MOD 4.4: Recherche opérationnelle

Nicolas Bousquet

Ecole Centrale de Lyon

Dans le cours précédent

- Modélisation
- Programmation Linéaire
- Algorithme du Simplexe

Rappel: PL

Définition (programme linéaire)

Minimisation/ maximisation d'une fonction linéaire sous des contraintes elles-même linéaires.

$$\max \sum c_i x_i$$

$$\text{soumis à} \qquad \forall j, \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq b_j$$

$$\forall i, x_i \geq 0$$

Rappel: PL

Définition (programme linéaire)

Minimisation/ maximisation d'une fonction linéaire sous des contraintes elles-même linéaires.

$$\max \sum c_i x_i$$

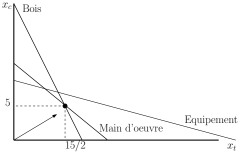
$$\text{soumis à} \qquad \forall j, \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq b_j$$

$$\forall i, x_i \geq 0$$

A = Matrice des $a_{i,j}$.
c = vecteur des c_i.
b = vecteur des b_i.

Rappel: Algorithme du Simplexe

Principe: Se promener de points extrêmes en points extrêmes.



- Soit on est sur un point optimal est on arrête.
- Soit on peut améliorer localement la solution en suivant une arête.

Avantages:

- Efficace.
- Robuste.
- Facile à implémenter.

Inconvénients:

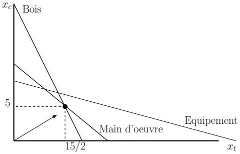
- Pas d'efficacité théorique.
- Ne fonctionne que pour les PL avec des variables réelles.

Définition économique du dual

$$z = \max(6x_t + 4x_c)$$

soumis à

$$\begin{aligned} 3x_t + 9x_c &\leq 81 \\ 4x_t + 5x_c &\leq 55 \\ 2x_t + x_c &\leq 20 \\ x_t, x_c &\geq 0 \end{aligned}$$



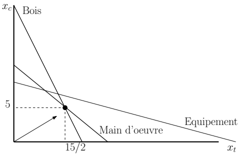
On nous propose de louer notre matériel.
A partir de quel prix faut-il accepter?

Définition économique du dual

$$z = \max(6x_t + 4x_c)$$

soumis à

$$\begin{aligned} 3x_t + 9x_c &\leq 81 \\ 4x_t + 5x_c &\leq 55 \\ 2x_t + x_c &\leq 20 \\ x_t, x_c &\geq 0 \end{aligned}$$



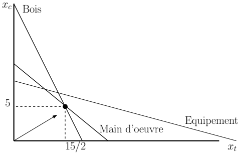
On nous propose de louer notre matériel.
A partir de quel prix faut-il accepter?

- L'équipement n'est pas intégralement utilisé dans la solution optimale. Une unité d'équipement ne nous rapporte rien ! On peut donc la louer pour (presque) rien.
- Par contre pour le bois? La main d'oeuvre?

Définition économique du dual

$$z = \max(6x_t + 4x_c)$$

soumis à



$$\begin{aligned} 3x_t + 9x_c &\leq 81 \\ 4x_t + 5x_c &\leq 55 \\ 2x_t + x_c &\leq 20 \\ x_t, x_c &\geq 0 \end{aligned}$$

On nous propose de louer notre matériel.
A partir de quel prix faut-il accepter?

- L'équipement n'est pas intégralement utilisé dans la solution optimale. Une unité d'équipement ne nous rapporte rien ! On peut donc la louer pour (presque) rien.
- Par contre pour le bois? La main d'oeuvre?

$\Rightarrow$ On peut donc créer une variable qui correspond à chaque contrainte (ressource) qui va déterminer à partir de quelle valeur on serait prêt à "louer" cette ressource.

Dualité (suite)

Et si l'on n'a pas résolu le système linéaire d'origine?

Comment faire pour savoir si on nous propose un "bon prix" pour nos ressources?

Dualité (suite)

Et si l'on n'a pas résolu le système linéaire d'origine?

Comment faire pour savoir si on nous propose un “bon prix” pour nos ressources?

- Créer une variable pour chacune des contraintes: y_e, y_b et y_h.
  La valeur de la variable correspondra au prix de la ressource.
- Comment choisir les bons prix?
  On sait par exemple qu'avec 3 équipement, 4 main d'oeuvre et 2 bois, on crée une table qui nous rapporte 6.
  $\Rightarrow 3y_e + 4y_h + 2y_b \geq 6$.
  Et on peut faire la même chose pour les chaises.

Dualité (suite)

Et si l'on n'a pas résolu le système linéaire d'origine?

Comment faire pour savoir si on nous propose un "bon prix" pour nos ressources?

- Créer une variable pour chacune des contraintes: y_e, y_b et y_h.
  La valeur de la variable correspondra au prix de la ressource.
- Comment choisir les bons prix?
  On sait par exemple qu'avec 3 équipement, 4 main d'oeuvre et 2 bois, on crée une table qui nous rapporte 6.
  $\Rightarrow 3y_e + 4y_h + 2y_b \geq 6$.
  Et on peut faire la même chose pour les chaises.
- Comme on n'est pas forcé d'utiliser tout l'équipement, on ne veut pas les louer à un prix négatif ! Donc y_e, y_h et y_b sont positives.

Dualité (suite)

Et si l'on n'a pas résolu le système linéaire d'origine?

Comment faire pour savoir si on nous propose un "bon prix" pour nos ressources?

- Créer une variable pour chacune des contraintes: y_e, y_b et y_h. La valeur de la variable correspondra au prix de la ressource.
- Comment choisir les bons prix? On sait par exemple qu'avec 3 équipement, 4 main d'oeuvre et 2 bois, on crée une table qui nous rapporte 6. $\Rightarrow 3y_e + 4y_h + 2y_b \geq 6$. Et on peut faire la même chose pour les chaises.
- Comme on n'est pas forcé d'utiliser tout l'équipement, on ne veut pas les louer à un prix négatif ! Donc y_e, y_h et y_b sont positives.

