MOD 4.4: Recherche opérationnelle

Nicolas Bousquet

Ecole Centrale de Lyon

Déroulement du cours

Cours 1: Programmation Linéaire.

- Introduction à la Recherche Opérationnelle.
- Programmation linéaire.
- Algorithme du Simplexe.

Cours 2: Dualité et Analyse de sensitivité.

- Analyse de sensibilité.
- Dual d'un programme linéaire.
- Qu'est ce qu'un graphe?
- Application de la dualité aux graphes.

Cours 3: Programmation Linéaire en nombre entiers.
(fin novembre)

Recherche Opérationnelle

Définition (wikipedia)

La Recherche Opérationnelle peut être définie comme l'ensemble des méthodes et techniques rationnelles orientées vers la recherche du meilleur choix dans la façon d'opérer en vue d'aboutir au résultat visé ou au meilleur résultat possible.

Recherche Opérationnelle

Définition (wikipedia)

La Recherche Opérationnelle peut être définie comme l'ensemble des méthodes et techniques rationnelles orientées vers la recherche du meilleur choix dans la façon d'opérer en vue d'aboutir au résultat visé ou au meilleur résultat possible.

Exemples:

- Ordonnancement.
- Routage.
- Optimisation industrielle.
- Aide à la décision.

Recherche Opérationnelle

Définition (wikipedia)

La Recherche Opérationnelle peut être définie comme l'ensemble des méthodes et techniques rationnelles orientées vers la recherche du meilleur choix dans la façon d'opérer en vue d'aboutir au résultat visé ou au meilleur résultat possible.

Exemples:

- Ordonnancement.
- Routage.
- Optimisation industrielle.
- Aide à la décision.

Différentes approches:

- Solutions exactes. (Algo. polynomiaux...)
- Solutions approchées.
- Heuristiques.

Programmation Linéaire (PL)

Définition (programme linéaire)

Minimisation/ maximisation d'une fonction linéaire sous des contraintes elles-même linéaires.

Programmation Linéaire (PL)

Définition (programme linéaire)

Minimisation/ maximisation d'une fonction linéaire sous des contraintes elles-même linéaires.

Classiquement:
$n =$ nombre de variables.
$x_1, \dots, x_n =$ ensemble des variables.
$m =$ nombre de contraintes.

Programmation Linéaire (PL)

Définition (programme linéaire)

Minimisation/ maximisation d'une fonction linéaire sous des contraintes elles-même linéaires.

Classiquement:
n = nombre de variables.
$x_1, \ldots, x_n$ = ensemble des variables.
m = nombre de contraintes.

Exemple:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq b$$

Programmation Linéaire (PL)

Définition (programme linéaire)

Minimisation/ maximisation d'une fonction linéaire sous des contraintes elles-même linéaires.

Classiquement:
n = nombre de variables.
$x_1, \ldots, x_n$ = ensemble des variables.
m = nombre de contraintes.

Exemple:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq b$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \geq b \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} -a_i x_i \leq -b$$

Programmation Linéaire (PL)

Définition (programme linéaire)

Minimisation/ maximisation d'une fonction linéaire sous des contraintes elles-même linéaires.

Classiquement:
n = nombre de variables.
$x_1, \ldots, x_n$ = ensemble des variables.
m = nombre de contraintes.

Exemple:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq b$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \geq b \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} -a_i x_i \leq -b$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = b_i \Leftrightarrow \Big((\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq b) \;\; AND \;\; \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \geq b \Big)$$

Programmation Linéaire (PL)

Définition (programme linéaire)

Minimisation/ maximisation d'une fonction linéaire sous des contraintes elles-même linéaires.

Classiquement:
n = nombre de variables.
$x_1, \ldots, x_n$ = ensemble des variables.
m = nombre de contraintes.

Exemple:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq b$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \geq b \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} -a_i x_i \leq -b$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = b_i \Leftrightarrow \Big((\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq b) \;\; AND \;\; \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \geq b \Big)$$

$$x_i \geq 0$$

Forme normale d'un PL

$$
\begin{array}{ll}
 & \max \sum c_i x_i \\
\text{soumis à} & \forall j, \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq b_j \\
 & \forall i, x_i \geq 0
\end{array}
$$

Forme normale d'un PL

$$
\begin{aligned}
& \max \sum c_i x_i \\
\text{soumis à} \quad & \forall j, \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq b_j \\
& \forall i, x_i \geq 0
\end{aligned}
$$

A = Matrice des $a_{i,j}$.
c = vecteur des c_i.
b = vecteur des b_i.

Un programme linéaire est sous forme normale s'il s'écrit:

$$
\begin{aligned}
& \max c^t x \\
\text{soumis à} \quad & Ax \leq b \\
& x \geq 0
\end{aligned}
$$

La contrainte $x \geq 0$ s'appelle contrainte de positivité.

Exemple

Une usine fabrique des chaises et des tables. Chaque semaine l'usine commande la même quantité de bois, connaît le temps de travail de ses employés et la durée de fonctionnement de ses machines.
Sachant qu'une table rapporte 6 euros et une chaise 4, quel est le mix chaises-tables qui maximise le revenu de l'usine?

Exemple

Une usine fabrique des chaises et des tables. Chaque semaine l'usine commande la même quantité de bois, connaît le temps de travail de ses employés et la durée de fonctionnement de ses machines.
Sachant qu'une table rapporte 6 euros et une chaise 4, quel est le mix chaises-tables qui maximise le revenu de l'usine?

	Table	**Chaise**	**Quantité disponible**
Equipement	3	9	81
Main d'oeuvre	4	5	55
Bois	2	1	20

Mise en équation

	Table	**Chaise**	**Quantité disponible**
Equipement	3	9	81
Main d'oeuvre	4	5	55
Bois	2	1	20

Mise en équation

	Table	**Chaise**	**Quantité disponible**
Equipement	3	9	81
Main d'oeuvre	4	5	55
Bois	2	1	20

- Création de deux variables: x_t et x_c.

Mise en équation

	Table	**Chaise**	**Quantité disponible**
Equipement	3	9	81
Main d'oeuvre	4	5	55
Bois	2	1	20

- Création de deux variables: x_t et x_c.
- Création de trois contraintes: équipement, main d'oeuvre, bois:

$$\begin{aligned} 3x_t + 9x_c &\leq 81 \\ 4x_t + 5x_c &\leq 55 \\ 2x_t + x_c &\leq 20 \\ x_t, x_c &\geq 0 \end{aligned}$$

Mise en équation

	Table	Chaise	Quantité disponible
Equipement	3	9	81
Main d'oeuvre	4	5	55
Bois	2	1	20

- Création de deux variables: x_t et x_c.
- Création de trois contraintes: équipement, main d'oeuvre, bois:

$$\begin{aligned} 3x_t + 9x_c &\leq 81 \\ 4x_t + 5x_c &\leq 55 \\ 2x_t + x_c &\leq 20 \\ x_t, x_c &\geq 0 \end{aligned}$$

- Création de la fonction objectif.

$$z = \max(6x_t + 4x_c)$$

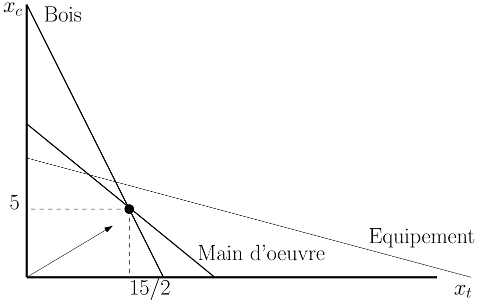
Résolution du système

Quand on résout le système, on obtient la solution optimale suivante:

$$(x_t, x_c) = (15/2, 5).$$

Cette solution peut être obtenue de plusieurs façons:

- En dimension 2: graphiquement.



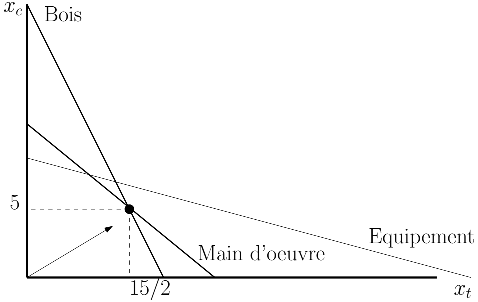
Résolution du système

Quand on résout le système, on obtient la solution optimale suivante:

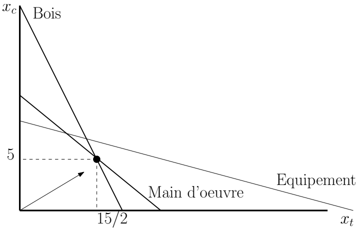
$$(x_t, x_c) = (15/2, 5).$$

Cette solution peut être obtenue de plusieurs façons:

- En dimension 2: graphiquement.
- En toute dimension: comment faire?

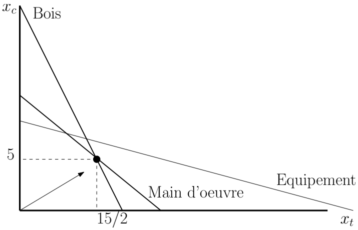


Points extrêmes et recherche de solution optimale



Une contrainte $\sum a_i x_i \leq b$ définit un demi-espace.
La contrainte $\sum a_i x_i \leq b$ est serrée pour un point z si $\sum a_i z_i = b$.

Points extrêmes et recherche de solution optimale



Une contrainte $\sum a_i x_i \leq b$ définit un demi-espace.
La contrainte $\sum a_i x_i \leq b$ est serrée pour un point z si $\sum a_i z_i = b$.

Un point extrême z est un point tel que:

- z soit une solution,
- z est l'unique point à l'intersection d'un ensemble $\mathcal{C}$ de contraintes serrées.

A quoi ressemble une solution optimale?

Remarque:
L'ensemble des solutions est une intersection de demi-espaces fermés.
En particulier c'est un espace convexe et fermé.

A quoi ressemble une solution optimale?

Remarque:
L'ensemble des solutions est une intersection de demi-espaces fermés. En particulier c'est un espace convexe et fermé.

Théorème 1:
On optimise une fonction linéaire (donc convexe et concave) dans un convexe
$\Rightarrow$ Un maximum (resp. minimum) local est un maximum (resp. minimum) global.

A quoi ressemble une solution optimale?

Remarque:
L'ensemble des solutions est une intersection de demi-espaces fermés.
En particulier c'est un espace convexe et fermé.

Théorème 1:
On optimise une fonction linéaire (donc convexe et concave) dans un convexe
$\Rightarrow$ Un maximum (resp. minimum) local est un maximum (resp. minimum) global.

Théorème 2:
Si la valeur optimale est finie alors il existe un point extrême qui atteint le maximum.

A quoi ressemble une solution optimale?

Remarque:
L'ensemble des solutions est une intersection de demi-espaces fermés.
En particulier c'est un espace convexe et fermé.

Théorème 1:
On optimise une fonction linéaire (donc convexe et concave) dans un convexe
$\Rightarrow$ Un maximum (resp. minimum) local est un maximum (resp. minimum) global.

