VC-dimension et propriété d'Erdős-Pósa

Nicolas Bousquet Stéphan Thomassé

LIRMM, Montpellier

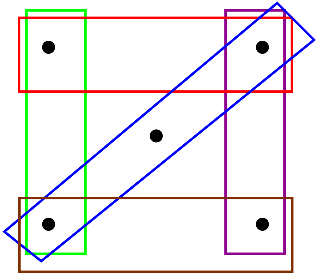
Sommaire

Définition

Un *hypergraphe* H est défini par une paire (V, E) où V est un ensemble de sommets et E est un ensemble de sous-ensembles de V (*hyperarêtes*).

Définition

Un *hypergraphe* H est défini par une paire (V, E) où V est un ensemble de sommets et E est un ensemble de sous-ensembles de V (*hyperarêtes*).

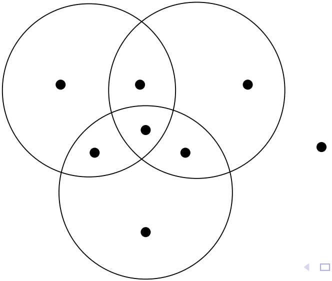


Dimension de Vapnik-Chervonenkis

Définition

Un ensemble d'hyperarêtes $F = \{e_1, \ldots, e_k\}$ forme un *diagramme de Venn complet* si pour tout $F' \subseteq F$, il existe un sommet v tel que :

- $v \in e_i$ si $e_i \in F'$
- $v \notin e_i'$ si $e_i' \in F \setminus F'$



Dimension de Vapnik-Chervonenkis

Définition

Un ensemble d'hyperarêtes $F = \{e_1, ..., e_k\}$ forme un *diagramme de Venn complet* si pour tout $F' \subseteq F$, il existe un sommet v tel que :

- $v \in e_i$ si $e_i \in F'$
- $v \notin e_i'$ si $e_i' \in F \setminus F'$

Définition

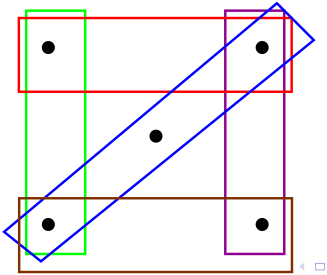
La *VC-dimension* d'un hypergraphe est la taille maximale d'un diagramme de Venn complet.

Dimension de Vapnik-Chervonenkis

Définition

Un ensemble d'hyperarêtes $F = \{e_1, ..., e_k\}$ forme un *diagramme de Venn complet* si pour tout $F' \subseteq F$, il existe un sommet v tel que :

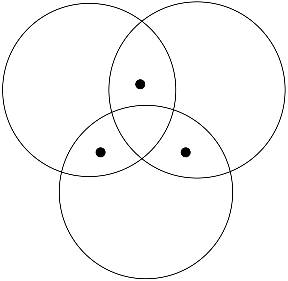
- $v \in e_i$ si $e_i \in F'$
- $v \notin e_i'$ si $e_i' \in F \backslash F'$



Définition

Un ensemble d'hyperarêtes $F = \{e_1, ..., e_k\}$ forme un 2-*diagramme de Venn complet* si pour tout $F' \subseteq F$ avec F' de taille 2, il existe un sommet v tel que :

- $v \in e_i$ si $e_i \in F'$
- $v \notin e'_i$ si $e'_i \in F \backslash F'$



Définition

Un ensemble d'hyperarêtes $F = \{e_1, ..., e_k\}$ forme un 2-*diagramme de Venn complet* si pour tout $F' \subseteq F$ avec F' de taille 2, il existe un sommet v tel que :

- $v \in e_i$ si $e_i \in F'$
- $v \notin e_i'$ si $e_i' \in F \backslash F'$

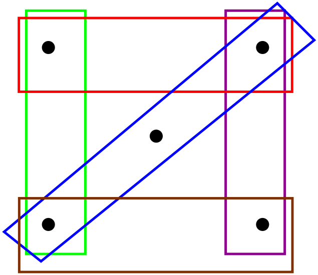
Définition

La 2*VC-dimension* d'un hypergraphe est la taille maximale d'un 2-diagramme de Venn complet.

Définition

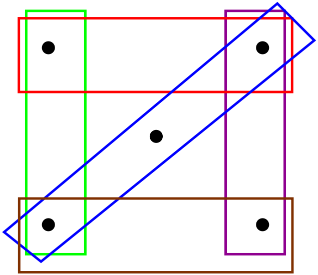
Un ensemble d'hyperarêtes $F = \{e_1, ..., e_k\}$ forme un 2-*diagramme de Venn complet* si pour tout $F' \subseteq F$ avec F' de taille 2, il existe un sommet v tel que :

- $v \in e_i$ si $e_i \in F'$
- $v \notin e_i'$ si $e_i' \in F \backslash F'$



Définitions

- La *transversalité* τ de H est le nombre minimum de sommets nécessaires pour toucher toutes les hyperarêtes.
- Le *packing number* ν est le nombre maximal d'hyperarêtes disjointes.