Autrement dit, on a les contraintes:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 9 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_e \\ y_h \\ y_b \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \text{et } y_e, y_h, y_b \geq 0$$

Quelque soit les valeurs de y_e, y_h et y_b qui satisfont les contraintes, nous sommes prêts à louer marchandise !

Programme linéaire “dual”

Du côté de l’acheteur:
L’acheteur (et un peu radin) veut payer le moins cher possible. Il veut donc minimiser le prix qu’il paie pour 81 unités d’équipement, 55 unités de main d’oeuvre et 20 tonnes de bois.

Programme linéaire “dual”

Du côté de l’acheteur:
L’acheteur (et un peu radin) veut payer le moins cher possible. Il veut donc minimiser le prix qu’il paie pour 81 unités d’équipement, 55 unités de main d’oeuvre et 20 tonnes de bois.

Bilan:
On désire résoudre

$$\min 81y_e + 55y_h + 20y_b$$

sous les contraintes

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 9 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_e \\ y_h \\ y_b \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Remarque:
Il s’agit d’un programme linéaire !

Dual d'un programme linéaire

$$\max 6x_t + 4x_c$$

sous les contraintes

$$\begin{pmatrix} 81 \\ 55 \\ 20 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ x_c \end{pmatrix}$$

$+$ positivité des variables

$$\min 81y_e + 55y_h + 20y_b$$

sous les contraintes

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 9 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_e \\ y_h \\ y_b \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$+$ positivité des variables

Dual d'un programme linéaire

$$\max 6x_t + 4x_c$$

sous les contraintes

$$\begin{pmatrix} 81 \\ 55 \\ 20 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ x_c \end{pmatrix}$$

+ positivité des variables

$$\min 81y_e + 55y_h + 20y_b$$

sous les contraintes

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 9 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_e \\ y_h \\ y_b \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

+ positivité des variables

Dual d'un programme linéaire

$$\max 6x_t + 4x_c$$

sous les contraintes

$$\begin{pmatrix} 81 \\ 55 \\ 20 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ x_c \end{pmatrix}$$

+ positivité des variables

$$\min 81y_e + 55y_h + 20y_b$$

sous les contraintes

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 9 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_e \\ y_h \\ y_b \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

+ positivité des variables

Dual d'un programme linéaire

$$\max 6x_t + 4x_c$$

sous les contraintes

$$\begin{pmatrix} 81 \\ 55 \\ 20 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ x_c \end{pmatrix}$$

$+$ positivité des variables

$$\min 81y_e + 55y_h + 20y_b$$

sous les contraintes

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 9 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_e \\ y_h \\ y_b \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$+$ positivité des variables

Dual d'un programme linéaire

$$\max 6x_t + 4x_c$$

sous les contraintes

$$\begin{pmatrix}81\\55\\20\end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix}3 & 9\\4 & 5\\2 & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}x_t\\x_c\end{pmatrix}$$

+ positivité des variables

$$\min 81y_e + 55y_h + 20y_b$$

sous les contraintes

$$\begin{pmatrix}3 & 4 & 2\\9 & 5 & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}y_e\\y_h\\y_b\end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}$$

+ positivité des variables

Dual d'un programme linéaire

$$\max 6x_t + 4x_c$$

sous les contraintes

$$\begin{pmatrix} 81 \\ 55 \\ 20 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ x_c \end{pmatrix}$$

+ positivité des variables

$$\min 81y_e + 55y_h + 20y_b$$

sous les contraintes

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 9 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_e \\ y_h \\ y_b \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

+ positivité des variables

Dual d'un programme linéaire

$$\max 6x_t + 4x_c$$

sous les contraintes

$$\begin{pmatrix} 81 \\ 55 \\ 20 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ x_c \end{pmatrix}$$

+ positivité des variables

$$\min 81y_e + 55y_h + 20y_b$$

sous les contraintes

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 9 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_e \\ y_h \\ y_b \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

+ positivité des variables

Définition:
Le dual du programme linéaire

$$\max c^t x \quad \text{soumis à} \quad Ax \leq b \text{ et } x \geq 0$$

est le programme linéaire

$$\min b^t y \quad \text{soumis à} \quad y^t A \geq c \text{ et } y \geq 0$$

Écriture du programme dual

Définition

Le nouveau programme linéaire s'appelle le Programme Linéaire dual.
Celui d'origine s'appellera le Programme Linéaire primal.

Écriture du programme dual

Définition

Le nouveau programme linéaire s'appelle le Programme Linéaire dual.
Celui d'origine s'appellera le Programme Linéaire primal.

Primal	*Dual*
max	*min*
Vecteur de contrainte	Fonction objectif
Fonction objectif	Vecteur de contrainte
Variables	Contraintes
Contraintes	Variables
Contrainte $\leq$	Variable ≥ 0
Contrainte $\geq$	Variable ≤ 0
Contrainte $=$	Variable non-contrainte
Variable ≥ 0	Contrainte $\geq$
Variable ≤ 0	Contrainte $\leq$
Variable non-contrainte	Contrainte $=$

Dualité contrainte $\Rightarrow$ variable

Primal	*Dual*
Contrainte $\leq$	Variable ≥ 0
Contrainte $\geq$	Variable ≤ 0
Contrainte $=$	Variable non-contrainte

Cas 1: Contrainte $\leq \Rightarrow$ Variable ≥ 0.
Définition.

Dualité contrainte $\Rightarrow$ variable

Primal	*Dual*
Contrainte $\leq$	Variable ≥ 0
Contrainte $\geq$	Variable ≤ 0
Contrainte $=$	Variable non-contrainte

Cas 1: Contrainte $\leq \Rightarrow$ Variable ≥ 0.
Définition.

