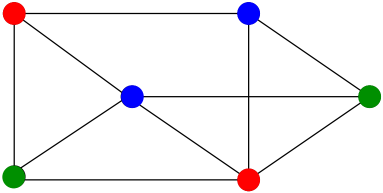
Coloration arc-en-ciel

Nicolas Bousquet Stéphane Bessy

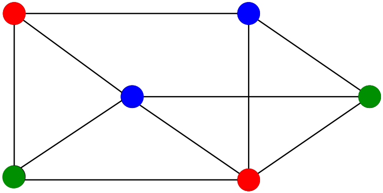
LIRMM, Montpellier

Coloration propre



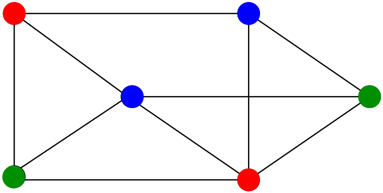
Une coloration est **propre** si deux sommets adjacents ont des couleurs différentes.

Coloration propre



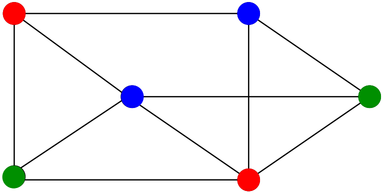
Une coloration est **propre** si deux sommets adjacents ont des couleurs différentes.
Le **nombre chromatique** d'un graphe est le nombre minimum de couleurs pour lequel il existe une coloration propre.
On note $\chi(G)$ le nombre chromatique de G.

Chemin arc-en-ciel



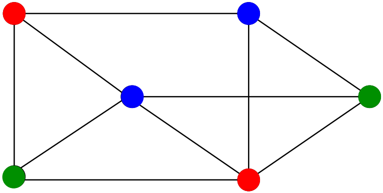
Un **chemin arc-en-ciel** est un chemin composé de $\chi(G)$ sommets qui intersecte un sommet de chaque couleur.

Chemin arc-en-ciel



Un **chemin arc-en-ciel** est un chemin composé de $\chi(G)$ sommets qui intersecte un sommet de chaque couleur.
Une **coloration arc-en-ciel** est une $\chi(G)$-coloration propre où tout sommet est départ d'un chemin arc-en-ciel.

Chemin arc-en-ciel



Un **chemin arc-en-ciel** est un chemin composé de $\chi(G)$ sommets qui intersecte un sommet de chaque couleur.
Une **coloration arc-en-ciel** est une $\chi(G)$-coloration propre où tout sommet est départ d'un chemin arc-en-ciel.

Conjecture (Akbari, Khaghanpoor, Moazzeni)

Tout graphe connexe sauf C_7 admet une coloration arc-en-ciel.

Coloration presque arc-en-ciel

Théorème (Alishahi, Taherkhani, Thomassen '11)

Il existe une coloration propre où tout sommet est départ d'un chemin avec $\chi(G) - 1$ sommets de couleurs différentes.

Coloration presque arc-en-ciel

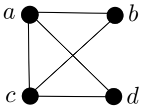
Théorème (Alishahi, Taherkhani, Thomassen '11)

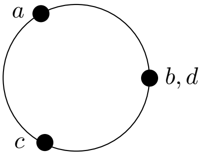
Il existe une coloration propre où tout sommet est départ d'un chemin avec $\chi(G) - 1$ sommets de couleurs différentes.

Preuve :

Définition

Le nombre chromatique circulaire $\chi_c(G)$ est le diamètre minimum d'un cercle où on peut placer les sommets tels que si $xy \in E$, x et y sont à distance au moins 1.

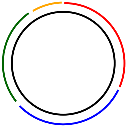




Nombre chromatique circulaire

Folklore

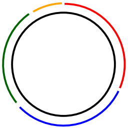
$\chi(G) - 1 < \chi_c(G) \leq \chi(G)$.



Nombre chromatique circulaire

Folklore

$\chi(G) - 1 < \chi_c(G) \leq \chi(G)$.



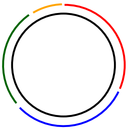
Théorème (Guichard '93)

Tout graphe connexe a une représentation où tout sommet a un sommet à distance 1 à sa droite.

Nombre chromatique circulaire

Folklore

$\chi(G) - 1 < \chi_c(G) \leq \chi(G)$.



