DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE ÉCOLE CENTRALE DE LYON

MOD 4.4 : Optimisation et Recherche Opérationnelle

(Contrôle du 20 décembre 2017. Durée 2h, **aucun document n'est autorisé**)
(Répondre aux questions de chaque partie sur une feuille séparée en mentionnant clairement la lettre de la partie en tête de chaque feuille.)

A– Questions concernant les cours et TD de A. Zine

Exercice 1 : On considère la fonction $\mathcal{J}$, définie pour tout $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ par

$$\mathcal{J}(\mathbf{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3 + x_1 - x_3,$$

ainsi que l'ensemble des contraintes $\mathcal{C} = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3;\ x_1 \geq 0, x_2 - 2x_3 = 1\right\}$. On note $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée.

1. Ecrire $\mathcal{J}(\mathbf{x})$ sous la forme $\mathcal{J}(\mathbf{x}) = \dfrac{1}{2}\langle A\,\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle - \langle \mathbf{b}, \mathbf{x}\rangle$, préciser A et $\mathbf{b}$.
2. Montrer que le problème de minimisation sans contraintes, $\min\limits_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3} \mathcal{J}(\mathbf{x})$, admet une solution et une seule et la déterminer.
3. Montrer que le problème de minimisation avec contraintes $\min\limits_{\mathbf{y}\in\mathcal{C}} \mathcal{J}(\mathbf{y})$ admet au moins une solution.
4. Écrire les conditions de KKT et déterminer $\mathbf{y}^* \in \mathbb{R}^3$ tel que $\mathcal{J}(\mathbf{y}^*) = \min\limits_{\mathbf{y}\in\mathcal{C}} \mathcal{J}(\mathbf{y})$. Quels sont les multiplicateurs de Lagrange associés aux contraintes.

Exercice 2 : Un agriculteur veut allouer 1500 hectares de sufrace irrigable entre culture de céréales et culture de maïs. Il dispose de 550 heures de main d'oeuvre et de 450 m^3 d'eau. 1 hectare de céréales nécessite 4h de main d'oeuvre et 2 m^3 d'eau et produit un bénéfice net de 500 €. 1 hectares de maïs nécessite 3h de main d'oeuvre et 5 m^3 d'eau et produit un bénéfice net de 750 €.
Sachant que l'agriculteur ne peut pas cultivier plus de 500 hectares de maïs, l'agriculteur veut connaitre la meilleure allocation de surfaces lui permettant un meilleur bénéfice.

1. Ecrire le programme linéaire associé. Préciser la fonction cout ainsi que les contraintes.
2. Calculer la quantité de hectares allouée à chaque culture donnant le meilleur profit pour l'agriculteur.

B– Questions concernant les cours et BE de N. Bousquet

Exercice 1:

Un *ensemble stable* d'un graphe est un sous-ensemble de sommets du graphe tel que toute arête a au plus une de ses deux extrémités dans le stable. Déterminer la taille maximale d'un stable dans un graphe est un problème majeur, par exemple en ordonnancement.

1. Formuler le problème de stable maximum dans un graphe comme un problème de Programmation Linéaire en nombre entiers.

On considère le problème d'ordonnancement suivant. On a 1 machine et n tâches à effectuer. Chaque tâche doit être effectuée pendant l'intégralité d'un intervalle de temps donné en entrée. Deux tâches dont les intervalles s'intersectent ne peuvent pas être toutes les deux effectuées par la machine. Le but est de déterminer le nombre maximum de tâches qui peuvent être effectuées par la machine.

Étant donné un ensemble d'intervalles de la droite réelle, on peut définir un graphe de conflit où chaque sommet correspond à un intervalle et où deux sommets sont reliés par une arête ssi leurs intervalles s'intersectent. Par abus de notation, on confondra un intervalle avec le sommet correspondant dans le graphe de conflit.

2. Montrer qu'un ensemble de tâches qui peuvent être effectuées par une machine est un ensemble stable du graphe de conflit.