Cas 2: Contrainte $\geq \Rightarrow$ Variable ≤ 0.
On peut supposer que la contrainte s'écrit $\sum_i a_{ji}x_i \geq b$. C'est équivalent à $\sum_i -a_{ji}x_i \leq -b$.
$\Rightarrow$ On crée une variable $y \geq 0$ pour la contrainte dans le dual.

Quel est l'impact de ce changement d'inégalité?

- Dans la fonction objectif, le coefficient en y est $-by$.
- Dans chaque $i$ème contrainte du dual, le coefficient en y est $-a_{ji}y$.

Posons $z = -y$. Si on remplace y par $-z$, on obtient $z \leq 0$, les coefficients de z dans la fonction objectif est b et dans les contraintes sont a_{ji}.

Dualité contrainte $\Rightarrow$ variable

Cas 3: Contrainte $= \Rightarrow$ Variable non contrainte.
On peut remplacer la contrainte $\sum_i a_{ji}x_i = b$ par les deux contraintes $\sum_i a_{ji}x_i \geq b$ et $\sum_i a_{ji}x_i \leq b$.
Dans le dual (D), on crée deux variables pour la contrainte:

- une positive ou nulle, notée y (pour la contrainte $\geq$),
- l'autre négative ou nulle, notée y' (pour la contrainte $\leq$).

- Dans la fonction objectif, le coefficient de y et de y' est b.
- Dans la $i$ème contrainte du dual, le coefficient de y et de y' est a_{ji}.

Dualité contrainte $\Rightarrow$ variable

Cas 3: Contrainte $= \Rightarrow$ Variable non contrainte.
On peut remplacer la contrainte $\sum_i a_{ji}x_i = b$ par les deux contraintes $\sum_i a_{ji}x_i \geq b$ et $\sum_i a_{ji}x_i \leq b$.
Dans le dual (D), on crée deux variables pour la contrainte:

- une positive ou nulle, notée y (pour la contrainte $\geq$),
- l'autre négative ou nulle, notée y' (pour la contrainte $\leq$).

- Dans la fonction objectif, le coefficient de y et de y' est b.
- Dans la $i$ème contrainte du dual, le coefficient de y et de y' est a_{ji}.

Soit (D') le PL (D) où y et y' sont supprimés et une variable z ajoutée (notre idée: $z = y + y'$). Les coefficients pour z dans les contraintes du dual et dans la fonction objectif sont ceux de y (et y'). **On ne rajoute pas de contrainte de positivité.**
Un vecteur $(y_1, \ldots, y, y')$ est solution de (D) avec valeur v ssi $(y_1, \ldots, y + y')$ est solution de (D') avec valeur v.

Preuve: exercice.

Première propriétés du dual

Propriété

Le dual du dual est le primal.

Première propriétés du dual

Propriété

Le dual du dual est le primal.

Preuve:

$$\max c^t x \qquad \text{soumis à} \qquad Ax \leq b \text{ et } x \geq 0$$

a pour dual

$$\begin{aligned} \min b^t y \qquad & \text{soumis à} \qquad y^t A \geq c^t \text{ et } y \geq 0 \\ \Leftrightarrow \max -b^t y \qquad & \text{soumis à} \qquad -A^t y \leq -c \text{ et } y \geq 0 \end{aligned}$$

qui a pour dual

$$\begin{aligned} \min -c^t z \qquad & \text{soumis à} \qquad z^t(-A^t) \geq -b^t \text{ et } z \geq 0 \\ \Leftrightarrow \max c^t z \qquad & \text{soumis à} \qquad Az \leq b \text{ et } z \geq 0. \end{aligned}$$

Liens entre solutions du primal et du dual

Solution optimale du primal: $$z = 65 - \frac{1}{3}y_2 - \frac{7}{3}y_3$$

$$\text{sous les contraintes } \begin{pmatrix} 27/2 \\ 5 \\ 15/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -5/2 & 7/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & -2/3 \\ 1 & 0 & 0 & -1/6 & 5/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ x_c \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Dual $$\min 81y_e + 55y_h + 20y_b$$

$$\text{sous les contraintes } \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 9 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_e \\ y_h \\ y_b \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Liens entre solutions du primal et du dual

Solution optimale du primal: $z = 65 - \frac{1}{3}y_2 - \frac{7}{3}y_3$

$$\text{sous les contraintes} \begin{pmatrix} 27/2 \\ 5 \\ 15/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -5/2 & 7/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & -2/3 \\ 1 & 0 & 0 & -1/6 & 5/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ x_c \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Dual $\min 81y_e + 55y_h + 20y_b$

$$\text{sous les contraintes} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 9 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_e \\ y_h \\ y_b \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Si on pose $y_h = \frac{1}{3}$, $y_b = \frac{7}{3}$ et $y_e = 0$.
On peut vérifier que ce triplet satisfait les contraintes du dual. De plus on a la valeur objectif:

$$81 \cdot 0 + 55/3 + 20 \cdot \frac{7}{3} = 195/3 = 65.$$

En lisant la solution du primal, on a donc trouvé une solution du dual.

Liens entre solutions du primal et du dual

Solution optimale du primal: $z = 65 - \frac{1}{3}y_2 - \frac{7}{3}y_3$

$$\text{sous les contraintes} \begin{pmatrix} 27/2 \\ 5 \\ 15/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -5/2 & 7/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & -2/3 \\ 1 & 0 & 0 & -1/6 & 5/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ x_c \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Dual $\min 81y_e + 55y_h + 20y_b$

$$\text{sous les contraintes} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 9 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_e \\ y_h \\ y_b \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Si on pose $y_h = \frac{1}{3}$, $y_b = \frac{7}{3}$ et $y_e = 0$.
On peut vérifier que ce triplet satisfait les contraintes du dual. De plus on a la valeur objectif:

$$81 \cdot 0 + 55/3 + 20 \cdot \frac{7}{3} = 195/3 = 65.$$

En lisant la solution du primal, on a donc trouvé une solution du dual.