Théorème 2:
Si la valeur optimale est finie alors il existe un point extrême qui atteint le maximum.

Principe de l'algorithme du simplexe: Se promener de points extrêmes en points extrêmes.

Etape 1: Mettre le PL sous forme standard

Forme standard:

$$\begin{aligned} & \max c^t x \\ \text{soumis à} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Etape 1: Mettre le PL sous forme standard

Forme standard:

$$\begin{aligned} & \max c^t x \\ \text{soumis à} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Idée: rajouter des variables d'écart.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq b$$

Créer une variable y et poser:

$$y = b - \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

Notez que $y \geq 0$ et $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + y = b$.

Remarque: La forme générale des solutions ne change pas. La projection d'une solution est toujours une solution.

Sur notre exemple

- On a les inégalités.

$$\begin{aligned} 3x_t + 9x_c &\leq 81 \\ 4x_t + 5x_c &\leq 55 \\ 2x_t + x_c &\leq 20 \\ x_t, x_c &\geq 0 \end{aligned}$$

Sur notre exemple

- On a les inégalités.

$$\begin{aligned} 3x_t + 9x_c &\leq 81 \\ 4x_t + 5x_c &\leq 55 \\ 2x_t + x_c &\leq 20 \\ x_t, x_c &\geq 0 \end{aligned}$$

- On rajoute les variables d'écart pour créer des égalités.

$$z = \max 6x_t + 4x_c$$

sous les contraintes

$$\begin{aligned} 3x_t + 9x_c + y_1 &= 81 \\ 4x_t + 5x_c + y_2 &= 55 \\ 2x_t + x_c + y_3 &= 20 \\ x_t, x_c, y_1, y_2, y_3 &\geq 0 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 81 \\ 55 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ x_c \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Etape 2: Transformer la solution courante

- On cherche une solution réalisable pour commencer:

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 9 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ x_c \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 81 \\ 55 \\ 20 \end{pmatrix}$$

Etape 2: Transformer la solution courante

- On cherche une solution réalisable pour commencer:

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 9 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ x_c \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 81 \\ 55 \\ 20 \end{pmatrix}$$

- Notre solution est-elle améliorable?

$$\max 6x_t + 4x_c$$

Pour l'instant x_t et x_c valent 0... Donc si on les rend positif, ça améliorera la valeur de la solution !

Etape 2: Transformer la solution courante

- On cherche une solution réalisable pour commencer:

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 9 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ x_c \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 81 \\ 55 \\ 20 \end{pmatrix}$$

- Notre solution est-elle améliorable?

$$\max 6x_t + 4x_c$$

  Pour l'instant x_t et x_c valent 0... Donc si on les rend positif, ça améliorera la valeur de la solution !

- On choisit une variable avec un coefficient positif dans l'objectif et on l'augmente "autant qu'on peut" (en maintenant les contraintes). $\rightarrow$ Choisissons arbitrairement x_t.

Test d'entrée

$$\begin{pmatrix} 3 & 9 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ x_c \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 81 \\ 55 \\ 20 \end{pmatrix}$$

- Si x_t est modifié (et x_c reste égal à 0) alors on doit toujours avoir:

$$3x_t + y_1 = 81$$
$$4x_t + y_2 = 55$$
$$2x_t + y_3 = 20$$

Test d'entrée

$$\begin{pmatrix} 3 & 9 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ x_c \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 81 \\ 55 \\ 20 \end{pmatrix}$$

- Si x_t est modifié (et x_c reste égal à 0) alors on doit toujours avoir:

$$3x_t + y_1 = 81$$
$$4x_t + y_2 = 55$$
$$2x_t + y_3 = 20$$

- Comme on doit toujours avoir y_1, y_2, y_3 positifs ou nuls on a:

$$\begin{aligned} x_t &\leq 17 && \text{contrainte 1} \\ x_t &\leq \frac{55}{4} && \text{contrainte 2} \\ x_t &\leq 10 && \text{contrainte 3} \end{aligned}$$

Test d'entrée

$$\begin{pmatrix} 3 & 9 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ x_c \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 81 \\ 55 \\ 20 \end{pmatrix}$$

- Si x_t est modifié (et x_c reste égal à 0) alors on doit toujours avoir:

$$3x_t + y_1 = 81$$
$$4x_t + y_2 = 55$$
$$2x_t + y_3 = 20$$

- Comme on doit toujours avoir y_1, y_2, y_3 positifs ou nuls on a:

$$x_t \leq 17 \quad \text{contrainte 1}$$
$$x_t \leq \frac{55}{4} \quad \text{contrainte 2}$$
$$x_t \leq 10 \quad \text{contrainte 3}$$

- Plus on augmente x_t mieux c'est (pour l'objectif) $\rightarrow$, on augmente x_t jusqu'à 10. A ce moment là, y_3 devient égal à 0.
  On dit alors que y_3 sort de la base et que x_t y rentre.

Variables basiques et hors base

$$\begin{pmatrix} 3 & 9 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ x_c \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 81 \\ 55 \\ 20 \end{pmatrix}$$

- On remarque la matrice restreinte aux y_i était l'identité.
  On supposera dorénavant que la matrice restreinte aux variables dans la base (ici les y_i) est l'identité.
  Les variables dans la base sont les seules qui **pourront être non nulles** dans la solution courante (ici $(0, 0, 81, 55, 20)$).

Variables basiques et hors base

$$\begin{pmatrix} 3 & 9 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ x_c \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 81 \\ 55 \\ 20 \end{pmatrix}$$

- On remarque la matrice restreinte aux y_i était l'identité.
  On supposera dorénavant que la matrice restreinte aux variables dans la base (ici les y_i) est l'identité.
  Les variables dans la base sont les seules qui **pourront être non nulles** dans la solution courante (ici $(0, 0, 81, 55, 20)$).
- Maintenant on ajouter x_t dans la base et en supprimer y_3.
  $\rightarrow$ Elimination de Jordan Gauss pour que la matrice restreinte aux colonnes de x_t, y_1, y_2 soit l'identité.

Variables basiques et hors base

$$\begin{pmatrix} 3 & 9 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ x_c \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 81 \\ 55 \\ 20 \end{pmatrix}$$

- On remarque la matrice restreinte aux y_i était l'identité.
  On supposera dorénavant que la matrice restreinte aux variables dans la base (ici les y_i) est l'identité.
  Les variables dans la base sont les seules qui **pourront être non nulles** dans la solution courante (ici $(0, 0, 81, 55, 20)$).
- Maintenant on ajouter x_t dans la base et en supprimer y_3.
  $\rightarrow$ Elimination de Jordan Gauss pour que la matrice restreinte aux colonnes de x_t, y_1, y_2 soit l'identité.

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{15}{2} & 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 3 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ x_c \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 51 \\ 15 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Variables basiques et hors base

$$\begin{pmatrix} 3 & 9 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ x_c \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 81 \\ 55 \\ 20 \end{pmatrix}$$

- On remarque la matrice restreinte aux y_i était l'identité.
  On supposera dorénavant que la matrice restreinte aux variables dans la base (ici les y_i) est l'identité.
  Les variables dans la base sont les seules qui **pourront être non nulles** dans la solution courante (ici $(0, 0, 81, 55, 20)$).
- Maintenant on ajouter x_t dans la base et en supprimer y_3.
  $\rightarrow$ Elimination de Jordan Gauss pour que la matrice restreinte aux colonnes de x_t, y_1, y_2 soit l'identité.

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{15}{2} & 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 3 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ x_c \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 51 \\ 15 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Nouvelle solution et objectifs

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{15}{2} & 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 3 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ x_c \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 51 \\ 15 \\ 10 \end{pmatrix}$$

- Nouvelle solution courante: $(10, 0, 51, 15, 0)$.
- On re-exprime la fonction objectif en fonction des variables hors base: $6x_t + 4x_c = (60 - 3x_c - 3y_3) + 4x_c = 60 + x_c - 3y_3$.

Nouvelle solution et objectifs

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{15}{2} & 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 3 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ x_c \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 51 \\ 15 \\ 10 \end{pmatrix}$$

- Nouvelle solution courante: $(10, 0, 51, 15, 0)$.
- On re-exprime la fonction objectif en fonction des variables hors base: $6x_t + 4x_c = (60 - 3x_c - 3y_3) + 4x_c = 60 + x_c - 3y_3$.

Remarques:

- On a simplement **ré-écrit** la matrice de contraintes.
  $\Rightarrow$ Les solutions du système sont toujours les mêmes. (Autrement dit, si vous pluggez $(0, 0, 81, 55, 20)$ dans ce système, ça vous donnera **toujours** une solution et sa valeur sera toujours 0).

Nouvelle solution et objectifs

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{15}{2} & 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 3 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ x_c \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 51 \\ 15 \\ 10 \end{pmatrix}$$

- Nouvelle solution courante: $(10, 0, 51, 15, 0)$.
- On re-exprime la fonction objectif en fonction des variables hors base: $6x_t + 4x_c = (60 - 3x_c - 3y_3) + 4x_c = 60 + x_c - 3y_3$.

Remarques:

- On a simplement **ré-écrit** la matrice de contraintes.
  $\Rightarrow$ Les solutions du système sont toujours les mêmes. (Autrement dit, si vous pluggez $(0, 0, 81, 55, 20)$ dans ce système, ça vous donnera **toujours** une solution et sa valeur sera toujours 0).
- Mais à chaque matrice on associe une solution appelée *basic feasible solution* qui correspond à "variables de la base" potentiellement non nulle et les autres sont nulles.

Nouvelle solution et objectifs

$$\max 60 + x_c - 3y_3$$

soumis à

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{15}{2} & 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 3 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ x_c \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 51 \\ 15 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Exercice:

1. Qui peut rentrer dans la base?
2. Qui doit en sortir?
3. Calculer la nouvelle matrice de contrainte et la nouvelle fonction objectif.

Solution optimale !

$$z = 65 - \frac{1}{3}y_2 - \frac{7}{3}y_3$$

sous les contraintes:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -5/2 & 7/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & -2/3 \\ 1 & 0 & 0 & -1/6 & 5/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ x_c \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27/2 \\ 5 \\ 15/2 \end{pmatrix}$$

Pour répondre à vos questions:

Solution optimale !

$$z = 65 - \frac{1}{3}y_2 - \frac{7}{3}y_3$$

sous les contraintes:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -5/2 & 7/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & -2/3 \\ 1 & 0 & 0 & -1/6 & 5/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ x_c \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27/2 \\ 5 \\ 15/2 \end{pmatrix}$$

Pour répondre à vos questions:

- Quelle est la solution? Il s'agit du point $(15/2, 5, 25/2, 0, 0)$.

