Conjecture de Scott pour les graphes sans triangle maximaux

Nicolas Bousquet Stéphan Thomassé

JGA'11

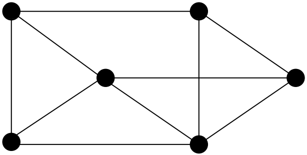
Coloration

$G = (V, E)$ un graphe.

- Coloration des sommets
- Coloration propre : si $uv \in E$ alors couleur$(u) \neq$ couleur(v)

Nombre chromatique χ de G

Nombre minimum de couleurs nécessaires pour colorer G proprement.



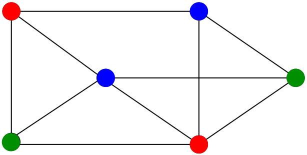
Coloration

$G = (V, E)$ un graphe.

- Coloration des sommets
- Coloration propre : si $uv \in E$ alors couleur$(u) \neq$ couleur(v)

Nombre chromatique χ de G

Nombre minimum de couleurs nécessaires pour colorer G proprement.



Coloration

Remarque 1

$\chi \geq \omega$ (taille d'une clique maximale).

Remarque 2

Il existe des graphes sans triangle de nombre chromatique arbitrairement grand.

Coloration

Remarque 1

$\chi \geq \omega$ (taille d'une clique maximale).

Remarque 2

Il existe des graphes sans triangle de nombre chromatique arbitrairement grand.

Questions pour les classes héréditaires

- Quand a-t-on $\chi = \omega$?
- Quand a-t-on $\chi \leq f(\omega)$?

Coloration

Remarque 1

$\chi \geq \omega$ (taille d'une clique maximale).

Remarque 2

Il existe des graphes sans triangle de nombre chromatique arbitrairement grand.

Questions pour les classes héréditaires

- Quand a-t-on $\chi = \omega$? $\rightsquigarrow$ Chudnovsky et al. (2002)
- Quand a-t-on $\chi \leq f(\omega)$?

Coloration

Remarque 1

$\chi \geq \omega$ (taille d'une clique maximale).

Remarque 2

Il existe des graphes sans triangle de nombre chromatique arbitrairement grand.

Questions pour les classes héréditaires

- Quand a-t-on $\chi = \omega$? $\rightsquigarrow$ Chudnovsky et al. (2002)
- Quand a-t-on $\chi \leq f(\omega)$?

Definition : χ-borné

Une classe de graphes est χ-bornée si $\chi \leq f(\omega)$.

Conjecture de Scott

Subdivision induite

Une subdivision induite d'un graphe F est un graphe où les arêtes de F sont remplacées par des chemins.

Conjecture de Scott '97

Pour tout graphe F, la classe de graphes sans subdivisions induites de F est χ-bornée.

Conjecture de Scott

Subdivision induite

Une subdivision induite d'un graphe F est un graphe où les arêtes de F sont remplacées par des chemins.

Conjecture de Scott '97

Pour tout graphe F, la classe de graphes sans subdivisions induites de F est χ-bornée.

Théorème (B., Thomassé '11)

- Si G ne contient pas de subdivision induite de F.
- Et si G est sans triangle maximal.

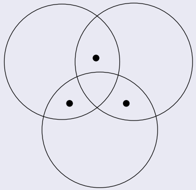
Alors G est de nombre chromatique borné.

Théorème de Ding-Seymour Winkler

Un hypergraphe c'est :

- Un ensemble de sommets.
- Un ensemble d'hyperarêtes (sous ensemble de sommets).

2-diagramme de Venn

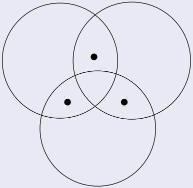


Théorème de Ding-Seymour Winkler

Un hypergraphe c'est :

- Un ensemble de sommets.
- Un ensemble d'hyperarêtes (sous ensemble de sommets).

2-diagramme de Venn



Théorème (Ding, Seymour, Winkler '94)

Si la taille maximale d'un 2-diagramme de Venn est bornée et que toutes les hyperarêtes s'intersectent alors l'hypergraphe a un transversal borné.

Cas 1 : 2-Diagramme de Venn borné

- On considère l'hypergraphe des voisinages.
  - Sommets : sommets du graphe.
  - Hyperarêtes : voisinages des sommets.
- Diamètre 2 : tous les hyperarêtes s'intersectent.

