrai, et 0 (tension basse) à la place de Faux

A	B	¬A	A∧B	A∨B
1	1	0	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	0

Les connecteurs en Algèbre de Boole

- On obtient les relations suivantes :
  - $\neg X = 1 - X$ qu'on notera $\bar{X}$
  - $X \wedge Y = X.Y$
  - $X \vee Y = \min(X+Y, 1)$ qu'on notera $X+Y$

- On remplace $X \supset Y$ par $\neg X \vee Y$, soit $\bar{X}+Y$

Ecriture des règles de transformation en algèbre de Boole (1)

- $X+\bar{X}=1$, $X.\bar{X}=0$ (tiers exclu, contradiction)
- $\bar{\bar{X}}=X$,$X+X=X$, $X.X=X$ (involution, idempotence)
- $\bar{0}=1$, $\bar{1}=0$
- $X+0=X$, $X.0=0$, $X+1=1$, $X.1=X$ (éléments neutres et absorbants)
- $X.(X+Y)=X$, $X+X.Y=X$ (absorption)
- $X+\bar{X}.Y=X+Y$
- $\overline{X+Y}=\bar{X}.\bar{Y}$, $\overline{X.Y}=\bar{X}+\bar{Y}$ (De Morgan)

Ecriture des règles de transformation en algèbre de Boole (2)

- $X+Y=Y+X$, $X.Y=Y.X$ (commutativité)

- $X+(Y+Z)=(X+Y)+Z=X+Y+Z$ (associativité)
- $X.(Y.Z)=(X.Y).Z=X.Y.Z$ (associativité)

- $X.(Y+Z)=X.Y+X.Z$ (distributivité)
- $X+Y.Z=(X+Y).(X+Z)$ (distributivité)

FONCTIONS BOOLÉENNES

- En algèbre de boole, on parle de fonctions booléennes plutôt que de formules.

- Exemple : $F = a(b+\bar{c})+bc\bar{a}$

- On peut aussi définir une fonction booléenne à partir de sa table de vérité

EXEMPLE : UNE FONCTION "MAJORITÉ"

a	b	c	M
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$$M = \bar{a}bc + a\bar{b}c + ab\bar{c} + abc$$

POURQUOI SIMPLIFIER UNE FONCTION BOOLÉENNE ?

- Pour dresser plus facilement sa table de vérité afin de :
  - Déterminer la validité de la fonction
  - La comparer avec une autre fonction

- Pour concevoir un circuit intégré réalisant la fonction avec le moins de portes logiques possible

EXEMPLE À L'AIDE DES RÈGLES DE L'ALGÈBRE DE BOOLE

- Reprenons la fonction "majorité"

$$
\begin{aligned}
M &= \bar{a}bc+a\bar{b}c+ab\bar{c}+abc \\
&= bc(\bar{a}+a)+a(\bar{b}c+b\bar{c}) \\
&= bc+a(\bar{b}c+b\bar{c})
\end{aligned}
$$

- Peut-on trouver plus simple ?

Deuxième exemple

$$
\begin{aligned}
F &= abc+a(b\bar{c}+\bar{b}c)\\
&= abc+ab\bar{c}+a\bar{b}c\\
&= ab(c+\bar{c})+a\bar{b}c\\
&= ab+a\bar{b}c\\
&= a(b+\bar{b}c)\\
&= a(b+c)
\end{aligned}
$$