Question: Est-elle optimale?

Primal et dual

OUI !

OUI !

Pourquoi?

Soient z_c, z_t les variables d'écart pour les contraintes "chaises" et "tables" du dual.

On peut montrer que l'on obtient avec l'algorithme du simplexe la fonction objectif suivante quand on place y_e, z_c et z_t dans la base.

$$z = 65 + 27/2 y_e + 5 z_c + 15/2 z_t$$

$\Rightarrow$ Comme on veut minimiser une fonction dans le dual, on ne peut plus améliorer la solution !

OUI !

Pourquoi?

Soient z_c, z_t les variables d'écart pour les contraintes "chaises" et "tables" du dual.

On peut montrer que l'on obtient avec l'algorithme du simplexe la fonction objectif suivante quand on place y_e, z_c et z_t dans la base.

$$z = 65 + 27/2 y_e + 5 z_c + 15/2 z_t$$

$\Rightarrow$ Comme on veut minimiser une fonction dans le dual, on ne peut plus améliorer la solution !

Solution optimale du primal: $z = 65 - \frac{1}{3} y_2 - \frac{7}{3} y_3$

$$\text{sous les contraintes} \begin{pmatrix} 27/2 \\ 5 \\ 15/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -5/2 & 7/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & -2/3 \\ 1 & 0 & 0 & -1/6 & 5/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ x_c \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Théorème faible de dualité

Théorème de dualité faible

Soit (P) un PL et (D) son dual. Soit x une solution de (P) de valeur[1] $Val(x)$ et y une solution de (D) de valeur $Val(y)$. Alors on a:

$$Val(x) \leq Val(y)$$

Comme toute solution du duale est meilleure que toute solution du primal, on a $OPT(D) \geq OPT(P)$.

[1]Terminologie: Val = valeur de la solution objectif. $OPT = \max_x Val(x)$

Théorème faible de dualité

Théorème de dualité faible

Soit (P) un PL et (D) son dual. Soit x une solution de (P) de valeur[1] $Val(x)$ et y une solution de (D) de valeur $Val(y)$. Alors on a:

$$Val(x) \leq Val(y)$$

Comme toute solution du duale est meilleure que toute solution du primal, on a $OPT(D) \geq OPT(P)$.

Preuve:

On peut supposer que toutes les variables d'un programme linéaire sont positives. Supposons que le PL s'écrive $\max c^t x$ soumis à $Ax \leq b$.

$$c^t x \leq y^t A x \leq y^t b$$

La première inégalité est issu de la contrainte du dual $y^t A \geq c^t$.
La seconde vient du primal et de sa contrainte $Ax \leq b$.

[1] Terminologie: Val = valeur de la solution objectif. $OPT = \max_x Val(x)$

Théorème fort de dualité

Théorème de dualité fort

Soit (P) un programme linéaire et (D) son dual. On a:

$$OPT(P) = OPT(D)$$

Autrement dit la valeur optimale du primal et du dual sont égaux.

Preuve:
La preuve (d'algèbre linéaire) est beaucoup plus difficile et nous n'aurons malheureusement pas le temps de la traiter. Si vous êtes curieux, vous trouverez la preuve dans tous les cours d'Optimisation Combinatoire qui se respectent !

Théorème des écarts complémentaires

Théorème

Si une contrainte est serrée dans la solution optimale du primal alors la variable associée est non nulle dans la solution optimale du dual.
Si une contrainte n'est pas serrée dans la solution optimale du primal alors la variable associée est nulle dans la solution optimale du dual.

Remarque:
Le vrai théorème est un peu plus fort, mais ça nous suffira...

Vérifier l'optimalité d'une solution

On nous affirme que la solution $\mathbf{x}$ d'un PL linéaire est optimale.
Comment le vérifier?

Vérifier l'optimalité d'une solution

On nous affirme que la solution **x** d'un PL linéaire est optimale.
Comment le vérifier?

Kit clé en main:

- Vérifier que les contraintes sont satisfaites.

Vérifier l'optimalité d'une solution

On nous affirme que la solution $\mathbf{x}$ d'un PL linéaire est optimale.
Comment le vérifier?

Kit clé en main:

- Vérifier que les contraintes sont satisfaites.
- Trouver les n contraintes serrées (la solution optimale est un point extrême !).

Vérifier l'optimalité d'une solution

On nous affirme que la solution **x** d'un PL linéaire est optimale.
Comment le vérifier?

Kit clé en main:

- Vérifier que les contraintes sont satisfaites.
- Trouver les n contraintes serrées (la solution optimale est un point extrême !).
- Les contraintes associées du dual sont non nulles et les autres sont nulles.
  $\rightarrow$ Résoudre le système du dual (n variables, n contraintes)....

Vérifier l'optimalité d'une solution

On nous affirme que la solution $\mathbf{x}$ d'un PL linéaire est optimale.
Comment le vérifier?

Kit clé en main:

- Vérifier que les contraintes sont satisfaites.
- Trouver les n contraintes serrées (la solution optimale est un point extrême !).
- Les contraintes associées du dual sont non nulles et les autres sont nulles.
  $\rightarrow$ Résoudre le système du dual (n variables, n contraintes)....
- Si la solution est positive, alors la solution est optimale !

Vérifier l'optimalité d'une solution

On nous affirme que la solution **x** d'un PL linéaire est optimale.
Comment le vérifier?

Kit clé en main:

- Vérifier que les contraintes sont satisfaites.
- Trouver les n contraintes serrées (la solution optimale est un point extrême !).
- Les contraintes associées du dual sont non nulles et les autres sont nulles.
  $\rightarrow$ Résoudre le système du dual (n variables, n contraintes)....
- Si la solution est positive, alors la solution est optimale !
- Vérifier les valeurs pour corriger les éventuelles erreurs de calcul...