Solution optimale !

$$z = 65 - \frac{1}{3}y_2 - \frac{7}{3}y_3$$

sous les contraintes:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -5/2 & 7/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & -2/3 \\ 1 & 0 & 0 & -1/6 & 5/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ x_c \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27/2 \\ 5 \\ 15/2 \end{pmatrix}$$

Pour répondre à vos questions:

- Quelle est la solution? Il s'agit du point $(15/2, 5, 25/2, 0, 0)$.
- Quelle est sa valeur? 65.

Solution optimale !

$$z = 65 - \frac{1}{3}y_2 - \frac{7}{3}y_3$$

sous les contraintes:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -5/2 & 7/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & -2/3 \\ 1 & 0 & 0 & -1/6 & 5/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ x_c \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27/2 \\ 5 \\ 15/2 \end{pmatrix}$$

Pour répondre à vos questions:

- Quelle est la solution? Il s'agit du point $(15/2, 5, 25/2, 0, 0)$.
- Quelle est sa valeur? 65.
- Pourquoi la solution est optimale? Le mieux que l'on puisse faire c'est d'avoir y_2 et y_3 équaux à 0... Et c'est justement le cas dans la solution courante !

Solution optimale !

$$z = 65 - \frac{1}{3}y_2 - \frac{7}{3}y_3$$

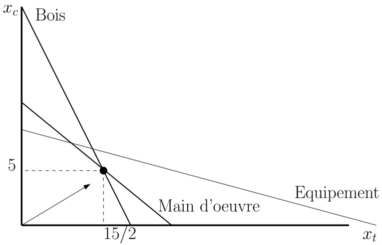
sous les contraintes:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -5/2 & 7/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & -2/3 \\ 1 & 0 & 0 & -1/6 & 5/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ x_c \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27/2 \\ 5 \\ 15/2 \end{pmatrix}$$

Pour répondre à vos questions:

- Quelle est la solution? Il s'agit du point $(15/2, 5, 25/2, 0, 0)$.
- Quelle est sa valeur? 65.
- Pourquoi la solution est optimale? Le mieux que l'on puisse faire c'est d'avoir y_2 et y_3 équaux à 0... Et c'est justement le cas dans la solution courante !
- Mais pourquoi ça termine? Et pourquoi ça marcherait à chaque fois? Et comment interpréter ce qu'on vient de faire? Et comment on fait pour commencer?

Interprétation géométrique



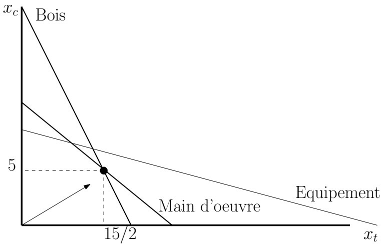
Au départ:

$$\max 6x_t + 4x_c$$

soumis à

$$\begin{pmatrix} 3 & 9 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ x_c \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 81 \\ 55 \\ 20 \end{pmatrix}$$

Interprétation géométrique



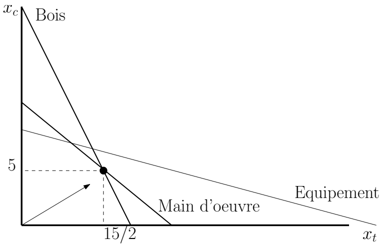
A l'étape intermédiaire:

$$\max 60 + x_c - 3y_3$$

soumis à

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{15}{2} & 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 3 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ x_c \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 51 \\ 15 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Interprétation géométrique



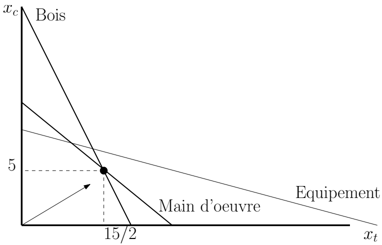
A la fin:

$$z = 65 - \frac{1}{3}y_2 - \frac{7}{3}y_3$$

soumis à:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -5/2 & 7/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & -2/3 \\ 1 & 0 & 0 & -1/6 & 5/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ x_c \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27/2 \\ 5 \\ 15/2 \end{pmatrix}$$

Interprétation géométrique



A la fin:

$$z = 65 - \frac{1}{3}y_2 - \frac{7}{3}y_3$$

soumis à:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -5/2 & 7/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & -2/3 \\ 1 & 0 & 0 & -1/6 & 5/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ x_c \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27/2 \\ 5 \\ 15/2 \end{pmatrix}$$

Théorème: Le Simplexe consiste à se "promener" de points extrêmes en points extrêmes en améliorant localement la solution !

Et pourquoi ça termine?

Remarque: L'algorithme du simplexe est en fait une classe d'algorithme qui dépend de la règle de pivot choisie (choix de la variable qui rentre et qui sort).

Et pourquoi ça termine?

Remarque: L'algorithme du simplexe est en fait une classe d'algorithme qui dépend de la règle de pivot choisie (choix de la variable qui rentre et qui sort).

Théorème 1: Si il n'existe pas $(n+1)$ droites qui s'intersectent en un même point (système non dégénéré), alors on améliore strictement la solution à chaque étape et l'algorithme termine.

Et pourquoi ça termine?

Remarque: L'algorithme du simplexe est en fait une classe d'algorithme qui dépend de la règle de pivot choisie (choix de la variable qui rentre et qui sort).

Théorème 1: Si il n'existe pas $(n + 1)$ droites qui s'intersectent en un même point (système non dégénéré), alors on améliore strictement la solution à chaque étape et l'algorithme termine.

Dans les autre cas ce n'est pas clair... Ca dépend de quelle variable on choisit pour rentrer et sortir...

Algorithme du Simplexe proposé en 1947 par Dantzig.
Première règle de terminaison: Bland en 1977 !

Et pourquoi ça termine?

Remarque: L'algorithme du simplexe est en fait une classe d'algorithme qui dépend de la règle de pivot choisie (choix de la variable qui rentre et qui sort).

Théorème 1: Si il n'existe pas $(n+1)$ droites qui s'intersectent en un même point (système non dégénéré), alors on améliore strictement la solution à chaque étape et l'algorithme termine.

Dans les autre cas ce n'est pas clair... Ca dépend de quelle variable on choisit pour rentrer et sortir...

Algorithme du Simplexe proposé en 1947 par Dantzig.
Première règle de terminaison: Bland en 1977 !

Théorème 2: (Bland) Il existe une règle (déterministe) qui garantit que le Simplexe termine en temps fini.

Complexité

Problème ouvert: Existe-t-il une règle (déterministe) qui garantit que le Simplexe termine en temps polynomial?

Complexité

Problème ouvert: Existe-t-il une règle (déterministe) qui garantit que le Simplexe termine en temps polynomial?

Conjecture: Il existe toujours une suite d'étapes de longueur $n + m$ pour aller de n'importe quel point extrême à la solution optimale.

Problème ouvert: Existe-t-il une règle (déterministe) qui garantit que le Simplexe termine en temps polynomial?

Conjecture: Il existe toujours une suite d'étapes de longueur $n + m$ pour aller de n'importe quel point extrême à la solution optimale.

Mais il y a quand même deux bonnes nouvelles:

- En pratique, l'algorithme du Simplexe fonctionne bien ($3/2(n + m)$ itérations en moyenne).

Complexité

Problème ouvert: Existe-t-il une règle (déterministe) qui garantit que le Simplexe termine en temps polynomial?

Conjecture: Il existe toujours une suite d'étapes de longueur $n + m$ pour aller de n'importe quel point extrême à la solution optimale.

Mais il y a quand même deux bonnes nouvelles:

- En pratique, l'algorithme du Simplexe fonctionne bien ($3/2(n + m)$ itérations en moyenne).
- En théorie. L'algorithme dit "de l'ellipsoïde" peut résoudre *tous* les programmes linéaires en temps polynomial dans le pire des cas? Mais il est difficile à comprendre, à implémenter et (beaucoup) moins efficace en pratique.

Comment commencer?

$$\begin{pmatrix} 3 & 9 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ x_c \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 81 \\ 55 \\ 20 \end{pmatrix}$$

On a besoin d'une sous-matrice restreinte à l'identité...
$\Rightarrow$ Pour l'obtenir, on peut créer un autre Simplexe qui va soit:

- garantir qu'il n'exite aucune solution ou,
- trouver un point extrême.

Petite remarque d'importance

Notons que la solution optimale n'est pas entière. Et fabriquer 7.5 tables n'a pas de sens.
Pour "résoudre" le problème il suffit d'*arrondir la solution optimale à l'entier inférieur*, ce qui ne modifie (en général) pas sensiblement la valeur obtenue (surtout quand elle la production est de plusieurs centaines / milliers).

Petite remarque d'importance

Notons que la solution optimale n'est pas entière. Et fabriquer 7.5 tables n'a pas de sens.
Pour "résoudre" le problème il suffit d'*arrondir la solution optimale à l'entier inférieur*, ce qui ne modifie (en général) pas sensiblement la valeur obtenue (surtout quand elle la production est de plusieurs centaines / milliers).

Faire un tel arrondi peut néanmoins se révéler problématique si:

- L'industriel veut réellement une solution optimale (c'est rare).
- Les entiers sont "petits" et arrondir modifie sensiblement la valeur de la solution optimale (ça peut arriver).

Plus qu'une solution

$$z = 65 - \frac{1}{3}y_2 - \frac{7}{3}y_3$$

$$\text{sous les contraintes} \begin{pmatrix} 27/2 \\ 5 \\ 15/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -5/2 & 7/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & -2/3 \\ 1 & 0 & 0 & -1/6 & 5/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ x_c \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

- La solution optimale et la valeur

Plus qu'une solution

$$z = 65 - \frac{1}{3}y_2 - \frac{7}{3}y_3$$

$$\text{sous les contraintes} \begin{pmatrix} 27/2 \\ 5 \\ 15/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -5/2 & 7/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & -2/3 \\ 1 & 0 & 0 & -1/6 & 5/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ x_c \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

- La solution optimale et la valeur
- On sait quelles sont les contraintes qui sont serrées pour cette solution optimale.
  Contrainte serrée $\Leftrightarrow$ Variable d'écart hors base.

Plus qu'une solution

$$z = 65 - \frac{1}{3}y_2 - \frac{7}{3}y_3$$

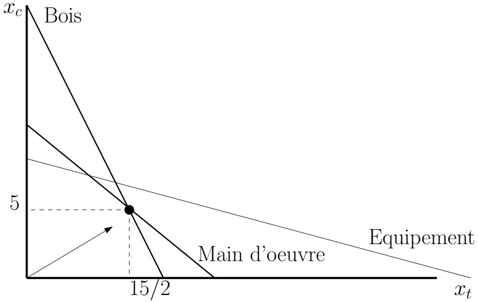
$$\text{sous les contraintes } \begin{pmatrix} 27/2 \\ 5 \\ 15/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -5/2 & 7/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & -2/3 \\ 1 & 0 & 0 & -1/6 & 5/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ x_c \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

- La solution optimale et la valeur
- On sait quelles sont les contraintes qui sont serrées pour cette solution optimale.
  Contrainte serrée $\Leftrightarrow$ Variable d'écart hors base.
- Mais on peut aussi déterminer comment évolue la solution optimale si on modifie localement la solution...etc...