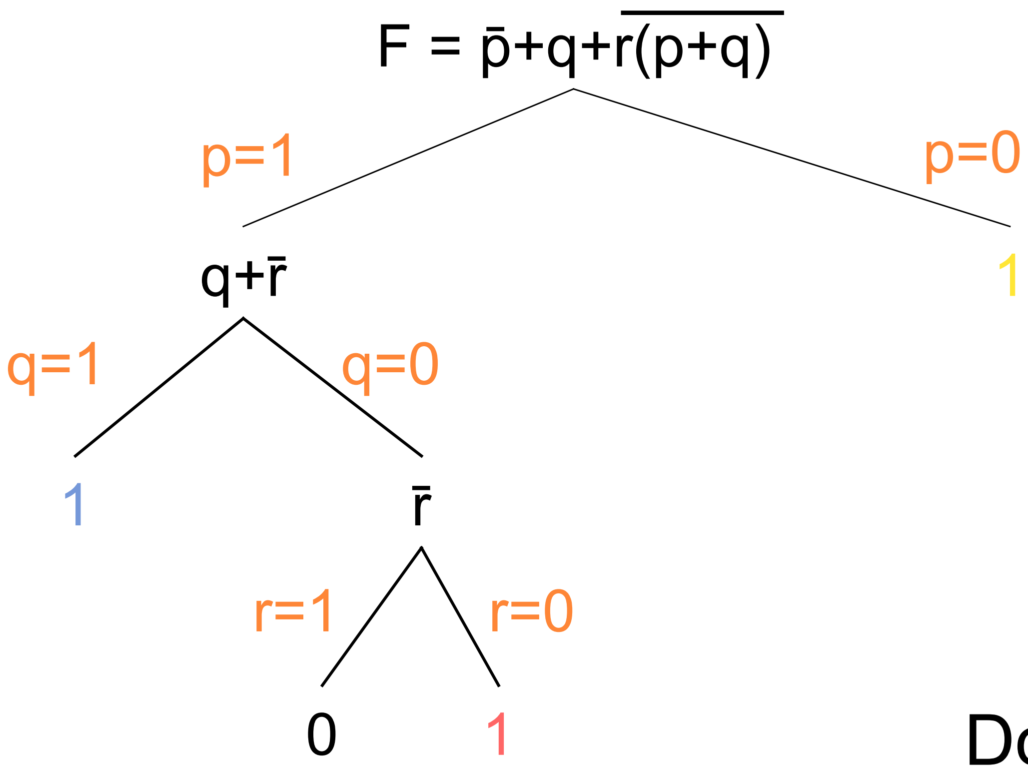
MÉTHODES DE SIMPLIFICATION DES FONCTIONS BOOLÉENNES

- Deux méthodes permettent de simplifier plus efficacement des fonctions compliquées que la seule application des règles de l'algèbre de Boole.
- Les diagrammes de Quine
- Les tables de Karnaugh

MÉTHODE DES DIAGRAMMES DE QUINE

- Principe :
  - On choisit une des variables qui interviennent le plus souvent dans la fonction booléenne à simplifier
  - On considère le cas où elle vaut 0 et le cas où elle vaut 1
  - On simplifie les deux expressions obtenues
  - On itère le processus sur les deux expressions simplifiées

EXEMPLE



Donc $F = pq+p\bar{q}\bar{r}+\bar{p}$

Nota Bene

Il n'est pas nécessaire d'aller jusqu'aux feuilles

$$F = \bar{p}+q+\overline{r(p+q)}$$

$p=1$: $q+\bar{r}$

$p=0$: 1

Donc $F = p(q+\bar{r})+\bar{p} = q+\bar{r}+\bar{p}$

UTILISATION DES DIAGRAMMES DE QUINE

- Les diagrammes de Quine permettent de mettre une fonction booléenne sous la forme d'une somme de produits.
- Ils permettent aussi de vérifier la validité d'une expression booléenne :
  toutes les feuilles sont-elles égales à 1 ?
- Ils sont particulièrement bien adaptés pour des expressions contenant des implications

MÉTHODE DES TABLES DE KARNAUGH

- La fonction doit être en premier lieu exprimée comme une somme de produits.
  - Pour ce faire, on utilise les règles de l'algèbre de Boole ou les diagrammes de Quine.
- On dresse ensuite une table de Karnaugh, qui est une table de vérité à deux dimensions. Sur chaque dimension on peut représenter les valeurs possibles de deux variables.

TABLE DE KARNAUGH À 3 VARIABLES

Entre deux cases adjacentes, seule la valeur d'une variable change

C \ AB	00	01	11	10
0				
1				

Remplir la table de Karnaugh

- On met 1 dans une case de la table si la fonction est vraie pour les valeurs des variables correspondant à cette case.
- On procède à des regroupements de 1 adjacents.
- On cherche à effectuer les groupements les plus grands afin de simplifier au maximum.
- Les regroupements sont des rectangles de 2^n termes.