Illustration

$$z = \max(6x_t + 4x_c)$$

soumis à

$$\begin{aligned} 3x_t + 9x_c &\leq 81 \\ 4x_t + 5x_c &\leq 55 \\ 2x_t + x_c &\leq 20 \\ x_t, x_c &\geq 0 \end{aligned}$$

On nous affirme que la solution $(5, 15/2)$ est optimale. Comment le vérifier?

Illustration

$$z = \max(6x_t + 4x_c)$$

soumis à

$$\begin{aligned} 3x_t + 9x_c &\leq 81 \\ 4x_t + 5x_c &\leq 55 \\ 2x_t + x_c &\leq 20 \\ x_t, x_c &\geq 0 \end{aligned}$$

On nous affirme que la solution $(5, 15/2)$ est optimale. Comment le vérifier?

Contraintes serrées: bois et main d'oeuvre.
$\rightarrow$ Les variables non nulles du dual son y_2 et y_3.

Illustration

$$z = \max(6x_t + 4x_c)$$

soumis à

$$\begin{aligned} 3x_t + 9x_c &\leq 81 \\ 4x_t + 5x_c &\leq 55 \\ 2x_t + x_c &\leq 20 \\ x_t, x_c &\geq 0 \end{aligned}$$

On nous affirme que la solution $(5, 15/2)$ est optimale. Comment le vérifier?

Contraintes serrées: bois et main d'oeuvre.
$\rightarrow$ Les variables non nulles du dual son y_2 et y_3.
Résoudre:

$$\begin{aligned} 4y_2 + 2y_3 &= 6 \\ 5y_2 + y_3 &= 4 \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow$ $y_2 = 1/3$ et $y_3 = 7/3$.

Illustration

$$z = \max(6x_t + 4x_c)$$

soumis à

$$\begin{aligned} 3x_t + 9x_c &\leq 81 \\ 4x_t + 5x_c &\leq 55 \\ 2x_t + x_c &\leq 20 \\ x_t, x_c &\geq 0 \end{aligned}$$

On nous affirme que la solution $(5, 15/2)$ est optimale. Comment le vérifier?

Contraintes serrées: bois et main d'oeuvre.
$\rightarrow$ Les variables non nulles du dual son y_2 et y_3.
Résoudre:

$$\begin{aligned} 4y_2 + 2y_3 &= 6 \\ 5y_2 + y_3 &= 4 \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow$ $y_2 = 1/3$ et $y_3 = 7/3$.
Valeur du primal: $(15/2) \cdot 6 + 5 \cdot 4 = 65$.
Valeur du dual: $1/3 \cdot 55 + 7/3 \cdot 20 = 185/3 = 65$.

Meilleure solution entière?

Meilleure solution entière?

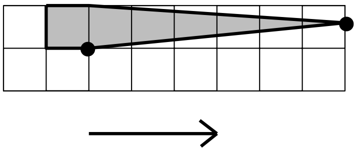
Existe-il toujours des solutions optimales entières? **NON**

Meilleure solution entière?

Existe-il toujours des solutions optimales entières? **NON**

Peut-on borner l'écart entre solution réelle optimale et solution entière optimale? **NON**

Graphiquement, on se rend bien compte que ce n'est pas surprenant car on construit facilement un effet de pointe.



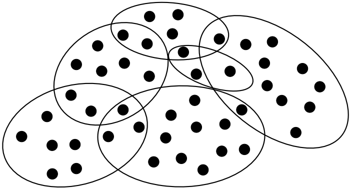
Mais en fait, on peut même obtenir ce genre de comportement en supposant que toutes les variables sont comprises entre 0 et 1.
Une des meilleures façons de l'illustrer est de regarder les problèmes du packing maximal et du transversal minimal.

Hypergraphe

Définition (hypergraphe)

Un hypergraphe $H = (V, E)$ est une paire où:

- V est un ensemble de sommets.
- E est un ensemble de **sous ensembles** de sommets appelés hyperarêtes.



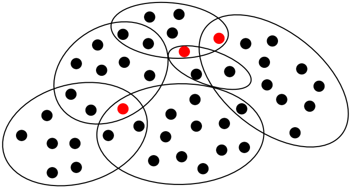
Utilisations:

- Quand on veut modéliser des relations qui ne sont pas binaires mais d'arité arbitrairement grande (ex. modéliser des groupes dans les réseaux sociaux, clusters...).
- Généralisent et modélisent de nombreux problèmes de graphes.

Transversal d'hypergraphe

Définition (transversal)

Un transversal d'un hypergraphe $H = (V, E)$ est un ensemble de sommets qui contient au moins un sommet de chaque hyperarête.



Exemple:

- Si les hyperarêtes sont les arêtes d'un graphe alors un transversal est un ensemble de sommets qui permet de surveiller toutes les arêtes.
- Si les hyperarêtes sont les *st*-chemins dans le graphe, alors un transversal est exactement une coupe minimale.

Transversal minimum et programme linéaire

Soit $H = (V, E)$ un hypergraphe.

- Créons une variable x_v pour chaque sommet de l'hypergraphe.
- Le but est de minimiser la taille d'un transversal:

$$\tau = \min \sum_{v \in V} x_v.$$

- Pour chaque hyperarête on veut sélectionner au moins un sommet. Pour toute hyperarête $e \in E$:

$$\sum_{v \in e} x_v \geq 1.$$

- On veut soit prendre, soit ne pas prendre un sommet. Pour tout $v \in V$

$$x_v \in \{0, 1\}.$$

Écart d'intégralité

$$\tau = \min \sum_{v \in V} x_v$$

sous les contraintes:

$$\begin{array}{ll} \sum_{v \in e} x_v \geq 1 & \text{pour tout } e \in E \\ x_v \in \{0,1\} & \text{pour tout } v \in V \end{array}$$

Écart d'intégralité

$$\tau = \min \sum_{v \in V} x_v$$

sous les contraintes:

$$\begin{array}{ll} \sum_{v \in e} x_v \geq 1 & \text{pour tout } e \in E \\ x_v \in \{0,1\} & \text{pour tout } v \in V \end{array}$$

$$\tau^* = \min \sum_{v \in V} x_v$$

sous les contraintes:

$$\begin{array}{ll} \sum_{v \in e} x_v \geq 1 & \text{pour tout } e \in E \\ 0 \leq x_v \leq 1 & \text{pour tout } v \in V \end{array}$$

Le PL de droite s'appelle la relaxation fractionnaire du PL de gauche.
La valeur optimale de la relaxation fractionnaire est notée avec une $*$.