$\Rightarrow$ On appelle ça l'analyse de sensibilité.

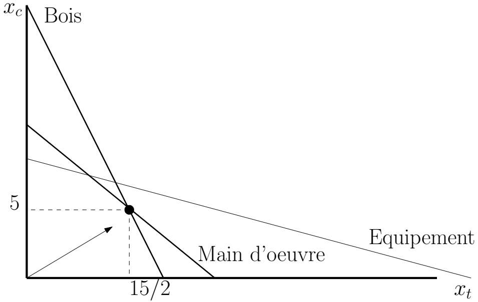
Exemple

Notre entrepreneur reçoit une aide. Il peut soit augmenter d'une unité l'équipement, le temps de travail ou la quantité de bois. Quel est le meilleur choix?



Exemple

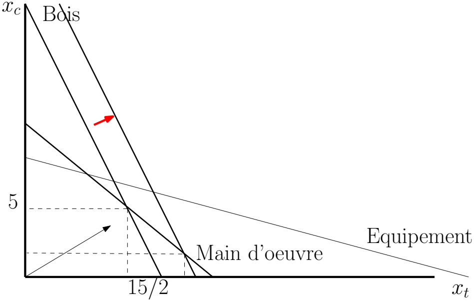
Notre entrepreneur reçoit une aide. Il peut soit augmenter d'une unité l'équipement, le temps de travail ou la quantité de bois. Quel est le meilleur choix?



- Investir pour ajouter de l'équipement ne sert à rien: ce n'est pas un facteur limitant !

Exemple

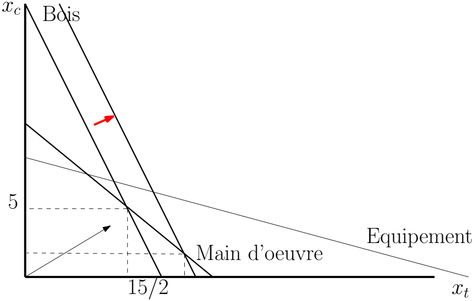
Notre entrepreneur reçoit une aide. Il peut soit augmenter d'une unité l'équipement, le temps de travail ou la quantité de bois. Quel est le meilleur choix?



- Investir pour ajouter de l'équipement ne sert à rien: ce n'est pas un facteur limitant !
- Modifier les autres modifie le point (et donc probablement la valeur) optimal(e).

Exemple

Notre entrepreneur reçoit une aide. Il peut soit augmenter d'une unité l'équipement, le temps de travail ou la quantité de bois. Quel est le meilleur choix?



- Investir pour ajouter de l'équipement ne sert à rien: ce n'est pas un facteur limitant !
- Modifier les autres modifie le point (et donc probablement la valeur) optimal(e).

$\Rightarrow$ On peut lire sur le graphique (avec un peu de calcul) l'évolution de la solution optimale si on modifie un peu les contraintes.

Nouvel optimal graphiquement

Augmenter de 1 la production de bois consiste à remplacer la droite: $2x_t + x_c = 20$ par $2x_t + x_c = 21$.

Quel est le nouveau point optimal?
Comme nous n'avons fait qu'une légère translation, il est toujours à l'intersection des droites $2x_t + x_c = 21$ et $4x_t + 5x_c = 55$. Le point d'intersection des deux droites est:

$$\begin{cases} x_t = 25/3 \\ x_c = 13/3 \end{cases}$$

La valeur en ce point de la fonction objectif est $67 + \frac{1}{3}$ à comparer avec 65.
L'entrepreneur gagnera $\frac{7}{3}$ euros supplémentaires avec une unité de bois en plus !

Faire parler le simplexe

Question:
Peut-on faire la même chose avec l'algorithme du simplexe?

Réponse: OUI !

$$z = 65 - \frac{1}{3}y_2 - \frac{7}{3}y_3$$

$$\text{sous les contraintes} \begin{pmatrix} 27/2 \\ 5 \\ 15/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -5/2 & 7/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & -2/3 \\ 1 & 0 & 0 & -1/6 & 5/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ x_c \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Faire parler le simplexe

Question:
Peut-on faire la même chose avec l'algorithme du simplexe?

Réponse: OUI !

$$z = 65 - \frac{1}{3}y_2 - \frac{7}{3}y_3$$

$$\text{sous les contraintes} \begin{pmatrix} 27/2 \\ 5 \\ 15/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -5/2 & 7/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & -2/3 \\ 1 & 0 & 0 & -1/6 & 5/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ x_c \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Cas 1: la variable d'écart est dans la base.

La fonction objectif s'écrit sous la forme:

Constante − (fonction positive des variables *NB* qui ne sont pas dans la base).

Si on augmente d'une unité le terme droit, on peut diminuer d'autant la variable d'écart pour obtenir une nouvelle solution qui maintient toutes les variables de *NB* à 0.
⇒ Une modification locale ne change pas l'optimum.

Modification de la solution optimale

$$z = 65 - \frac{1}{3}y_2 - \frac{7}{3}y_3$$

$$\text{sous les contraintes} \begin{pmatrix} 27/2 \\ 5 \\ 15/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -5/2 & 7/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & -2/3 \\ 1 & 0 & 0 & -1/6 & 5/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ x_c \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Cas 2: la variable d'écart est hors de la base.

Supposons maintenant qu'on augmente d'une unité la quantité de bois.

Modification de la solution optimale

$$z = 65 - \frac{1}{3}y_2 - \frac{7}{3}y_3$$

$$\text{sous les contraintes } \begin{pmatrix} 27/2 \\ 5 \\ 15/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -5/2 & 7/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & -2/3 \\ 1 & 0 & 0 & -1/6 & 5/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ x_c \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Cas 2: la variable d'écart est hors de la base.

Supposons maintenant qu'on augmente d'une unité la quantité de bois.

Le tour de passe passe !

$$\begin{aligned} &\{2x_t + x_c + y_3 = 21, y_3 \geq 0\} \\ \Leftrightarrow &\{2x_t + x_c + (y_3 - 1) = 20, y_3 \geq 0\} \\ \Leftrightarrow &\{2x_t + x_c + y_3 = 20, y_3 \geq -1\} \end{aligned}$$

Donc au lieu d'avoir la limite $y_3 = 0$, on a la limite $y_3 = -1$. Donc le z optimal n'est plus 65 mais $65 + \frac{7}{3}$ car on peut maintenant avoir $y_3 = -1$. La valeur optimale augmente donc de $\frac{7}{3}$ si on augmente d'une unité la quantité de bois.

Où est l'arnaque?

Pour dire cela il nous faut supposer qu'il existe une solution qui satisfait $y_3 = -1$ et $y_2 = 0$, i.e. il faut être sûr que la base de la solution optimale ne change pas.

On va voir juste après qu'on est capable de calculer l'intervalle sur lequel on peut faire cette opération sans changer la base ! (Et donc savoir si quel intervalle on gagne réellement $\frac{7}{3}$.)

Où est l'arnaque?

Pour dire cela il nous faut supposer qu'il existe une solution qui satisfait $y_3 = -1$ et $y_2 = 0$, i.e. il faut être sûr que la base de la solution optimale ne change pas.

On va voir juste après qu'on est capable de calculer l'intervalle sur lequel on peut faire cette opération sans changer la base ! (Et donc savoir si quel intervalle on gagne réellement $\frac{7}{3}$.)

Exercice:

1. En supposant que la base ne change pas, de combien augmente la valeur optimale si on augmente de 1 la main d'oeuvre?
2. Vérifier que vous retrouvez le même résultat graphiquement.

Valeur marginale

Soit (P) un programme linéaire sous forme standard sur lequel on a appliqué l'algorithme du simplexe. La fonction objectif finale s'écrit:

$$z = V - \sum_{i \in X} c_i x_i$$

où les x_i sont les variables et les c_i sont appelés les valeurs marginales des variables.

- V est la valeur optimale.
- Toutes les valeurs marginales sont positives ou nulles (condition d'arrêt de l'algorithme du simplexe).
- Si x_i est une variable d'écart, alors c_i le revenu supplémentaire si on augmente de 1 le terme droit de la contrainte dont la variable d'écart est x_i.

Valeur marginale

Soit (P) un programme linéaire sous forme standard sur lequel on a appliqué l'algorithme du simplexe. La fonction objectif finale s'écrit:

$$z = V - \sum_{i \in X} c_i x_i$$

où les x_i sont les variables et les c_i sont appelés les valeurs marginales des variables.

- V est la valeur optimale.
- Toutes les valeurs marginales sont positives ou nulles (condition d'arrêt de l'algorithme du simplexe).
- Si x_i est une variable d'écart, alors c_i le revenu supplémentaire si on augmente de 1 le terme droit de la contrainte dont la variable d'écart est x_i.

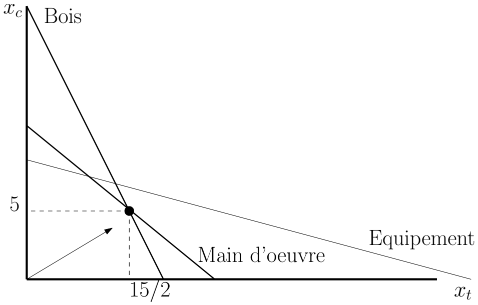
Remarque:

- Une "*vraie*" variable x est la variable d'écart de la contrainte $x \geq 0$.
- Si une variable d'écart est dans la base, sa valeur marginale est nulle. Donc modifier le terme droit n'a pas d'impact.

Exemple (suite)

Notre producteur sait maintenant que chaque fois qu'il rajoute une unité de bois, il gagne $\frac{7}{3}$ euros. Mais ça ne durera pas éternellement. Dans quel intervalle cela est-il valide?

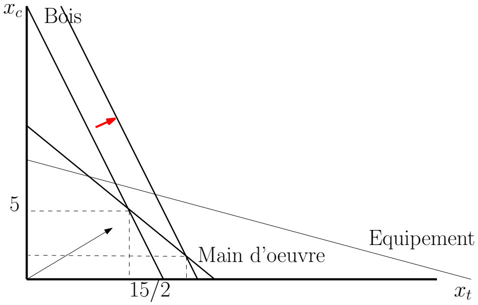
Autrement dit: *jusqu'à quand la contrainte restera-t-elle limitante?*



Exemple (suite)

Notre producteur sait maintenant que chaque fois qu'il rajoute une unité de bois, il gagne $\frac{7}{3}$ euros. Mais ça ne durera pas éternellement. Dans quel intervalle cela est-il valide?