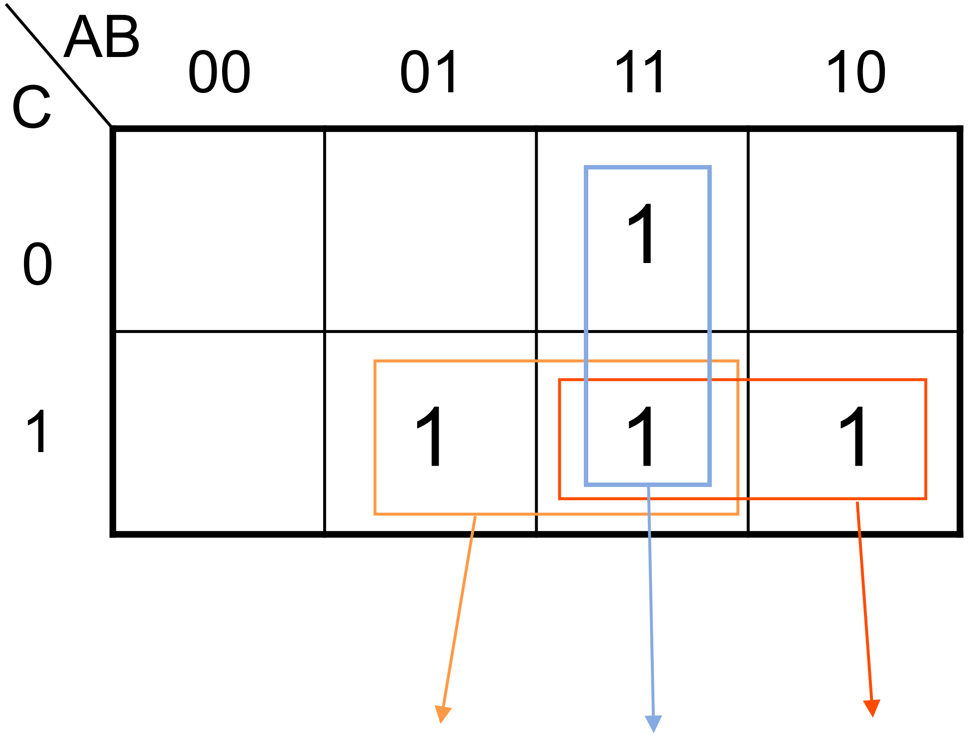
RETOUR SUR LA FONCTION "MAJORITÉ"
1. REMPLIR LA TABLE

a	b	c	M
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$$M = \bar{a}bc + a\bar{b}c + ab\bar{c} + abc$$

C \ AB	00	01	11	10
0			1	
1		1	1	1

RETOUR SUR LA FONCTION "MAJORITÉ"
2. SIMPLIFIER



Donc F= BC + AB + AC

C'est plus simple que ce que l'on avait trouvé
avec les règles de l'algèbre de Boole

TABLE DE KARNAUGH À 4 VARIABLES

DC \ BA	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

Exemples de simplification sur des tables de Karnaugh à 4 variables (1)

DC \ BA	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	0	1	1	0
11	0	1	1	0
10	0	1	1	0

$S=A$

DC \ BA	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	0	0	0	0
11	0	0	0	0
10	1	1	1	1

$S=\overline{C}$

DC \ BA	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	0	0	0
11	0	0	1	1
10	0	0	1	1

$S=DB$

Ici les deux lignes sont bien adjacentes

EXEMPLES DE SIMPLIFICATION SUR DES TABLES DE KARNAUGH À 4 VARIABLES (2)

DC \ BA	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	1	0	0	1
11	1	0	0	1
10	0	0	0	0

$S = C\overline{A}$

DC \ BA	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	0	0	0
11	0	0	0	0
10	1	0	0	1

$S = \overline{C}\,\overline{A}$

DC \ BA	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	1	1	0
11	0	1	1	0
10	0	0	0	0

$S = CA$

Bilan

	Remplissage	Simplification
Table à 3 variables	Terme à 3 variables ➔ 1 case Terme à 2 variables ➔ 2 cases Terme à 1 variable ➔ 4 cases	2 cases ➔ terme à 2 variables 4 cases ➔ terme à 1 variable
Table à 4 variables	Terme à 4 variables ➔ 1 case Terme à 3 variables ➔ 2 cases Terme à 2 variables ➔ 4 cases Terme à 1 variable ➔ 8 cases	2 cases ➔ terme à 3 variables 4 cases ➔ terme à 2 variables 8 cases ➔ terme à 1 variable

ET POUR 5 VARIABLES ?

DC \ BA	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

E= 0

DC \ BA	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

E= 1

Si F est la fonction à simplifier, R1 l'expression obtenue pour la première table et R2 celle pour la deuxième

Alors $F = \bar{E}.R1 + E.R2$