Théorème (Guichard '93)

Tout graphe connexe a une représentation où tout sommet a un sommet à distance 1 à sa droite.

- Prendre des tranches de longueur 1 et leur donner une couleur.
- On peut construire un chemin de longueur $\chi(G) - 1$ qui touchent des couleurs toutes différentes.

Folklore

Toute 2-coloration d'un graphe connexe 2-chromatique est arc-en-ciel.

Folklore

Toute 2-coloration d'un graphe connexe 2-chromatique est arc-en-ciel.

Théorème (Bessy, B. '12)

Tout graphe connexe 3-chromatique sauf C_7 admet une coloration arc-en-ciel.

Folklore

Toute 2-coloration d'un graphe connexe 2-chromatique est arc-en-ciel.

Théorème (Bessy, B. '12)

Tout graphe connexe 3-chromatique sauf C_7 admet une coloration arc-en-ciel.

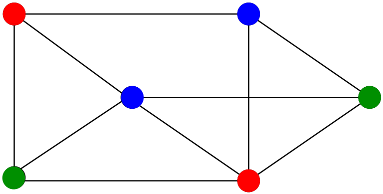
Idée : Représenter une 3-coloration par un graphe orienté.
Une arête va être orientée dans un sens ou dans l'autre suivant un ordre (circulaire) sur les couleurs...

Graphe orienté associé et cycle

Graphe orienté associé à une coloration

Soit $G = (V, E)$ un graphe. On considère un ordre $\mathcal{C}$ sur les couleurs. Le graphe associé à une coloration a :

- V comme ensemble de sommets.
- Un arc $x \rightarrow y$ si xy est une arête et que la couleur de y est la couleur de x plus 1.

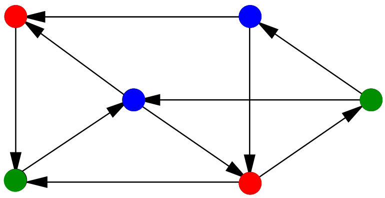


Graphe orienté associé et cycle

Graphe orienté associé à une coloration

Soit $G = (V, E)$ un graphe. On considère un ordre $\mathcal{C}$ sur les couleurs. Le graphe associé à une coloration a :

- V comme ensemble de sommets.
- Un arc $x \to y$ si xy est une arête et que la couleur de y est la couleur de x plus 1.



Si le graphe contient un circuit

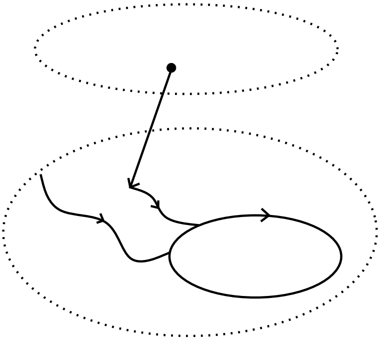
Montrons que tous les sommets peuvent être certifiés :

- Tous les sommets du circuit sont certifiés.

Si le graphe contient un circuit

Montrons que tous les sommets peuvent être certifiés :

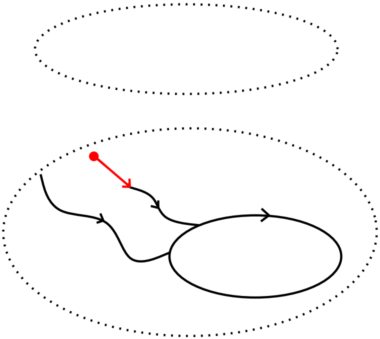
- Tous les sommets du circuit sont certifiés.



Si le graphe contient un circuit

Montrons que tous les sommets peuvent être certifiés :

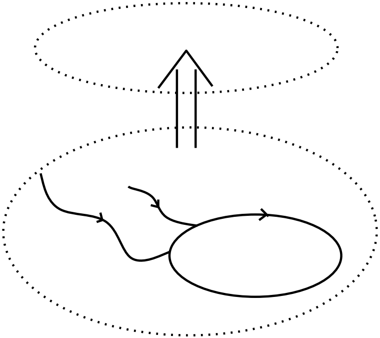
- Tous les sommets du circuit sont certifiés.
- Tous les sommets ayant un arc sortant vers un sommet certifié sont certifiés.