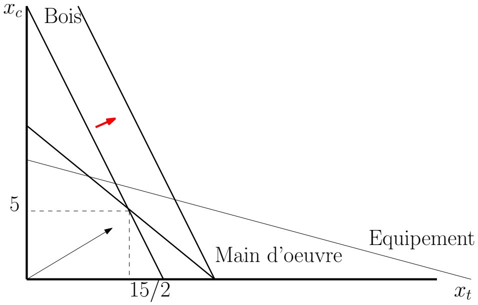
Autrement dit: *jusqu'à quand la contrainte restera-t-elle limitante?*



Exemple (suite)

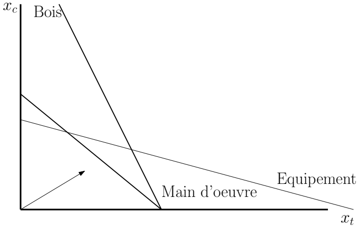
Notre producteur sait maintenant que chaque fois qu'il rajoute une unité de bois, il gagne $\frac{7}{3}$ euros. Mais ça ne durera pas éternellement. Dans quel intervalle cela est-il valide?

Autrement dit: *jusqu'à quand la contrainte restera-t-elle limitante?*



$\Rightarrow$ Jusqu'à ce que notre point optimal rencontre une autre contrainte !

Bilan graphique

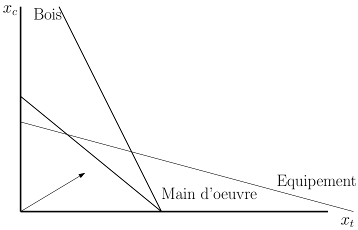


La limite se situe sur le point d'intersection entre $x_c = 0$ et la contrainte de main d'oeuvre.
On est donc en

$$\begin{cases} x_t & = 55/2 \\ x_c & = 0 \end{cases}$$

La variable qui sort dans la base est x_c lorsque la quantité de bois est $2 \cdot 55/4 + 1 \cdot 0 = 55/2$.
La quantité de bois qui peut être rajoutée vaut $55/2 - 20 = 15/2$.

Bilan graphique



La limite se situe sur le point d'intersection entre $x_c = 0$ et la contrainte de main d'oeuvre.
On est donc en

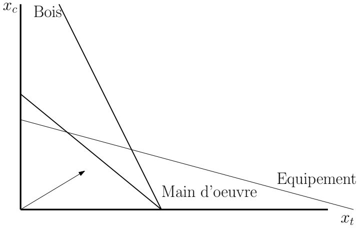
$$\begin{cases} x_t & = 55/2 \\ x_c & = 0 \end{cases}$$

La variable qui sort dans la base est x_c lorsque la quantité de bois est $2 \cdot 55/4 + 1 \cdot 0 = 55/2$.
La quantité de bois qui peut être rajoutée vaut $55/2 - 20 = 15/2$.

Bilan: Graphiquement il est possible de:

- Déterminer dans quel intervalle autour de la solution notre base n'est pas modifiée.
- Déterminer quelle variable sort dans la base quand elle change.

Bilan graphique



La limite se situe sur le point d'intersection entre $x_c = 0$ et la contrainte de main d'oeuvre.
On est donc en

$$\begin{cases} x_t & = 55/2 \\ x_c & = 0 \end{cases}$$

La variable qui sort dans la base est x_c lorsque la quantité de bois est $2 \cdot 55/4 + 1 \cdot 0 = 55/2$.
La quantité de bois qui peut être rajoutée vaut $55/2 - 20 = 15/2$.

Bilan: Graphiquement il est possible de:

- Déterminer dans quel intervalle autour de la solution notre base n'est pas modifiée.
- Déterminer quelle variable sort dans la base quand elle change.

Question:
Peut-on faire la même chose avec la solution du simplexe?

Avec le simplexe

$$z = V - \sum_i c_i x_i$$

$$\text{sous les contraintes} \begin{pmatrix} b_1 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & Id_n & & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

Cas 1: la variable d'écart (x_1) est dans la base.

Avec le simplexe

$$z = V - \sum_i c_i x_i$$

$$\text{sous les contraintes} \begin{pmatrix} b_1 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & Id_n & & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

Cas 1: la variable d'écart (x_1) est dans la base.
Par définition, la valeur de la variable d'écart correspond à la distance du point optimal à la contrainte.
Pour maximiser la fonction objectif, on désire maintenir toutes les variables hors base à 0 (les c_i sont positifs). On désire donc juste déterminer si le système suivant à une solution:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & Id_n & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

Dans la contrainte correspondant à x_1, si on modifie le terme de droite par δ, alors en utilisant le tour de passe-passe, on peut dire qu'on diminue de δ la variable d'écart x_1 à la place. Cela reste possible tant que $x_1 - \delta = b_1$ à une solution positive, i.e. $-\delta \leq b_1 \Leftrightarrow \delta \geq -b_1$.

Bilan:

Si la variable d'écart x_i est dans la base alors le terme droit peut être modifié de δ sans changer la base tant que $\delta \geq -b_i$ où b_i est la valeur de x_i dans la solution optimale.

Bilan:
Si la variable d'écart x_i est dans la base alors le terme droit peut être modifié de δ sans changer la base tant que $\delta \geq -b_i$ où b_i est la valeur de x_i dans la solution optimale.

Exemple: variable d'écart d'équipement.

$$z = 65 - \frac{1}{3}y_2 - \frac{7}{3}y_3$$

$$\text{sous les contraintes } \begin{pmatrix} 27/2 \\ 5 \\ 15/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -5/2 & 7/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & -2/3 \\ 1 & 0 & 0 & -1/6 & 5/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ x_c \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

- Si on veut augmenter l'équipement: pas de limite.
- Si on veut diminuer l'équipement: changement après une diminution de 27/2.

Avec le simplexe (suite)

Cas 2: la variable d'écart n'est pas dans la base

Soit (P) un PL sous forme standard. Supposons qu'à la fin de l'exécution de l'algorithme du simplexe, on ait une matrice qui s'écrive sous la forme suivante:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \cdots & a_{1i} & \cdots \\ Id_n & \cdots & \cdots & \cdots \\ & \cdots & a_{ni} & \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdots \\ y_i \\ \cdots \end{pmatrix}$$

Supposons que l'on modifie le terme de droite dans la $i$ème contrainte en lui ajoutant δ. D'après le tour de passe-passe, on peut dire qu'on diminue de δ la variable d'écart y_i à la place.
On cherche une solution où on ne change pas la base, cela revient à dire que l'on cherche à déterminer si il existe une solution où y_i vaut $-\delta$ et toutes les autres variables hors de la base valent toujours 0.
Donc on cherche à déterminer l'existence d'une solution positive de:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & a_{1i} \\ Id_n & \cdots \\ & a_{n_i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \\ -\delta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & Id_n & & a_{1i} \\ & & & \cdots \\ & & & a_{n_i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \\ -\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} - \delta \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \cdots \\ a_{n_i} \end{pmatrix}$$

Comme tous les x_j n'apparaissent que dans une seule équation avec un coefficient positif, il existe une solution positive au système si et seulement si:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix} \geq -\delta \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \cdots \\ a_{n_i} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \delta \geq \frac{-b_j}{a_{ji}} & \text{pour } \textbf{tout } j \text{ tel que } a_{ji \geq 0}. \\ \delta \leq \frac{-b_j}{a_{ji}} & \text{pour } \textbf{tout } j \text{ tel que } a_{ji \leq 0}. \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & Id_n & & a_{1i} \\ & & & \cdots \\ & & & a_{n_i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \\ -\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} - \delta \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \cdots \\ a_{n_i} \end{pmatrix}$$

Comme tous les x_j n'apparaissent que dans une seule équation avec un coefficient positif, il existe une solution positive au système si et seulement si:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix} \geq -\delta \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \cdots \\ a_{n_i} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \delta \geq \frac{-b_j}{a_{ji}} & \text{pour } \textbf{tout } j \text{ tel que } a_{ji \geq 0}. \\ \delta \leq \frac{-b_j}{a_{ji}} & \text{pour } \textbf{tout } j \text{ tel que } a_{ji \leq 0}. \end{cases}$$

Bilan:

- Le terme droit peut être augmenté de $\min_{j/a_{ji} \leq 0} \frac{-b_j}{a_{ji}}$.
- Le terme droit peut être diminué de $-\max_{j/a_{ji} \geq 0} \frac{-b_j}{a_{ji}}$.
- La variable qui sort de la base est la variable de la base correspond à ligne pour laquelle ce minimum est atteint.

Exemple: augmentation du bois

$$z = 65 - \frac{1}{3}y_2 - \frac{7}{3}y_3$$

$$\text{sous les contraintes} \begin{pmatrix} 27/2 \\ 5 \\ 15/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -5/2 & 7/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & -2/3 \\ 1 & 0 & 0 & -1/6 & 5/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ x_c \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

On a vu qu'il fallait résoudre les équations suivantes:

$$\left\{ \begin{array}{rl} 27/2 \geq & -\delta \cdot 7/2 \\ 5 \geq & -(-\delta) \cdot 2/3 \\ 15/2 \geq & -\delta \cdot 5/6 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rl} \delta \geq & -27/7 \\ \delta \leq & 15/2 \\ \delta \geq & -9 \end{array} \right.$$

Exemple: augmentation du bois

$$z = 65 - \frac{1}{3}y_2 - \frac{7}{3}y_3$$

$$\text{sous les contraintes} \begin{pmatrix} 27/2 \\ 5 \\ 15/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -5/2 & 7/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & -2/3 \\ 1 & 0 & 0 & -1/6 & 5/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ x_c \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

On a vu qu'il fallait résoudre les équations suivantes:

$$\left\{ \begin{array}{rl} 27/2 \geq & -\delta \cdot 7/2 \\ 5 \geq & -(-\delta) \cdot 2/3 \\ 15/2 \geq & -\delta \cdot 5/6 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rl} \delta \geq & -27/7 \\ \delta \leq & 15/2 \\ \delta \geq & -9 \end{array} \right.$$

Conclusion:

- La contrainte de bois reste serrée entre $20 - 27/7$ et $20 + 15/2$.

Exemple: augmentation du bois

$$z = 65 - \frac{1}{3}y_2 - \frac{7}{3}y_3$$

sous les contraintes $\begin{pmatrix} 27/2 \\ 5 \\ 15/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -5/2 & 7/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & -2/3 \\ 1 & 0 & 0 & -1/6 & 5/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ x_c \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

On a vu qu'il fallait résoudre les équations suivantes:

$$\begin{cases} 27/2 \geq & -\delta \cdot 7/2 \\ 5 \geq & -(-\delta) \cdot 2/3 \\ 15/2 \geq & -\delta \cdot 5/6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \delta \geq & -27/7 \\ \delta \leq & 15/2 \\ \delta \geq & -9 \end{cases}$$

Conclusion:

- La contrainte de bois reste serrée entre $20 - 27/7$ et $20 + 15/2$.
- En $20 - 27/7$, y_1 sort de la base.
- En 27.5, x_c sort de la base.

✓ Conforme à l'analyse graphique: x_c sort $\Leftrightarrow x_c = 0$!

Analyse sensitive: Bilan

Étant donné un programme linéaire en forme standard et une solution optimale de ce programme linéaire, on connaît:

- La solution optimale, les contraintes serrées.
- L'évolution de la solution optimale si on modifie les termes droits.
- Sur quelle intervalle cette modification est valide.
- Quelle contraintes entrent et sortent de la base aux points limites.