Écart d'intégralité

$$\tau = \min \sum_{v \in V} x_v$$

sous les contraintes:

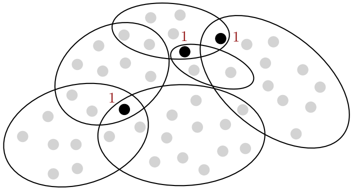
$$\begin{array}{ll} \sum_{v \in e} x_v \geq 1 & \text{pour tout } e \in E \\ x_v \in \{0,1\} & \text{pour tout } v \in V \end{array}$$

$$\tau^* = \min \sum_{v \in V} x_v$$

sous les contraintes:

$$\begin{array}{ll} \sum_{v \in e} x_v \geq 1 & \text{pour tout } e \in E \\ 0 \leq x_v \leq 1 & \text{pour tout } v \in V \end{array}$$

Le PL de droite s'appelle la relaxation fractionnaire du PL de gauche.
La valeur optimale de la relaxation fractionnaire est notée avec une $*$.



Écart d'intégralité

$$\tau = \min \sum_{v \in V} x_v$$

sous les contraintes:

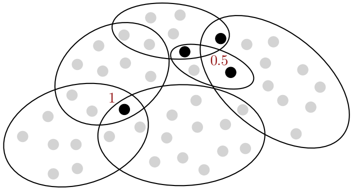
$$\begin{array}{ll} \sum_{v \in e} x_v \geq 1 & \text{pour tout } e \in E \\ x_v \in \{0,1\} & \text{pour tout } v \in V \end{array}$$

$$\tau^* = \min \sum_{v \in V} x_v$$

sous les contraintes:

$$\begin{array}{ll} \sum_{v \in e} x_v \geq 1 & \text{pour tout } e \in E \\ 0 \leq x_v \leq 1 & \text{pour tout } v \in V \end{array}$$

Le PL de droite s'appelle la relaxation fractionnaire du PL de gauche.
La valeur optimale de la relaxation fractionnaire est notée avec une $*$.



Écart d'intégralité

$$\tau = \min \sum_{v \in V} x_v$$

sous les contraintes:

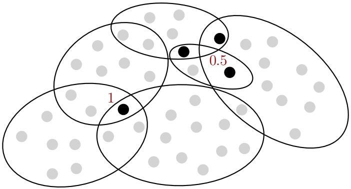
$$\begin{array}{ll} \sum_{v \in e} x_v \geq 1 & \text{pour tout } e \in E \\ x_v \in \{0,1\} & \text{pour tout } v \in V \end{array}$$

$$\tau^* = \min \sum_{v \in V} x_v$$

sous les contraintes:

$$\begin{array}{ll} \sum_{v \in e} x_v \geq 1 & \text{pour tout } e \in E \\ 0 \leq x_v \leq 1 & \text{pour tout } v \in V \end{array}$$

Le PL de droite s'appelle la relaxation fractionnaire du PL de gauche.
La valeur optimale de la relaxation fractionnaire est notée avec une $*$.



L'écart entre l'optimal du programme linéaire d'origine et sa relaxation fractionnaire est appelé l'écart d'intégralité.

Question: Peut-on borner l'écart d'intégralité?

NON !

NON !

$$\tau = \min \sum_{v \in V} x_v$$

sous les contraintes:

$$\begin{array}{ll} \sum_{v \in e} x_v \geq 1 & \text{pour tout } e \in E \\ x_v \in \{0,1\} & \text{pour tout } v \in V \end{array}$$

$$\tau^* = \min \sum_{v \in V} x_v$$

sous les contraintes:

$$\begin{array}{ll} \sum_{v \in e} x_v \geq 1 & \text{pour tout } e \in E \\ 0 \leq x_v \leq 1 & \text{pour tout } v \in V \end{array}$$

Exemple:

- $V = \{1, \ldots, 2n-1\}$.
- $e \in E$ si et seulement si $|e| = n$.

$\tau \geq n$.

Par contradiction. Si on ne sélectionne que $n-1$ sommets, il reste n sommets dans le complémentaire. Comme tous les ensembles de taille n sont des hyperarêtes, une hyperarête n'est pas touchée, contradiction.

$\tau^* < 2$.

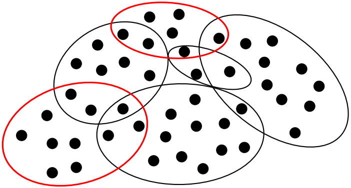
Donner un poids de $\frac{1}{n}$ à tous les sommets (i.e. poser $x_v = \frac{1}{n}$ pour tout sommet). Comme toutes les hyperarêtes ont taille n, le poids de chaque hyperarête vaut 1.

$\Rightarrow$ L'écart d'intégralité vaut au moins $n/4$.

Packing

Définition (packing)

Un packing dans un hypergraphe est un ensemble d'hyperarêtes deux à deux disjointes.



Exemple:

- Si les hyperarêtes sont les *st*-chemins, il s'agit de chemins disjoints.
- Si les hyperarêtes sont des activités, il s'agit d'activités que l'on peut programmer en parallèle (aucune personne ne souhaite participer à plusieurs activités).