3. Soit G un graphe de conflit et $\mathcal{I}$ l'ensemble d'intervalles de G. Montrer qu'un ensemble d'intervalles S est un ensemble stable de G si et seulement si: quelque soit l'extrémité x d'un intervalle de $\mathcal{I}$, au plus un intervalle de S contient x.

4. En déduire une nouvelle formulation du stable maximum dans les graphes de conflit comme un programme linéaire en nombre entiers.

5. On peut montrer que la matrice des contraintes de ce Programme Linéaire est totalement unimodulaire (ne le montrez pas !). Qu'en déduire d'un point de vue algorithmique?

Exercice 2:

On considère le PL (en nombre réel) suivant: $\max 3x_1 + 2x_2 + x_3$ soumis à

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + 2x_3 &\leq 12 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 10 \\ x_1 + x_2 + x_3 &\geq 4 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

En ajoutant les variables d'écart, et après avoir appliqué l'algorithme du simplexe, on trouve le tableau optimal suivant:

0	0	6/5	4/5	3/5	0	78/5
0	0	-1/5	1/5	2/5	1	12/5
0	1	1/5	-1/5	3/5	0	18/5
1	0	3/5	2/5	-1/5	0	14/5

6. Donner les solutions optimales du primal, du dual et leurs valeurs.

7. Comment évolue la valeur optimale si le terme droit de la première contrainte est modifié?

8. Écrire le Programme Linéaire dual.

C– Questions concernant les cours et BE de A. Saidi

1. Traduite l'implication $A \implies B$ en termes d'arithmétique binaire.

2. On peut écrire en programmation par contraintes l'expression suivante :

   $d = 0 \implies x > a$ où d est une variable binaire et x une variable *entier*.

   Traduire cette implication en Programmation Linéaire Mixte (MIP) de bas niveau.

3. Soit le problème d'ordonnancement suivant.

C1: Tache finale : Déménagement; tache Initiale : Maçonnerie (devraient se déduire).

C2: Chaque tache nécessite un seul travailleur qui est capable de réaliser n'importe quelle tâche. Mais **il n'y a que deux travailleurs disponibles** : on ne peut pas entreprendre plus de deux tâches en parallèle.

C3: Tout le budget n'est pas disponible au départ des travaux : on dispose **seulement de 120000** au début des travaux; le reste sera disponible après **16 semaines** (depuis le début) et à raison de **50000 toutes les 4 semaines**.

C'est à dire : on commence avec 120000. Après 16 semaines, on dispose de 50000 de plus, puis après 4 semaines de plus, encore de 50000.

C4: On ne commence une tâche que si son budget est disponible d'avance : on n'arrête pas une tâche en cours.

C5: Le but est de terminer les travaux au plus tôt possible.

Tache	**Description**	**Les tâches Prédécesseurs**	**Durée** (semaines)	**Coût Euros**
a	Maçonnerie	9	-	37500
b	Charpente	2	a	23000
c	Toiture	3	b	46500
d	Plomberie	3	a	10000
e	Façade	2	c, d	27000
f	Huisserie	4	c, d	30000
g	Jardin	3	c, d	15000
h	Plafond	2	a	16000
i	Peinture	2	f, h	10000
j	Déménagement	1	i	5000
Total				220000

1- Proposer d'abord un modèle mathématique clair ($\frac{1}{3}$ de la note de cette question)
Ce modèle doit résoudre le problème sans tenir compte des contraintes C2 et C3.
2- Intégrer ensuite (dans une 2e version) l'ensemble des contraintes. Vous pouvez même Intégrer la contrainte C2 en premier, puis C3 dans une 3e version si vous voulez.
2- Donner le code Minizinc d'une solution pour ce problème. Les erreurs syntaxiques mineures ne sont pas pénalisantes. La non utilisation des contraintes (dites de haut niveau) est fortement pénalisante puisque vous n'aurez pas compris la 3e partie du cours !