Analyse sensitive: Bilan

Étant donné un programme linéaire en forme standard et une solution optimale de ce programme linéaire, on connaît:

- La solution optimale, les contraintes serrées.
- L'évolution de la solution optimale si on modifie les termes droits.
- Sur quelle intervalle cette modification est valide.
- Quelle contraintes entrent et sortent de la base aux points limites.

Remarque:
Mais ce n'est pas tout, on pourrait encore faire plein d'autres choses en étudiant la solution du Simplexe. On peut par exemple:

- Déterminer quand change le mélange optimal si on modifie la fonction objectif.
- Déterminer les variables entrants et sortant de la base lorsque le mélange est modifié.
- Étudier l'intérêt de fabriquer un nouveau produit.

Mais ceci est une autre histoire...

Exercices

1. Quel est l'intervalle sur lequel la contrainte de main d'oeuvre reste serrée?
2. Quand on quitte cet intervalle, quelles sont les contraintes qui rentrent et qui sortent de la base?

Analyse de sensibilité et dualité

Nous avons vu que nous pouvons déterminer combien que l'on gagnerait $\frac{7}{3}$ en plus si on augmentait d'une unité le bois.
Similairement, diminuer d'une unité la quantité de bois nous ferait perdre $\frac{7}{3}$ d'euros.

Avec une unité d'équipement, on ne gagne rien en plus. Et avec une unité en moins, on ne perd rien.

Analyse de sensibilité et dualité

Nous avons vu que nous pouvons déterminer combien que l'on gagnerait $\frac{7}{3}$ en plus si on augmentait d'une unité le bois.
Similairement, diminuer d'une unité la quantité de bois nous ferait perdre $\frac{7}{3}$ d'euros.

Avec une unité d'équipement, on ne gagne rien en plus. Et avec une unité en moins, on ne perd rien.

On nous propose de louer notre matériel.
A partir de quel prix faut-il accepter?

Analyse de sensibilité et dualité

Nous avons vu que nous pouvons déterminer combien que l'on gagnerait $\frac{7}{3}$ en plus si on augmentait d'une unité le bois.
Similairement, diminuer d'une unité la quantité de bois nous ferait perdre $\frac{7}{3}$ d'euros.

Avec une unité d'équipement, on ne gagne rien en plus. Et avec une unité en moins, on ne perd rien.

On nous propose de louer notre matériel.
A partir de quel prix faut-il accepter?

- L'équipement n'est pas intégralement utilisé dans la solution optimale. Une unité d'équipement ne nous rapporte rien ! On peut donc la louer pour (presque) rien.
- Par contre pour le bois, pas question de le brader, une unité nous rapporte $\frac{7}{3}$.

Analyse de sensibilité et dualité

Nous avons vu que nous pouvons déterminer combien que l'on gagnerait $\frac{7}{3}$ en plus si on augmentait d'une unité le bois.
Similairement, diminuer d'une unité la quantité de bois nous ferait perdre $\frac{7}{3}$ d'euros.

Avec une unité d'équipement, on ne gagne rien en plus. Et avec une unité en moins, on ne perd rien.

On nous propose de louer notre matériel.
A partir de quel prix faut-il accepter?

- L'équipement n'est pas intégralement utilisé dans la solution optimale. Une unité d'équipement ne nous rapporte rien ! On peut donc la louer pour (presque) rien.
- Par contre pour le bois, pas question de le brader, une unité nous rapporte $\frac{7}{3}$.

$\Rightarrow$ On peut donc créer une valeur qui correspond à chaque contrainte (ressource) qui dit à partir de quelle valeur on serait prêt à "louer" cette ressource.

Dualité (suite)

Et si l'on n'a pas résolu le système linéaire d'origine?

Comment faire pour savoir si on nous propose un “bon prix” pour nos ressources?

Dualité (suite)

Et si l'on n'a pas résolu le système linéaire d'origine?

Comment faire pour savoir si on nous propose un "bon prix" pour nos ressources?

- Créer une variable pour chacune des contraintes: y_e, y_b et y_h.
  La valeur de la variable correspondra au prix de la ressource.
- Comment choisir les bons prix?
  On sait par exemple qu'avec 3 équipement, 4 main d'oeuvre et 2 bois, on crée une table qui nous rapporte 6.
  $\Rightarrow 3y_e + 4y_h + 2y_b \geq 6$.
  Et on peut faire la même chose pour les chaises.

Dualité (suite)

Et si l'on n'a pas résolu le système linéaire d'origine?

Comment faire pour savoir si on nous propose un "bon prix" pour nos ressources?

- Créer une variable pour chacune des contraintes: y_e, y_b et y_h.
  La valeur de la variable correspondra au prix de la ressource.
- Comment choisir les bons prix?
  On sait par exemple qu'avec 3 équipement, 4 main d'oeuvre et 2 bois, on crée une table qui nous rapporte 6.
  $\Rightarrow 3y_e + 4y_h + 2y_b \geq 6$.
  Et on peut faire la même chose pour les chaises.
- Comme on n'est pas forcé d'utiliser tout l'équipement, on ne veut pas les louer à un prix négatif ! Donc y_e, y_h et y_b sont positives.

Dualité (suite)

Et si l'on n'a pas résolu le système linéaire d'origine?

Comment faire pour savoir si on nous propose un "bon prix" pour nos ressources?

- Créer une variable pour chacune des contraintes: y_e, y_b et y_h.
  La valeur de la variable correspondra au prix de la ressource.
- Comment choisir les bons prix?
  On sait par exemple qu'avec 3 équipement, 4 main d'oeuvre et 2 bois, on crée une table qui nous rapporte 6.
  $\Rightarrow 3y_e + 4y_h + 2y_b \geq 6$.
  Et on peut faire la même chose pour les chaises.
- Comme on n'est pas forcé d'utiliser tout l'équipement, on ne veut pas les louer à un prix négatif ! Donc y_e, y_h et y_b sont positives.

Autrement dit, on a les contraintes:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 9 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_e \\ y_h \\ y_b \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \text{et } y_e, y_h, y_b \geq 0$$

Quelque soit les valeurs de y_e, y_h et y_b qui satisfont les contraintes, nous sommes prêts à louer marchandise !

Contrainte, vous avez dit contrainte...

Du côté du loueur:

Le loueur, plutôt malin (et un peu radin), veut payer le moins cher possible. Il veut donc minimiser le prix qu'il paie pour 81 unités d'équipement, 55 unités de main d'oeuvre et 20 tonnes de bois.

Contrainte, vous avez dit contrainte...

Du côté du loueur:
Le loueur, plutôt malin (et un peu radin), veut payer le moins cher possible. Il veut donc minimiser le prix qu'il paie pour 81 unités d'équipement, 55 unités de main d'oeuvre et 20 tonnes de bois.

Bilan:
On désire résoudre

$$\min 81y_e + 55y_h + 20y_b$$

sous les contraintes

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 9 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_e \\ y_h \\ y_b \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Remarque:
Il s'agit d'un programme linéaire !

Dual d'un programme linéaire

$$\max 6x_t + 4x_c$$

sous les contraintes

$$\begin{pmatrix} 81 \\ 55 \\ 20 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ x_c \end{pmatrix}$$

$+$ positivité des variables

$$\min 81y_e + 55y_h + 20y_b$$

sous les contraintes

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 9 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_e \\ y_h \\ y_b \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$+$ positivité des variables

Dual d'un programme linéaire

$$\max 6x_t + 4x_c$$

sous les contraintes

$$\begin{pmatrix} 81 \\ 55 \\ 20 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ x_c \end{pmatrix}$$

+ positivité des variables

$$\min 81y_e + 55y_h + 20y_b$$

sous les contraintes

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 9 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_e \\ y_h \\ y_b \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

+ positivité des variables

Dual d'un programme linéaire

$$\max 6x_t + 4x_c$$

sous les contraintes

$$\begin{pmatrix} 81 \\ 55 \\ 20 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ x_c \end{pmatrix}$$

+ positivité des variables

$$\min 81y_e + 55y_h + 20y_b$$

sous les contraintes

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 9 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_e \\ y_h \\ y_b \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

+ positivité des variables

Dual d'un programme linéaire

$$\max 6x_t + 4x_c$$

sous les contraintes

$$\begin{pmatrix} 81 \\ 55 \\ 20 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ x_c \end{pmatrix}$$

$+$ positivité des variables

$$\min 81y_e + 55y_h + 20y_b$$

sous les contraintes

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 9 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_e \\ y_h \\ y_b \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$+$ positivité des variables

Dual d'un programme linéaire

$$\max 6x_t + 4x_c$$

sous les contraintes

$$\begin{pmatrix} 81 \\ 55 \\ 20 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ x_c \end{pmatrix}$$

+ positivité des variables

$$\min 81y_e + 55y_h + 20y_b$$

sous les contraintes

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 9 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_e \\ y_h \\ y_b \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

+ positivité des variables

Dual d'un programme linéaire

$$\max 6x_t + 4x_c$$

sous les contraintes

$$\begin{pmatrix} 81 \\ 55 \\ 20 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ x_c \end{pmatrix}$$

$+$ positivité des variables

$$\min 81y_e + 55y_h + 20y_b$$

sous les contraintes

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 9 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_e \\ y_h \\ y_b \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$+$ positivité des variables

Dual d'un programme linéaire

$$\max 6x_t + 4x_c$$

sous les contraintes

$$\begin{pmatrix} 81 \\ 55 \\ 20 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ x_c \end{pmatrix}$$

+ positivité des variables

$$\min 81y_e + 55y_h + 20y_b$$

sous les contraintes

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 9 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_e \\ y_h \\ y_b \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

+ positivité des variables

Définition:
Le dual du programme linéaire

$$\max c^t x \quad \text{soumis à} \quad Ax \leq b \text{ et } x \geq 0$$

est le programme linéaire

$$\min b^t y \quad \text{soumis à} \quad y^t A \geq c \text{ et } y \geq 0$$

Écriture du programme dual

Définition

Le nouveau programme linéaire s'appelle le Programme Linéaire dual. Celui d'origine s'appellera le Programme Linéaire primal.

Écriture du programme dual

Définition

Le nouveau programme linéaire s'appelle le Programme Linéaire dual. Celui d'origine s'appellera le Programme Linéaire primal.

Primal	*Dual*
max	*min*
Vecteur de contrainte	Fonction objectif
Fonction objectif	Vecteur de contrainte
Variables	Contraintes
Contraintes	Variables
Contrainte $\leq$	Variable ≥ 0
Contrainte $\geq$	Variable ≤ 0
Contrainte $=$	Variable non-contrainte
Variable ≥ 0	Contrainte $\geq$
Variable ≤ 0	Contrainte $\leq$
Variable non-contrainte	Contrainte $=$

Dualité contrainte $\Rightarrow$ variable

Primal	*Dual*
Contrainte $\leq$	Variable ≥ 0
Contrainte $\geq$	Variable ≤ 0
Contrainte $=$	Variable non-contrainte

Cas 1: Contrainte $\leq \Rightarrow$ Variable ≥ 0.
Définition.