Expression comme un problème linéaire

- On crée une variable y_e pour chaque hyperarête.
- On désire maximiser le nombre d'hyperarêtes sélectionnées:

$$\nu = \max \sum_{e \in E} y_e$$

- Chaque sommet apparaît dans au plus une hyperarête du packing. Pour tout sommet:

$$\sum_{e / v \in e} y_e \leq 1.$$

- Chaque hyperarête est soit sélectionnée, soit non-sélectionnée. Pour toute hyperarête e,

$$y_e \in \{0, 1\}.$$

Donc le problème du packing maximal peut s'exprimer comme un programme linéaire en nombres entiers.

$$\nu = \max \sum_{e \in E} y_e$$

$$\text{sous les contraintes} \quad \begin{array}{ll} \sum_{e / v \in e} y_e \leq 1 & \text{pour tout } v \in V \\ y_e \in \{0, 1\} & \text{pour tout } e \in E \end{array}$$

Tranversal et packing

$$\tau = \min \sum_{v \in V} x_v$$

sous les contraintes:

$$\begin{array}{ll} \sum_{v \in e} x_v \geq 1 & \text{pour tout } e \in E \\ x_v \in \{0,1\} & \text{pour tout } v \in V \end{array}$$

$$\nu = \max \sum_{e \in E} y_e$$

sous les contraintes:

$$\begin{array}{ll} \sum_{e / v \in e} y_e \leq 1 & \text{pour tout } v \in V \\ y_e \in \{0,1\} & \text{pour tout } e \in E \end{array}$$

Quel est le dual du problème du packing maximal?

- On crée une nouvelle variable z_v pour chaque contrainte, i.e. pour chaque sommet v.
- Le problème dual est un problème de minimisation.
- Le vecteur objectif du dual est le vecteur composé de 1 car c'est le vecteur contrainte du primal.
- Le vecteur de contraintes du dual est le vecteur composé de 1 car c'est le vecteur objectif du primal.
- On suppose que dans le dual les variables vaudront aussi 0 ou 1.

Exercice: Vérifiez que problème est celui du transversal minimum !

Dual d'un PL en nombre entier

Nous savons ce qu'est un dual pour un PL en nombre réel, et nous venons de le définir pour un PL en nombre entier “avec les mains”.

Définition:
Deux programmes linéaires en nombre entiers sont duaux l'un de l'autre si et seulement si leurs relaxations fractionnaires respectives sont duales l'une de l'autre.

Exercice:
Montrer formellement que le problème du transversal minimum et celui du packing maximum sont duaux l'un de l'autre.

Écart primal-dual en nombre entier

L'écart entre la valeur optimale du primal et la valeur optimale du dual peut être arbitrairement grande.

Exemple:

- $V = \{1, \ldots, 2n-1\}$.
- $e \in E$ si et seulement si $|e| = n$.

Aucun transversal n'a une taille plus petite que n.
On l'a déjà vu.

Il n'existe pas de packing de taille 2.
Deux hyperarêtes contiennent $2n$ sommets. Comme le nombre total de sommets est $2n-1$, toute les hyperarêtes s'intersectent.

En fait, on a le résultat plus général suivant. Pour tout hypergraphe H, on a:

$$\nu(H) \leq \nu^*(H) = \tau^*(H) \leq \tau(H)$$

$$\text{Primal (max)} \leq \text{ Primal}^* = \text{ Dual}^* \leq \text{ Dual (min)}$$

Matrices totalement unimodulaires (TU)

Comment faire pour trouver la solution optimale d'un programme linéaire en nombre entiers?

- Développer des algorithmes généraux.
- Montrer que l'écart d'intégralité est borné (pour garantir l'existence d'une solution entière proche d'une solution réelle... encore faut-il la trouver !).
- Montrer que le Simplexe renvoie une solution entière.

Matrices totalement unimodulaires (TU)

Comment faire pour trouver la solution optimale d'un programme linéaire en nombre entiers?

- Développer des algorithmes généraux.
- Montrer que l'écart d'intégralité est borné (pour garantir l'existence d'une solution entière proche d'une solution réelle... encore faut-il la trouver !).
- Montrer que le Simplexe renvoie une solution entière.

Définition (matrice totalement unimodulaires)

Une matrice est totalement unimodulaire si toute sous matrice carrée à un déterminant égal à $0, 1$ ou -1.

Exemple: matrice de permutation.

Remarque: toutes les coefficients valent 0, 1 ou -1.

Théorème d'intégralité

Théorème (version affaiblie)

Soit b un vecteur entier et M une matrice totalement unimodulaire. Alors

- La solution optimale de $Mx \leq b$ soumis à min ou max $c^t x$ est un vecteur entier.
- La solution optimale de $Mx = b$ et $0 \leq x \leq 1$ soumis à min ou max $c^t x$ est un vecteur entier.

Théorème d'intégralité

Théorème (version affaiblie)

Soit b un vecteur entier et M une matrice totalement unimodulaire. Alors

- La solution optimale de $Mx \leq b$ soumis à min ou max $c^t x$ est un vecteur entier.
- La solution optimale de $Mx = b$ et $0 \leq x \leq 1$ soumis à min ou max $c^t x$ est un vecteur entier.

Conséquences:

- Efficacité théorique. Une solution optimale entière peut être trouvée en temps polynomial.
- Efficacité pratique. L'algorithme du Simplexe renvoie une solution optimale entière.

Exercices:

1. Montrer que toute sous-matrice d'une matrice TU est TU.
2. Montrer que si M est TU alors $\begin{pmatrix} M \\ Id \end{pmatrix}$ l'est aussi.
3. Montrer que la matrice d'un graphe orienté est TU.

Définition (matrice d'incidence de biparti

Une matrice M est une matrice d'incidence de bipati si ses colonnes peuvent être partionnées en deux ensembles A et B tels que, sur chaque ligne, il y a exactement un 1 dans les colonnes de A et un 1 dans les colonnes de B (et que tous les autres coefficients sont égaux à 0).

Théorème

Une matrice d'incidence de biparti est totalement unimodulaire.