Si le graphe contient un circuit

Montrons que tous les sommets peuvent être certifiés :

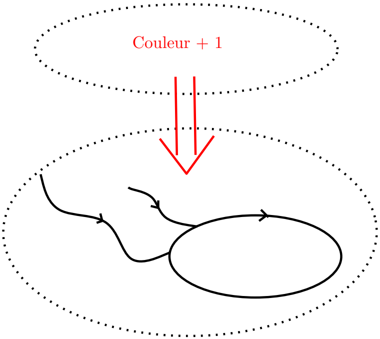
- Tous les sommets du circuit sont certifiés.
- Tous les sommets ayant un arc sortant vers un sommet certifié sont certifiés.



Si le graphe contient un circuit

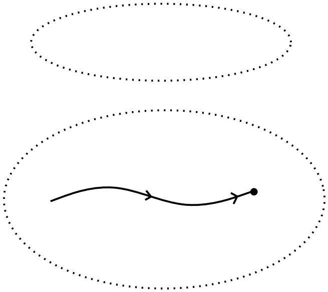
Montrons que tous les sommets peuvent être certifiés :

- Tous les sommets du circuit sont certifiés.
- Tous les sommets ayant un arc sortant vers un sommet certifié sont certifiés.
- Sinon on peut faire en sorte que des arcs descendent.



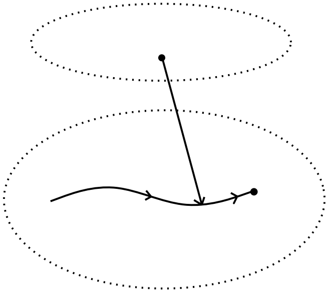
Pour les 3-colorations...

- Les sommets d'un long chemin orienté sont certifiés.



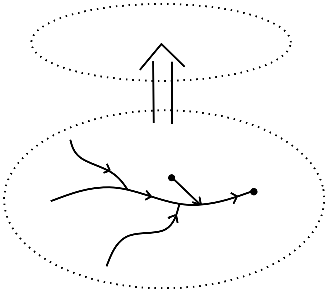
Pour les 3-colorations...

- Les sommets d'un long chemin orienté sont certifiés.
- Si un sommet a un voisin sortant sur le chemin, il est certifié.



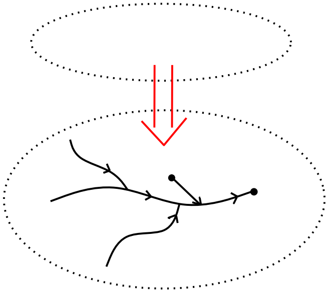
Pour les 3-colorations...

- Les sommets d'un long chemin orienté sont certifiés.
- Si un sommet a un voisin sortant sur le chemin, il est certifié.



Pour les 3-colorations...

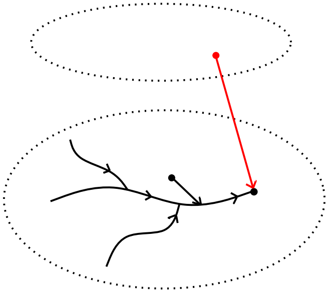
- Les sommets d'un long chemin orienté sont certifiés.
- Si un sommet a un voisin sortant sur le chemin, il est certifié.
- Si aucun sommet n'a un arc vers un sommet certifié, on retourne les arcs.



Pour les 3-colorations...

- Les sommets d'un long chemin orienté sont certifiés.
- Si un sommet a un voisin sortant sur le chemin, il est certifié.
- Si aucun sommet n'a un arc vers un sommet certifié, on retourne les arcs.

Seul cas problématique : Un sommet non certifié a la source comme voisin sortant.



Problèmes ouverts

- Résoudre la conjecture.

Problèmes ouverts

- Résoudre la conjecture.

Question

Existe-t-il toujours une $\chi(G)$-coloration arc-en-ciel où tout sommet est départ d'un chemin de couleurs adjacentes ?

Problèmes ouverts

- Résoudre la conjecture.

Question

Existe-t-il toujours une $\chi(G)$-coloration arc-en-ciel où tout sommet est départ d'un chemin de couleurs adjacentes ?

Question 2

Existe-t-il une coloration arc-en-ciel pour les colorations par liste ?

Merci de votre attention