Coloration de graphes: algorithmes et structures

Nicolas Bousquet

Semindoc - 18/04/2012

Equipe AlGCo

Algorithmique et théorie des graphes. Plus particulièrement :

- Complexité paramétrée.
- Aspects topologiques de graphes.
- Théorie des matroïdes.
- Coloration de graphes.

1. Introduction

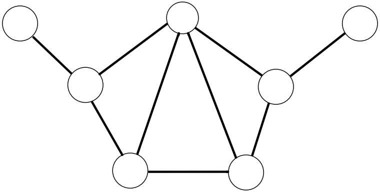
2. Structure de graphes et coloration

3. Structure des colorations

Graphes et coloration

Définition

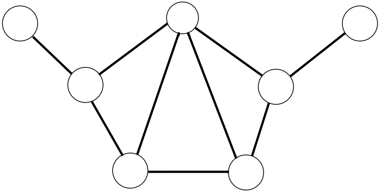
Un graphe G est une paire (V, E) où V est un ensemble de sommets et E un ensemble d'arêtes reliant les sommets.
Deux sommets sont voisins si ils sont reliés par une arête.



Graphes et coloration

Définition

Un graphe G est une paire (V, E) où V est un ensemble de sommets et E un ensemble d'arêtes reliant les sommets.
Deux sommets sont voisins si ils sont reliés par une arête.



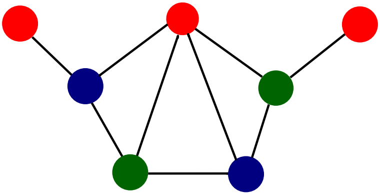
Coloration

Une k-coloration des sommets (resp. arêtes) est une fonction de l'ensemble des sommets dans $\{1, ..., k\}$.

Colorations

Une coloration est dite *propre* quand elle vérifie certaines propriétés. Par exemple :

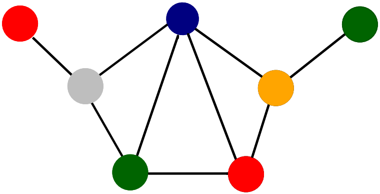
- les sommets/arêtes voisin(e)s ont des couleurs différentes.



Colorations

Une coloration est dite *propre* quand elle vérifie certaines propriétés. Par exemple :

- les sommets/arêtes voisin(e)s ont des couleurs différentes.
- les sommets/arêtes à distance deux ont des couleurs différentes.

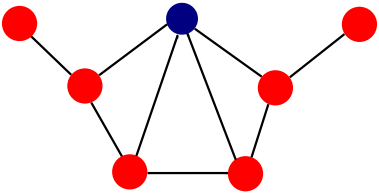


Colorations

Une coloration est dite *propre* quand elle vérifie certaines propriétés. Par exemple :

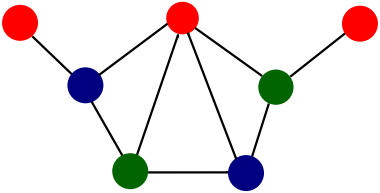
- les sommets/arêtes voisin(e)s ont des couleurs différentes.
- les sommets/arêtes à distance deux ont des couleurs différentes.
- les sommets d'une même couleur forment un graphe acyclique (i.e. une forêt).

Mais on peut aussi colorer par liste, de manière injective, arêtes sommets distinguantes...etc...



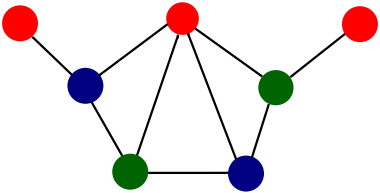
Algorithmique

Dans la suite on colorera les sommets de façon à ce que deux sommets voisins aient des couleurs différentes.



Algorithmique

Dans la suite on colorera les sommets de façon à ce que deux sommets voisins aient des couleurs différentes.



Question

Est-ce simple de déterminer si on peut colorer un graphe avec k couleurs ?

Algorithmique

Folklore

On peut déterminer en temps polynomial si un graphe est 2 colorable.