Définition (matrice d'incidence de biparti

Une matrice M est une matrice d'incidence de bipati si ses colonnes peuvent être partionnées en deux ensembles A et B tels que, sur chaque ligne, il y a exactement un 1 dans les colonnes de A et un 1 dans les colonnes de B (et que tous les autres coefficients sont égaux à 0).

Théorème

Une matrice d'incidence de biparti est totalement unimodulaire.

Preuve:

Par récurrence sur la taille de la sous matrice. Comme la matrice est $0-1$, le résultat est vraie pour les sous matrices carrées de taille 1×1.

Définition (matrice d'incidence de biparti

Une matrice M est une matrice d'incidence de bipati si ses colonnes peuvent être partionnées en deux ensembles A et B tels que, sur chaque ligne, il y a exactement un 1 dans les colonnes de A et un 1 dans les colonnes de B (et que tous les autres coefficients sont égaux à 0).

Théorème

Une matrice d'incidence de biparti est totalement unimodulaire.

Preuve:

Par récurrence sur la taille de la sous matrice. Comme la matrice est $0-1$, le résultat est vraie pour les sous matrices carrées de taille 1×1.
Soit M' une sous matrice carrée:

- Si elle contient une ligne nulle $\rightarrow$ Déterminant nul.
- Si elle contient une ligne avec un seul 1 $\rightarrow$ On développe et applique la récurrence.
- Si toutes les lignes ont deux 1, on trouve une combinaison linéaire des colonnes qui somme à 0.
  $\rightarrow$ Déterminant nul.

Problème de livraison

- Une entreprise a un ensemble d'entrepots F.
- Elle propose un ensemble de biens G.
  $\rightarrow s_{ij}$: quantité du bien i dans l'entrepot j.
- Elle a un ensemble de clients C.
  $\rightarrow d_{ik}$: quantité du bien i désiré par k.
- Coût c_{ijk} pour amener une unité de i depuis l'entrepot j vers le client k.
- Objectif: Minimiser le coût total en satisfaisant les besoins des clients.

Etape 1: Modélisation comme un programme linéaire.

Problème de livraison

- Une entreprise a un ensemble d'entrepots F.
- Elle propose un ensemble de biens G.
  $\rightarrow$ s_{ij}: quantité du bien i dans l'entrepot j.
- Elle a un ensemble de clients C.
  $\rightarrow$ d_{ik}: quantité du bien i désiré par k.
- Coût c_{ijk} pour amener une unité de i depuis l'entrepot j vers le client k.
- Objectif: Minimiser le coût total en satisfaisant les besoins des clients.

Etape 1: Modélisation comme un programme linéaire.

Variables: x_{ijk} - Quantité du bien i amené de l'entrepôt j vers le client k.

Problème de livraison

- Une entreprise a un ensemble d'entrepots F.
- Elle propose un ensemble de biens G.
  $\rightarrow s_{ij}$: quantité du bien i dans l'entrepot j.
- Elle a un ensemble de clients C.
  $\rightarrow d_{ik}$: quantité du bien i désiré par k.
- Coût c_{ijk} pour amener une unité de i depuis l'entrepot j vers le client k.
- Objectif: Minimiser le coût total en satisfaisant les besoins des clients.

Etape 1: Modélisation comme un programme linéaire.

Variables: x_{ijk} - Quantité du bien i amené de l'entrepôt j vers le client k.

Objectif:

$$\min \sum_{i,j,k} c_{ijk} x_{ijk}$$

Etude de la matrice de contraintes

$$\min \sum_{i,j,k} c_{ijk} x_{ijk}$$

soumis à

$$\sum_{k} x_{ijk} \leq s_{ij} \quad \forall i, j$$

$$\sum_{j} x_{ijk} = d_{ik} \quad \forall i, k$$

$$x_{ijk} \geq 0 \quad \forall i, j, k$$

Etude de la matrice de contraintes

$$\min \sum_{i,j,k} c_{ijk} x_{ijk}$$

soumis à

$$\sum_k x_{ijk} \leq s_{ij} \quad \forall i, j$$

$$\sum_j x_{ijk} = d_{ik} \quad \forall i, k$$

$$x_{ijk} \geq 0 \quad \forall i, j, k$$

Combien de fois apparait la variable x_{ijk}? 2

Une fois dans la contrainte i, j et l'autre dans la contrainte i, k

Etude de la matrice de contraintes

$$\min \sum_{i,j,k} c_{ijk} x_{ijk}$$

soumis à

$$\sum_k x_{ijk} \leq s_{ij} \quad \forall i, j$$

$$\sum_j x_{ijk} = d_{ik} \quad \forall i, k$$

$$x_{ijk} \geq 0 \quad \forall i, j, k$$

Combien de fois apparait la variable x_{ijk}? 2

Une fois dans la contrainte i, j et l'autre dans la contrainte i, k

Maintenant si on partitionne en deux les contraintes: les contraintes "entrepots" et "clients", chaque variable x_{ijk} apparait dans exactement une contrainte de chaque type.

Etude de la matrice de contraintes

$$\min \sum_{i,j,k} c_{ijk} x_{ijk}$$

soumis à

$$\sum_k x_{ijk} \leq s_{ij} \quad \forall i,j$$

$$\sum_j x_{ijk} = d_{ik} \quad \forall i,k$$

$$x_{ijk} \geq 0 \quad \forall i,j,k$$

Combien de fois apparait la variable x_{ijk}? 2

Une fois dans la contrainte i, j et l'autre dans la contrainte i, k

Maintenant si on partitionne en deux les contraintes: les contraintes "entrepots" et "clients", chaque variable x_{ijk} apparait dans exactement une contrainte de chaque type.

$\Rightarrow$ La matrice duale est une matrice d'incidence de biparti.
$\Rightarrow$ La matrice est totalement unimodulaire.

Conséquences algorithmiques

La solution optimale au problème peut être déterminée en temps polynomial !