Rappels de logique pour Prolog

http://liris.cnrs.fr/nathalie.guin/Prolog

- Logique des propositions
- Logique des prédicats
- Unification

Logique des propositions
Syntaxe

- On définit :
  - Les propositions : a, b, c, …
  - Les constantes : V et F
  - Les connecteurs :
    - $\wedge$ (conjonction)
    - $\vee$ (disjonction)
    - $\neg$ (négation)
    - $\supset$ (implication)

CONSTRUCTION D'UNE FORMULE

- Une proposition est une formule
- Si a et b sont des formules, alors $\neg a$, $a \vee b$, $a \wedge b$, $a \supset b$ sont des formules

Logique des propositions
Sémantique

- Les formules sont interprétées dans {V,F}
- On définit l'interprétation associée à chaque connecteur grâce aux tables de vérité

Tables de vérité des connecteurs

A	B	$\neg$A	A$\wedge$B	A$\vee$B	A$\supset$B
V	V	F	V	V	V
V	F	F	F	V	F
F	V	V	F	V	V
F	F	V	F	F	V

Propriétés des formules

- Une formule est valide si elle est toujours vraie (quelque soit l'interprétation)
- Une formule est consistante s'il existe une interprétation dans laquelle elle est vraie. Elle est inconsistante dans le cas contraire
- Problème : étant donnée une formule, est-elle valide ? consistante ?
- Exemple : que dire de la formule

$$(a \supset b) \supset (\neg b \supset \neg a)$$

DRESSONS LA TABLE DE VÉRITÉ

a	b	$a \supset b$	$\neg b$	$\neg a$	$\neg b \supset \neg a$	$(a \supset b) \supset (\neg b \supset \neg a)$
V	V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V

RÈGLES DE TRANSFORMATION (1)

- $a \vee \neg a$ (loi du tiers exclu)
- $((a \supset b) \wedge a) \supset b$ (modus ponens)
- $((a \supset b) \wedge \neg b) \supset \neg a$ (modus tollens)
- $(a \supset b) \Leftrightarrow (\neg b \supset \neg a)$ (contraposition)
- $\neg\neg a \Leftrightarrow a$ (double négation)
- $a \supset b \Leftrightarrow \neg a \vee b$
- $a \vee a \Leftrightarrow a \wedge a \Leftrightarrow a$ (idempotence)

Règles de transformation (2)

- Lois de De Morgan :
  - $\neg(a \vee b) \Leftrightarrow \neg a \wedge \neg b$
  - $\neg(a \wedge b) \Leftrightarrow \neg a \vee \neg b$
- Commutativité et associativité de $\vee$ et $\wedge$
- Distributivité de $\vee$ par rapport à $\wedge$ et de $\wedge$ par rapport à $\vee$
- $X \wedge (X \vee Y) = X$, $X \vee (X \wedge Y) = X$ (absorption)
- $X \vee (\neg X \wedge Y) = X \vee Y$

Une énigme policière

- Un meurtre a été commis au laboratoire, le corps se trouve dans la salle de conférences…
- On dispose des informations suivantes :
  - La secrétaire déclare qu'elle a vu l'ingénieur dans le couloir qui donne sur la salle de conférences
  - Le coup de feu a été tiré dans la salle de conférences, on l'a donc entendu de toutes les pièces voisines
  - L'ingénieur affirme n'avoir rien entendu
- On souhaite démontrer que :
  si la secrétaire dit vrai, alors l'ingénieur ment

Formalisation en calcul des propositions

- p : la secrétaire dit vrai
- q : l'ingénieur était dans le couloir au moment du crime
- r : l'ingénieur était dans une pièce voisine de la salle de conférences
- s : l'ingénieur a entendu le coup de feu
- t : l'ingénieur dit vrai

RÉSOLUTION DE L'ÉNIGME

- Les informations de l'énoncé se traduisent par les implications :

  $p \supset q$, $q \supset r$, $r \supset s$, $t \supset \neg s$

- Il s'agit de prouver la validité de la formule :

  $(p \supset q \wedge q \supset r \wedge r \supset s \wedge t \supset \neg s) \supset (p \supset \neg t)$

DÉMONSTRATION

$$(p \supset q \wedge q \supset r \wedge r \supset s \wedge t \supset \neg s) \supset (p \supset \neg t)$$

- La formule ne peut être fausse que si
  - $(p \supset \neg t)$ est faux, soit p et t vrais
  - la prémisse est vraie, soit toutes les implications vraies
- Comme t doit être vrai, s doit être faux, donc r faux, donc q faux, donc p faux, et il y a contradiction