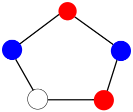
Preuve :

Algorithmique

Folklore

On peut déterminer en temps polynomial si un graphe est 2 colorable.

Preuve :

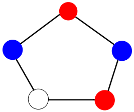


Algorithmique

Folklore

On peut déterminer en temps polynomial si un graphe est 2 colorable.

Preuve :



Il n'y a pas de cycles impairs si et seulement si, dans un parcours en largeur, aucun niveau ne contient d'arêtes.

Et ensuite ?

Théorème

Il est NP-complet de déterminer si un graphe est 3-colorable.

Et ensuite ?

Théorème

Il est NP-complet de déterminer si un graphe est 3-colorable.

Pire....

Innaproximabilité

Sous la condition $P \neq NP$, il est impossible d'approximer la coloration à un facteur $n^{1-\epsilon}$ avec un algorithme polynomial.

1. Introduction

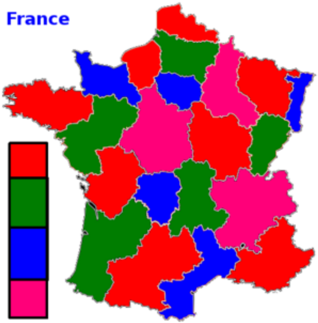
2. Structure de graphes et coloration

3. Structure des colorations

De l'intérêt de la structure

Graphes planaire

Un graphe est dit planaire si on peut le représenter comme un graphe d'intersection de régions du plan.



Coloration des graphes planaires

Folklore

Tout graphe planaire est 6 colorable.

Preuve :

Coloration des graphes planaires

Folklore

Tout graphe planaire est 6 colorable.

Preuve :

Formule d'Euler

Pour tout graphe planaire,

$$S - A + F = 2.$$

Coloration des graphes planaires

Folklore

Tout graphe planaire est 6 colorable.

Preuve :

Formule d'Euler

Pour tout graphe planaire,

$$S - A + F = 2.$$

- On a $F \leq 2A/3$.
- En re-injectant dans la formule d'Euler on obtient : $A \leq 3S - 6$.

Coloration des graphes planaires

Folklore

Tout graphe planaire est 6 colorable.

Preuve :

Formule d'Euler

Pour tout graphe planaire,

$$S - A + F = 2.$$

- On a $F \leq 2A/3$.
- En re-injectant dans la formule d'Euler on obtient : $A \leq 3S - 6$.
- Comme $\sum_{x \in S} deg(x) = 2A$, il existe un sommet de degré au plus 5.

Théorème des 4 couleurs

Conjecture (Guthrie, 1852)

Tout graphe planaire est 4 colorable.

Théorème des 4 couleurs

Théorème (Appel, Haken '76)

Tout graphe planaire est 4 colorable.

- Une étude de 1478 cas.

Théorème des 4 couleurs

Théorème (Appel, Haken '76)

Tout graphe planaire est 4 colorable.

- Une étude de 1478 cas.
- Simplifiée par Robertson, Sanders, Seymour, Thomas pour obtenir "seulement" 633 cas.

Cliques et coloration

Définition

Une clique est un ensemble de sommets du graphe deux à deux reliés.

On notera ω la taille d'une clique maximale et χ le nombre minimum de couleurs requises pour colorer le graphe G.

Remarque

$\chi \geq \omega$.

Réciproque ?

Il existe des graphes sans triangle dont le nombre chromatique est arbitrairement grand.

Une famille de contre-exemple

On crée la famille G_i par récurrence de la façon suivante :

- G_2 est une arête.
- Pour créer G_{k+1} :
  - Créer k copies de G_k.
  - Pour tout ensemble de taille k contenant exactement un sommet dans chaque copie, créer un sommet relié à cet ensemble de sommets.

Une famille de contre-exemple

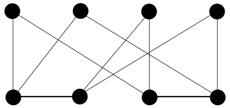
On crée la famille G_i par récurrence de la façon suivante :

- G_2 est une arête.
- Pour créer G_{k+1} :
  - Créer k copies de G_k.
  - Pour tout ensemble de taille k contenant exactement un sommet dans chaque copie, créer un sommet relié à cet ensemble de sommets.

