Question 1.
On considère le Programme Linéaire suivant:

$$\begin{aligned} \max x_1 + x_2 \\ \text{soumis à } 3x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

En ajoutant les variables d'écart (et après un certain nombre d'itérations), on obtient le tableau suivant:

$$\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & -\frac{1}{5} & 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{11}{5} \\ \hline 1 & 0 & \frac{3}{5} & 0 & -\frac{2}{5} & \frac{8}{5} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & 1 & -\frac{4}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & 0 & \frac{3}{5} & \frac{3}{5} \end{array}$$

Donner **sans justifier** la réponse aux questions suivantes:

(a) Quelles sont les variables dans la base et hors de la base à cette étape de l'algorithme?
(b) Quel est le point correspondant?
(c) A l'intersection de quelles contraintes se trouve-t-il?
(d) Quelle est la valeur de la solution en ce point.
(e) Donner la coupe de Gomory associée à la première contrainte du tableau.

Question 2.
Soit $G = (V, E)$ un graphe. Un *ensemble dominant* de G est un ensemble $X \subseteq V$ de sommets tel que, pour tout sommet $y \in V$, alors $y \in X$ ou il existe $x \in X$ tel que $(x, y) \in E$.
Formuler le problème consistant, étant donné un graphe $G = (V, E)$, à trouver un ensemble dominant taille minimum comme un programme linéaire en nombre entiers.

Question 3.
Une matrice A est *totalement unimodulaire* (TU) si toute sous matrice carrée de A a un déterminant de $-1, 0$ ou 1. Soit M une matrice qui contient au plus un 1 et un -1 par ligne (tous les autres coefficients étant nuls). On veut montrer (par récurrence sur la taille de la sous matrice carrée) que M est TU. Supposons que la propriété soie vraie pour toutes les sous-matrices carrées de M de taille $(\ell - 1) \times (\ell - 1)$. Soit M' une sous matrice carrée de M de taille $\ell \times \ell$.

(a) Conclure si M' contient une ligne de $\mathsf{0}$.
(b) Conclure si M' contient une ligne avec un seul coefficient non nul.
(c) Dans les cas restants, trouver une combinaison des colonnes qui vaut $\mathsf{0}$. Conclure.

Question 4. Bonus - Seulement pour ceux qui ont fini l'exam et qui s'ennuient !
Montrer que le problème du dominant minimum est un cas particulier de *Minimum Hitting Set.* Pour quel hypergraphe?