LOGIQUE DES PRÉDICATS
SYNTAXE

- On définit :
  - Les constantes : V et F
  - Les connecteurs : $\wedge$ $\vee$ $\neg$ $\supset$
  - Les variables : x, y, z, …
  - Les fonctions : f, g, h, …
  - Les prédicats : p, q, r, … dont ceux d'arité 0 : a, b, c, …
  - Les quantificateurs : $\forall$, $\exists$

DÉFINITIONS

- **Terme :**
  - Une variable est un terme
  - Une constante est un terme
  - Si t_1, t_2, …, t_n sont des termes, alors $f(t_1,t_2,\ldots,t_n)$ est un terme
  - Exemple : fils(x)
- **Atome :**
  - Si t_1, t_2, …, t_n sont des termes, et p un prédicat, alors $p(t_1,t_2,\ldots,t_n)$ est un atome
  - Exemple : pere(x,y)

CONSTRUCTION D'UNE FORMULE

- V, F sont des formules
- Un atome est une formule
- Si F_1 et F_2 sont les formules, alors $\neg F_1$, $F_1 \wedge F_2$, $F_1 \vee F_2$, $F_1 \supset F_2$ sont des formules
- Si F est une formule, $\forall x\ F$ et $\exists x\ F$ sont des formule
- Exemples :
  - $\forall x\ pere(x,fils(x))$
  - $\forall x\ \forall y\ \forall z\ (pere(x,y) \wedge pere(y,z)) \supset papy(x,z)$
- Remarque : la logique des propositions est un cas particulier de la logique des prédicats

EXEMPLES DE FORMULES VALIDES

- $\forall x \neg A \Leftrightarrow \neg \exists x A$
- $\forall x A \Leftrightarrow \neg \exists x \neg A$
- Comment déterminer qu'une formule est valide ?

DÉFINITIONS

- Littéral
  - Un atome est un littéral (positif)
  - La négation d'un atome est un littéral (négatif)
- Une clause est une formule qui a la forme d'une disjonction de littéraux
  - Exemple : $P(x,y) \vee \neg Q(z)$
- Une clause concrète est une clause sans variable
- Une clause de Horn est une clause comportant au plus un littéral positif

On peut toujours transformer une formule en un ensemble (conjonction) de clauses

PRINCIPE DE RÉSOLUTION

- C'est une règle d'inférence qui s'applique aux clauses
- Principe sur des clauses concrètes :
  - $G = G_1 \vee G_2 \vee \ldots \vee G_n$
  - $H = \neg G_1 \vee H_2 \vee \ldots \vee H_m$
  - $K = G_2 \vee \ldots \vee G_n \vee H_2 \vee \ldots \vee H_m$
- K est le résolvant de G et H, on peut l'ajouter à la conjonction de clauses
- G_1 et $\neg G_1$ sont des littéraux complémentaires

Justification

$(P \vee A) \wedge (\neg P \vee B)$

$= (P \wedge B) \vee (A \wedge \neg P) \vee (A \wedge B)$

$(P \vee A) \wedge (\neg P \vee B) \wedge (A \vee B)$

$= ((P \wedge B) \vee (A \wedge \neg P) \vee (A \wedge B)) \wedge (A \vee B)$

$= (A \wedge P \wedge B) \vee (A \wedge \neg P) \vee (A \wedge B) \vee (P \wedge B) \vee (A \wedge \neg P \wedge B) \vee (A \wedge B)$

$= (A \wedge B) \vee (A \wedge \neg P) \vee (P \wedge B)$

Cas particuliers

- P et $\neg P \vee Q$ se résolvent en Q (modus ponens)
- $\neg G \vee H$ et $\neg H \vee K$ se résolvent en $\neg G \vee K$ (enchaînement)
- $\neg Q$ et $\neg P \vee Q$ se résolvent en $\neg P$ (modus tollens)

UTILISATION

- Le principe de résolution est une règle d'inférence saine, i.e. tout résolvant est une conséquence logique des deux clauses parentes
- Pour appliquer le principe de résolution à des clauses non concrètes, on définit l'unification, afin de rechercher des littéraux complémentaires

UNIFICATION

- Deux termes t_1 et t_2 sont unifiables s'il existe une substitution σ des variables de t_1 et t_2 telle que $\sigma\, t_1 = \sigma\, t_2$
- Exemples :
  - pere(X,jean) s'unifie avec pere(Y,Z)
    si X|Y et jean|Z
  - pere(jean,mere(X)) s'unifie avec pere(Y,mere(pierre))
    si jean|Y et X|pierre

RÉFUTATION PAR RÉSOLUTION

- Pour prouver que H est une conséquence logique de G :
  - On transforme G et H en ensemble de clauses
  - On applique le principe de résolution à $G \wedge \neg H$ jusqu'à trouver la clause vide (faux)
- Ce principe est complet pour les clauses de Horn (Prolog)