Dualité contrainte ⇒ variable

Primal	*Dual*
Contrainte $\leq$	Variable ≥ 0
Contrainte $\geq$	Variable ≤ 0
Contrainte $=$	Variable non-contrainte

Cas 1: Contrainte $\leq \Rightarrow$ Variable ≥ 0.
Définition.

Cas 2: Contrainte $\geq \Rightarrow$ Variable ≤ 0.
On peut supposer que la contrainte s'écrit $\sum_i a_{ji}x_i \geq b$. C'est équivalent à $\sum_i -a_{ji}x_i \leq -b$.
$\Rightarrow$ On crée une variable $y \geq 0$ pour la contrainte dans le dual.

Quel est l'impact de ce changement d'inégalité?

- Dans la fonction objectif, le coefficient en y est $-by$.
- Dans chaque $i$ème contrainte du dual, le coefficient en y est $-a_{ji}y$.

Posons $z = -y$. Si on remplace y par $-z$, on obtient $z \leq 0$, les coefficients de z dans la fonction objectif est b et dans les contraintes sont a_{ji}.

Dualité contrainte $\Rightarrow$ variable

Cas 3: Contrainte $= \Rightarrow$ Variable non contrainte.
On peut remplacer la contrainte $\sum_i a_{ji}x_i = b$ par les deux contraintes $\sum_i a_{ji}x_i \geq b$ et $\sum_i a_{ji}x_i \leq b$.
Dans le dual (D), on crée deux variables pour la contrainte:

- une positive ou nulle, notée y (pour la contrainte $\geq$),
- l'autre négative ou nulle, notée y' (pour la contrainte $\leq$).

- Dans la fonction objectif, le coefficient de y et de y' est b.
- Dans la $i$ème contrainte du dual, le coefficient de y et de y' est a_{ji}.

Dualité contrainte $\Rightarrow$ variable

Cas 3: Contrainte $= \Rightarrow$ Variable non contrainte.
On peut remplacer la contrainte $\sum_i a_{ji}x_i = b$ par les deux contraintes $\sum_i a_{ji}x_i \geq b$ et $\sum_i a_{ji}x_i \leq b$.
Dans le dual (D), on crée deux variables pour la contrainte:

- une positive ou nulle, notée y (pour la contrainte $\geq$),
- l'autre négative ou nulle, notée y' (pour la contrainte $\leq$).

- Dans la fonction objectif, le coefficient de y et de y' est b.
- Dans la $i$ème contrainte du dual, le coefficient de y et de y' est a_{ji}.

Soit (D') le PL (D) où y et y' sont supprimés et une variable z ajoutée (notre idée: $z = y + y'$). Les coefficients pour z dans les contraintes du dual et dans la fonction objectif sont ceux de y (et y'). **On ne rajoute pas de contrainte de positivité.**
Un vecteur $(y_1, \ldots, y, y')$ est solution de (D) avec valeur v ssi $(y_1, \ldots, y + y')$ est solution de (D') avec valeur v.

Preuve: exercice.

Première propriétés du dual

Propriété

Le dual du dual est le primal.

Première propriétés du dual

Propriété

Le dual du dual est le primal.

Preuve:

$$\max c^t x \qquad \text{soumis à} \qquad Ax \leq b \text{ et } x \geq 0$$

a pour dual

$$\min b^t y \qquad \text{soumis à} \qquad y^t A \geq c^t \text{ et } y \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \max -b^t y \qquad \text{soumis à} \qquad -A^t y \leq -c \text{ et } y \geq 0$$

qui a pour dual

$$\min -c^t z \qquad \text{soumis à} \qquad z^t(-A^t) \geq -b^t \text{ et } z \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \max c^t z \qquad \text{soumis à} \qquad Az \leq b \text{ et } z \geq 0.$$

Liens entre solutions du primal et du dual

Solution optimale du primal: $$z = 65 - \frac{1}{3}y_2 - \frac{7}{3}y_3$$

$$\text{sous les contraintes} \begin{pmatrix} 27/2 \\ 5 \\ 15/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -5/2 & 7/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & -2/3 \\ 1 & 0 & 0 & -1/6 & 5/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ x_c \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Dual $$\min 81y_e + 55y_h + 20y_b$$

$$\text{sous les contraintes} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 9 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_e \\ y_h \\ y_b \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Liens entre solutions du primal et du dual

Solution optimale du primal: $$z = 65 - \frac{1}{3}y_2 - \frac{7}{3}y_3$$

$$\text{sous les contraintes } \begin{pmatrix} 27/2 \\ 5 \\ 15/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -5/2 & 7/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & -2/3 \\ 1 & 0 & 0 & -1/6 & 5/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ x_c \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Dual $$\min 81y_e + 55y_h + 20y_b$$

$$\text{sous les contraintes } \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 9 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_e \\ y_h \\ y_b \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Si on pose $y_h = \frac{1}{3}$, $y_b = \frac{7}{3}$ et $y_e = 0$.
On peut vérifier que ce triplet satisfait les contraintes du dual. De plus on a la valeur objectif:

$$81 \cdot 0 + 55/3 + 20 \cdot \frac{7}{3} = 195/3 = 65.$$

En lisant la solution du primal, on a donc trouvé une solution du dual.

Liens entre solutions du primal et du dual

Solution optimale du primal: $z = 65 - \frac{1}{3}y_2 - \frac{7}{3}y_3$

sous les contraintes $\begin{pmatrix} 27/2 \\ 5 \\ 15/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -5/2 & 7/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & -2/3 \\ 1 & 0 & 0 & -1/6 & 5/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ x_c \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

Dual $\min 81y_e + 55y_h + 20y_b$

sous les contraintes $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 9 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_e \\ y_h \\ y_b \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$

Si on pose $y_h = \frac{1}{3}$, $y_b = \frac{7}{3}$ et $y_e = 0$.
On peut vérifier que ce triplet satisfait les contraintes du dual. De plus on a la valeur objectif:

$$81 \cdot 0 + 55/3 + 20 \cdot \frac{7}{3} = 195/3 = 65.$$

En lisant la solution du primal, on a donc trouvé une solution du dual.

Question: Est-elle optimale?

Primal et dual

OUI !

OUI !

Pourquoi?

Soient z_c, z_t les variables d'écart pour les contraintes "chaises" et "tables" du dual.

On peut montrer que l'on obtient avec l'algorithme du simplexe la fonction objectif suivante quand on place y_e, z_c et z_t dans la base.

$$z = 65 + 27/2y_e + 5z_c + 15/2z_t$$

$\Rightarrow$ Comme on veut minimiser une fonction dans le dual, on ne peut plus améliorer la solution !

OUI !

Pourquoi?
Soient z_c, z_t les variables d'écart pour les contraintes "chaises" et "tables" du dual.
On peut montrer que l'on obtient avec l'algorithme du simplexe la fonction objectif suivante quand on place y_e, z_c et z_t dans la base.

$$z = 65 + 27/2 y_e + 5 z_c + 15/2 z_t$$

$\Rightarrow$ Comme on veut minimiser une fonction dans le dual, on ne peut plus améliorer la solution !

Solution optimale du primal: $$z = 65 - \frac{1}{3} y_2 - \frac{7}{3} y_3$$

sous les contraintes $$\begin{pmatrix} 27/2 \\ 5 \\ 15/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -5/2 & 7/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & -2/3 \\ 1 & 0 & 0 & -1/6 & 5/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ x_c \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Théorème des écarts complémentaires

Ceci est une version affaiblie du théorème du même nom:

Théorème

Si une contrainte est serrée dans le primal alors la variable associée est dans la base du dual (et donc non nulle).
Si une contrainte n'est pas serrée dans le primal alors la variable associée n'est pas dans la base du dual (et donc nulle).

Remarque:

- Fonctionne pour les variable d'écart.
- Fonctionne pour les contraintes de non-négativité.

Théorème faible de dualité

Théorème de dualité faible

Soit (P) un PL et (D) son dual. Soit x une solution de (P) de valeur[1] $Val(x)$ et y une solution de (D) de valeur $Val(y)$. Alors on a:

$$Val(x) \leq Val(y)$$

Comme toute solution du duale est meilleure que toute solution du primal, on a $OPT(D) \geq OPT(P)$.

[1]Terminologie: Val = valeur de la solution objectif. $OPT = \max_x Val(x)$

Théorème faible de dualité

Théorème de dualité faible

Soit (P) un PL et (D) son dual. Soit x une solution de (P) de valeur[1] $Val(x)$ et y une solution de (D) de valeur $Val(y)$. Alors on a:

$$Val(x) \leq Val(y)$$

Comme toute solution du duale est meilleure que toute solution du primal, on a $OPT(D) \geq OPT(P)$.

Preuve:

On peut supposer que toutes les variables d'un programme linéaire sont positives. Supposons que le PL s'écrive $\max c^t x$ soumis à $Ax \leq b$.

$$c^t x \leq y^t Ax \leq y^t b$$

La première inégalité est issu de la contrainte du dual $y^t A \geq c^t$.
La seconde vient du primal et de sa contrainte $Ax \leq b$.

[1] Terminologie: Val = valeur de la solution objectif. $OPT = \max_x Val(x)$

Théorème fort de dualité

Théorème de dualité fort

Soit (P) un programme linéaire et (D) son dual. On a:

$$OPT(P) = OPT(D)$$

Autrement dit la valeur optimale du primal et du dual sont égaux.

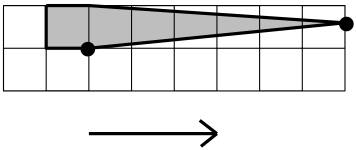
Preuve:
La preuve (d'algèbre linéaire) est beaucoup plus difficile et nous n'aurons malheureusement pas le temps de la traiter. Si vous êtes curieux, vous trouverez la preuve dans tous les cours d'Optimisation Combinatoire qui se respectent !

Meilleure solution entière?

Meilleure solution entière?

Existe-il toujours des solutions optimales entières? **NON**

Peut-on borner l'écart entre solution réelle optimale et solution entière optimale? **NON**
Graphiquement, on se rend bien compte que ce n'est pas surprenant car on construit facilement un effet de pointe.



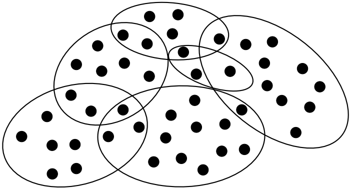
Mais en fait, on peut même obtenir ce genre de comportement en supposant que toutes les variables sont comprises entre 0 et 1.
Une des meilleures façons de l'illustrer est de regarder les problèmes du packing maximal et du transversal minimal.

Hypergraphe

Définition (hypergraphe)

Un hypergraphe $H = (V, E)$ est une paire où:

- V est un ensemble de sommets.
- E est un ensemble de **sous ensembles** de sommets appelés hyperarêtes.