Cas 1 : 2-Diagramme de Venn borné

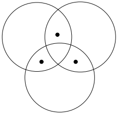
- On considère l'hypergraphe des voisinages.
  - Sommets : sommets du graphe.
  - Hyperarêtes : voisinages des sommets.
- Diamètre 2 : tous les hyperarêtes s'intersectent.
- Taille d'un 2-diagramme de Venn bornée $\Rightarrow$ Dominant borné.
- Dominant borné $\Rightarrow$ Couverture par un nombre borné de voisinages.

Cas 1 : 2-Diagramme de Venn borné

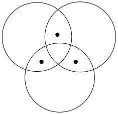
- On considère l'hypergraphe des voisinages.
  - Sommets : sommets du graphe.
  - Hyperarêtes : voisinages des sommets.
- Diamètre 2 : tous les hyperarêtes s'intersectent.
- Taille d'un 2-diagramme de Venn bornée $\Rightarrow$ Dominant borné.
- Dominant borné $\Rightarrow$ Couverture par un nombre borné de voisinages.
- Graphe sans triangle : voisinage $=$ stable. Donc χ est borné.

Donc on peut supposer que la taille d'un 2-Diagramme de Venn est arbitrairement grande.

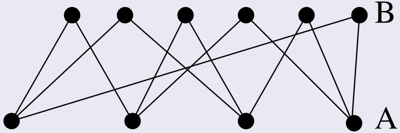
Cas 2 : 2-Diagramme de Venn non borné



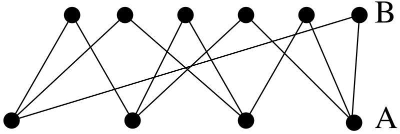
Cas 2 : 2-Diagramme de Venn non borné



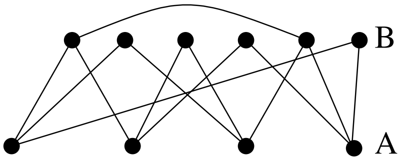
Bilan : Sous graphe de cette forme



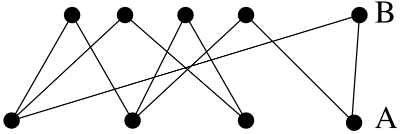
Théorème de Kim



Théorème de Kim



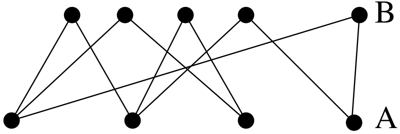
Théorème de Kim



Théorème de Kim '95

Tout graphe sans triangle admet un stable de taille $\sqrt{n \log(n)}$.

Théorème de Kim

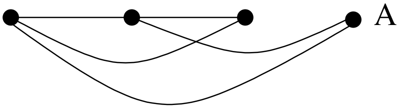


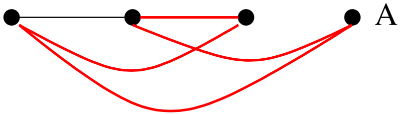
Théorème de Kim '95

Tout graphe sans triangle admet un stable de taille $\sqrt{n\log(n)}$.

Graphe auxiliaire

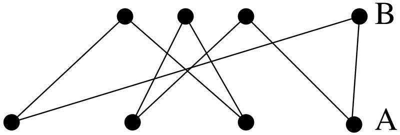
- Sommets : A.
- ab est une arête ssi le sommet correspondant à la paire (a, b) est dans B.

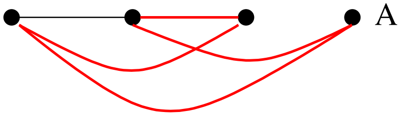

A



Remarque

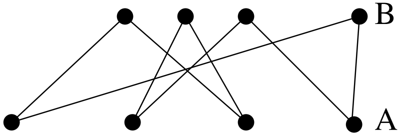
Si le graphe auxiliaire a une subdivision (non induite) de F alors G a une subdivision induite de F.





Remarque

Si le graphe auxiliaire a une subdivision (non induite) de F alors G a une subdivision induite de F.



Théorème (Bollobás, Thomason '98)

Tout graphe de degré moyen au moins $512 \cdot |F|^2$ contient une subdivision (non nécessairement induite) de F.

Conclusion

Conjecture (Gyárfás '87)

La classe des graphes sans long cycle induit est χ-bornée.

Conclusion

Conjecture (Gyárfás '87)

La classe des graphes sans long cycle induit est χ-bornée.

Théorème (Scott '97)

La classe des graphes sans subdivision induite d'un arbre donné est χ-bornée.

Conjecture (Gyárfás '87)

La classe des graphes sans un sous arbre induit donné est χ-bornée.

Merci de votre attention

Des questions ?