Théorème

Propriété d'Erdős-Pósa

Une classe d'hypergraphes a la propriété d'Erdős-Pósa ssi il existe une fonction f telle que pour tout $H \in \mathcal{H}$, on a $\tau \leq f(\nu)$.

Théorème

Propriété d'Erdős-Pósa

Une classe d'hypergraphes a la propriété d'Erdős-Pósa ssi il existe une fonction f telle que pour tout $H \in \mathcal{H}$, on a $\tau \leq f(\nu)$.

Théorème (Ding, Seymour, Winkler '94)

Si H est un hypergraphe de 2VC-dimension d alors :
$\tau \leq 11 \cdot d^2 \cdot (d + \nu + 3) \cdot \binom{d+\nu}{\nu}^2$

Définition

Soit $G = (V, E)$ un graphe :

- La *boule de centre x et de rayon l* notée $B(x, l)$ est l'ensemble des sommets à distance inférieure ou égale à l de x.
- L'*hypergraphe des boules de rayon l* est l'hypergraphe de sommets V et d'hyperarêtes $B(x, l)$ pour tout sommet x.

Définition

Soit $G = (V, E)$ un graphe :

- La *boule de centre x et de rayon l* notée $B(x, l)$ est l'ensemble des sommets à distance inférieure ou égale à l de x.
- L'*hypergraphe des boules de rayon l* est l'hypergraphe de sommets V et d'hyperarêtes $B(x, l)$ pour tout sommet x.

Hypergraphe des voisinages itérés d'un graphe

L'hypergraphe des voisinages itérés d'un graphe G est l'union des hypergraphes des boules de rayon l pour tout l.

Théorème (Chepoi,Estellon,Vaxès '07)

Les boules de rayon l des graphes planaires de diamètre $2l$ (pour tout l) a la propriété d'Erdős-Pósa.

Reformulation

Autrement dit, il existe une constante c telle que c sommets du graphe touchent toutes les boules de rayon l d'un graphe planaire de diamètre $2l$.

Théorème (Chepoi,Estellon,Vaxès '07)

Les boules de rayon l des graphes planaires de diamètre $2l$ (pour tout l) a la propriété d'Erdős-Pósa.

Reformulation

Autrement dit, il existe une constante c telle que c sommets du graphe touchent toutes les boules de rayon l d'un graphe planaire de diamètre $2l$.

Remarque

Le résultat de Chepoi,Estellon et Vaxès est basé sur l'hypergraphe des boules de rayon l et le fait que cet hypergraphe a une VC-dimension bornée (par 4).

Théorème (Chepoi,Estellon,Vaxès '07)

Les boules de rayon l des graphes planaires de diamètre $2l$ (pour tout l) a la propriété d'Erdős-Pósa.

Reformulation

Autrement dit, il existe une constante c telle que c sommets du graphe touchent toutes les boules de rayon l d'un graphe planaire de diamètre $2l$.

Preuve alternative

- Commencer par montrer que l'hypergraphe des boules de rayons l a 2VC-dimension 4.
- Utiliser le théorème de Ding-Seymour-Winkler.

Question

Trouver un invariant le plus général possible qui assure une propriété d'Erdos-Posa sur les boules de rayons l.

Definition

La VC-dimension d'un graphe est le maximum de la VC-dimension de l'hypergraphe des voisinages itérés pour tout sous graphe induit.

Definition

La VC-dimension d'un graphe est le maximum de la VC-dimension de l'hypergraphe des voisinages itérés pour tout sous graphe induit.

Remarque 1

Si un graphe a VC-dimension k, alors, pour tout l, son hypergraphe des boules de rayon l a VC-dimension inférieure ou égale à k.

Definition

La VC-dimension d'un graphe est le maximum de la VC-dimension de l'hypergraphe des voisinages itérés pour tout sous graphe induit.

Remarque 2

Il existe d'autres définitions de VC-dimension d'un graphe. La plus répandue est celle de la VC-dimension de l'hypergraphes des voisinages.

Théorème

- Les graphes planaires ont une VC-dimension d'au plus 4.
- Les graphes sans mineur K_d ont une VC-dimension d'au plus $d-1$.

Théorème

Les graphes de rankwidth d ont une VC-dimension bornée par une fonction de d.

Théorème

Il existe une fonction f telle que pour tout graphe G de VC-dimension d et de l-hypergraphe de packing number ν alors $\tau \leq f(\nu, d)$.
Autrement dit : Il existe une fonction f telle que la classe des hypergraphes des boules de rayon l des graphes de VC-dimension d vérifie la propriété d'Erdős-Pósa.

Remarques

- La preuve n'utilise pas de propriétés géométriques des graphes.
- La preuve ne fonctionne pas à 2VC bornée.

Problème

Quelles autres classes de graphes ont une VC-dimension bornée ?

Problème

Quelles autres classes de graphes ont une VC-dimension bornée ?

Conjecture

Les graphes d'intersection de convexes ont une VC-dimension bornée.

Problème

Quelles autres classes de graphes ont une VC-dimension bornée ?

Conjecture

Les graphes d'intersection de convexes ont une VC-dimension bornée.

Problème

Quels invariants classiques peuvent facilement se calculer à VC-dimension bornée ?

Merci de votre attention

Des questions ?