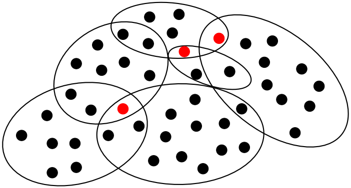
Utilisations:

- Quand on veut modéliser des relations qui ne sont pas binaires mais d'arité arbitrairement grande (ex. modéliser des groupes dans les réseaux sociaux).
- Généralisent et modélisent de nombreux problèmes de graphes.

Transversal d'hypergraphe

Définition (transversal)

Un transversal d'un hypergraphe $H = (V, E)$ est un ensemble de sommets qui contient au moins un sommet de chaque hyperarête.



Exemple:

- Si les hyperarêtes sont les arêtes d'un graphe alors un transversal est un ensemble de sommets qui permet de surveiller toutes les arêtes.
- Si les hyperarêtes sont les *st*-chemins dans le graphe, alors un transversal est exactement une coupe minimale.

Transversal minimum et programme linéaire

Soit $H = (V, E)$ un hypergraphe.

- Créons une variable x_v pour chaque sommet de l'hypergraphe.
- Le but est de minimiser la taille d'un transversal:

$$\tau = \min \sum_{v \in V} x_v.$$

- Pour chaque hyperarête on veut sélectionner au moins un sommet. Pour toute hyperarête $e \in E$:

$$\sum_{v \in e} x_v \geq 1.$$

- On veut soit prendre, soit ne pas prendre un sommet. Pour tout $v \in V$

$$x_v \in \{0, 1\}.$$

Écart d'intégralité

$$\tau = \min \sum_{v \in V} x_v$$

sous les contraintes:

$$\begin{array}{ll} \sum_{v \in e} x_v \geq 1 & \text{pour tout } e \in E \\ x_v \in \{0,1\} & \text{pour tout } v \in V \end{array}$$

Écart d'intégralité

$$\tau = \min \sum_{v \in V} x_v$$

sous les contraintes:

$$\begin{array}{ll} \sum_{v \in e} x_v \geq 1 & \text{pour tout } e \in E \\ x_v \in \{0,1\} & \text{pour tout } v \in V \end{array}$$

$$\tau^* = \min \sum_{v \in V} x_v$$

sous les contraintes:

$$\begin{array}{ll} \sum_{v \in e} x_v \geq 1 & \text{pour tout } e \in E \\ 0 \leq x_v \leq 1 & \text{pour tout } v \in V \end{array}$$

Le PL de droite s'appelle la relaxation fractionnaire du PL de gauche.
La valeur optimale de la relaxation fractionnaire est notée avec une $*$.

Écart d'intégralité

$$\tau = \min \sum_{v \in V} x_v$$

sous les contraintes:

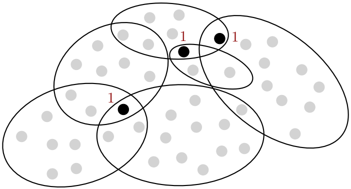
$$\begin{array}{ll} \sum_{v \in e} x_v \geq 1 & \text{pour tout } e \in E \\ x_v \in \{0,1\} & \text{pour tout } v \in V \end{array}$$

$$\tau^* = \min \sum_{v \in V} x_v$$

sous les contraintes:

$$\begin{array}{ll} \sum_{v \in e} x_v \geq 1 & \text{pour tout } e \in E \\ 0 \leq x_v \leq 1 & \text{pour tout } v \in V \end{array}$$

Le PL de droite s'appelle la relaxation fractionnaire du PL de gauche.
La valeur optimale de la relaxation fractionnaire est notée avec une $*$.



Écart d'intégralité

$$\tau = \min \sum_{v \in V} x_v$$

sous les contraintes:

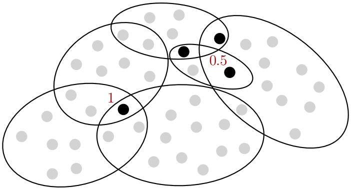
$$\begin{array}{ll} \sum_{v \in e} x_v \geq 1 & \text{pour tout } e \in E \\ x_v \in \{0,1\} & \text{pour tout } v \in V \end{array}$$

$$\tau^* = \min \sum_{v \in V} x_v$$

sous les contraintes:

$$\begin{array}{ll} \sum_{v \in e} x_v \geq 1 & \text{pour tout } e \in E \\ 0 \leq x_v \leq 1 & \text{pour tout } v \in V \end{array}$$

Le PL de droite s'appelle la relaxation fractionnaire du PL de gauche.
La valeur optimale de la relaxation fractionnaire est notée avec une $*$.



Écart d'intégralité

$$\tau = \min \sum_{v \in V} x_v$$

sous les contraintes:

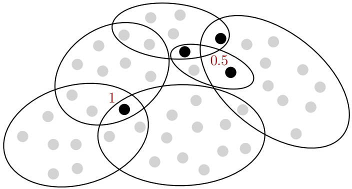
$$\begin{array}{ll} \sum_{v \in e} x_v \geq 1 & \text{pour tout } e \in E \\ x_v \in \{0,1\} & \text{pour tout } v \in V \end{array}$$

$$\tau^* = \min \sum_{v \in V} x_v$$

sous les contraintes:

$$\begin{array}{ll} \sum_{v \in e} x_v \geq 1 & \text{pour tout } e \in E \\ 0 \leq x_v \leq 1 & \text{pour tout } v \in V \end{array}$$

Le PL de droite s'appelle la relaxation fractionnaire du PL de gauche. La valeur optimale de la relaxation fractionnaire est notée avec une $*$.



L'écart entre l'optimal du programme linéaire d'origine et sa relaxation fractionnaire est appelé l'écart d'intégralité.

Question: Peut-on borner l'écart d'intégralité?

NON !

NON !

$$\tau = \min \sum_{v \in V} x_v$$

sous les contraintes:

$$\begin{array}{ll} \sum_{v \in e} x_v \geq 1 & \text{pour tout } e \in E \\ x_v \in \{0,1\} & \text{pour tout } v \in V \end{array}$$

$$\tau^* = \min \sum_{v \in V} x_v$$

sous les contraintes:

$$\begin{array}{ll} \sum_{v \in e} x_v \geq 1 & \text{pour tout } e \in E \\ 0 \leq x_v \leq 1 & \text{pour tout } v \in V \end{array}$$

Exemple:

- $V = \{1, \ldots, 2n-1\}$.
- $e \in E$ si et seulement si $|e| = n$.

$\tau \geq n$.

Par contradiction. Si on ne sélectionne que $n-1$ sommets, il reste n sommets dans le complémentaire. Comme tous les ensembles de taille n sont des hyperarêtes, une hyperarête n'est pas touchée, contradiction.

$\tau^* < 2$.

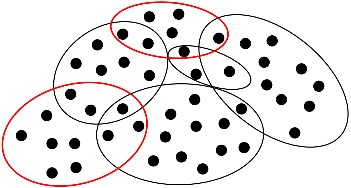
Donner un poids de $\frac{1}{n}$ à tous les sommets (i.e. poser $x_v = \frac{1}{n}$ pour tout sommet). Comme toutes les hyperarêtes ont taille n, le poids de chaque hyperarête vaut 1.

$\Rightarrow$ L'écart d'intégralité vaut au moins $n/4$.

Packing

Définition (packing)

Un packing dans un hypergraphe est un ensemble d'hyperarêtes deux à deux disjointes.



Exemple:

- Si les hyperarêtes sont les *st*-chemins, il s'agit de chemins disjoints.
- Si les hyperarêtes sont des activités, il s'agit d'activités que l'on peut programmer en parallèle (aucune personne ne souhaite participer à plusieurs activités).

Expression comme un problème linéaire

- On crée une variable y_e pour chaque hyperarête.
- On désire maximiser le nombre d'hyperarêtes sélectionnées:

$$\nu = \max \sum_{e \in E} y_e$$

- Chaque sommet apparaît dans au plus une hyperarête du packing. Pour tout sommet:

$$\sum_{e / v \in e} y_e \leq 1.$$

- Chaque hyperarête est soit sélectionnée, soit non-sélectionnée. Pour toute hyperarête e,

$$y_e \in \{0, 1\}.$$

Donc le problème du packing maximal peut s'exprimer comme un programme linéaire en nombres entiers.

$$\nu = \max \sum_{e \in E} y_e$$

$$\text{sous les contraintes} \quad \begin{array}{ll} \sum_{e / v \in e} y_e \leq 1 & \text{pour tout } v \in V \\ y_e \in \{0, 1\} & \text{pour tout } e \in E \end{array}$$

Tranversal et packing

$$\tau = \min \sum_{v \in V} x_v$$

sous les contraintes:

$\sum_{v \in e} x_v \geq 1$ pour tout $e \in E$
$x_v \in \{0, 1\}$ pour tout $v \in V$

$$\nu = \max \sum_{e \in E} y_e$$

sous les contraintes:

$\sum_{e / v \in e} y_e \leq 1$ pour tout $v \in V$
$y_e \in \{0, 1\}$ pour tout $e \in E$

Quel est le dual du problème du packing maximal?

- On crée une nouvelle variable z_v pour chaque contrainte, i.e. pour chaque sommet v.
- Le problème dual est un problème de minimisation.
- Le vecteur objectif du dual est le vecteur composé de 1 car c'est le vecteur contrainte du primal.
- Le vecteur de contraintes du dual est le vecteur composé de 1 car c'est le vecteur objectif du primal.
- On suppose que dans le dual les variables vaudront aussi 0 ou 1.

Exercice: Vérifiez que problème est celui du transversal minimum !

Dual d'un PL en nombre entier

Nous savons ce qu'est un dual pour un PL en nombre réel, et nous venons de le définir pour un PL en nombre entier “avec les mains”.

Définition:
Deux programmes linéaires en nombre entiers sont duaux l'un de l'autre si et seulement si leurs relaxations fractionnaires respectives sont duales l'une de l'autre.

Exercice:
Montrer formellement que le problème du transversal minimum et celui du packing maximum sont duaux l'un de l'autre.

Écart primal-dual en nombre entier

L'écart entre la valeur optimale du primal et la valeur optimale du dual peut être arbitrairement grande.

Exemple:

- $V = \{1, \ldots, 2n-1\}$.
- $e \in E$ si et seulement si $|e| = n$.

Aucun transversal n'a une taille plus petite que n.
On l'a déjà vu.

Il n'existe pas de packing de taille 2.
Deux hyperarêtes contiennent $2n$ sommets. Comme le nombre total de sommets est $2n-1$, toute les hyperarêtes s'intersectent.

En fait, on a le résultat plus général suivant. Pour tout hypergraphe H, on a:

$$\nu(H) \leq \nu^*(H) = \tau^*(H) \leq \tau(H)$$

$$\text{Primal (max)} \leq \text{ Primal}^* = \text{ Dual}^* \leq \text{ Dual (min)}$$