Une famille de contre-exemple

On crée la famille G_i par récurrence de la façon suivante :

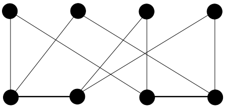
- G_2 est une arête.
- Pour créer G_{k+1} :
  - Créer k copies de G_k.
  - Pour tout ensemble de taille k contenant exactement un sommet dans chaque copie, créer un sommet relié à cet ensemble de sommets.



Une famille de contre-exemple

On crée la famille G_i par récurrence de la façon suivante :

- G_2 est une arête.
- Pour créer G_{k+1} :
  - Créer k copies de G_k.
  - Pour tout ensemble de taille k contenant exactement un sommet dans chaque copie, créer un sommet relié à cet ensemble de sommets.



$\Rightarrow$ G_{k+1} est sans triangle et de nombre chromatique $k+1$.

Classes χ-bornées

Définition

Une classe de graphe est dite χ-bornée s'il existe une fonction f telle que $\chi(G) \leq f(\omega(G))$.

Que dire si la fonction est l'identité ?

Classes χ-bornées

Définition

Une classe de graphe est dite χ-bornée s'il existe une fonction f telle que $\chi(G) \leq f(\omega(G))$.

Que dire si la fonction est l'identité ?

Théorème (Chudnovsky, Robertson, Seymour, Thomas)

L'ensemble des graphes vérifiant l'égalité $\chi = \omega$ pour tout sous graphe induit, est l'ensemble des graphes sans trous impairs et sans antitrous impairs.

Une classe χ-bornée

Theoreme (Gyárfás)

La classe des graphes sans triangle et sans chemin induit de longueur au moins k est χ-bornée.

Preuve :

But : Si on a besoin de beaucoup de couleur, il existe un chemin de longueur k qui part de n'importe quel point du graphe (connexe).

Une classe χ-bornée

Theoreme (Gyárfás)

La classe des graphes sans triangle et sans chemin induit de longueur au moins k est χ-bornée.

Preuve :

But : Si on a besoin de beaucoup de couleur, il existe un chemin de longueur k qui part de n'importe quel point du graphe (connexe).

- Prendre un sommet x du graphe. Considérer le graphe sans x et son voisinage.
- Il existe une composante connexe C où on a besoin de $(\chi - 2)$ couleurs pour colorer la composante.
- Selectionner un voisin y de x qui voit C.
- Hypothèse de récurrence sur la composante $y \cup C$.

Mais encore...

Théorème

Les classes de graphes suivantes :

- Sans cycle induits avec une corde (Trotignon, Vušković).
- Sans subdivision de taureau (Chudnovsky, Penev, Scott, Trotignon).
- Sans étoile (Gyárfás).
- Sans subdivision induite d'un arbre fixé (Scott).
- De diamètre 2 et sans subdivision induite de H quelconque (B., Thomassé).

sont χ-bornées.

1 Introduction

2 Structure de graphes et coloration

3 Structure des colorations

Colorations adjacentes

Définition

Deux colorations propres sont dites adjacentes si on peut passer de l'une à l'autre en changeant la couleur d'un seul sommet.

Chemin entre colorations

Il existe un chemin entre deux colorations s'il est possible de passer de l'une à l'autre par une suite de colorations adjacentes.

Graphes k-mixing

Graphe k-mixing

Un graphe G est dit k-mixing si pour toute paire de k-coloration propre de G, il existe un chemin de l'une à l'autre.

Graphes k-mixing

Graphe k-mixing

Un graphe G est dit k-mixing si pour toute paire de k-coloration propre de G, il existe un chemin de l'une à l'autre.

Remarque

Pour tout k, il existe des graphes 2-colorables qui ne sont pas k-mixing.

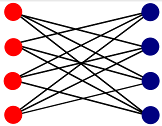
Graphes k-mixing

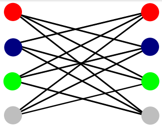
Graphe k-mixing

Un graphe G est dit k-mixing si pour toute paire de k-coloration propre de G, il existe un chemin de l'une à l'autre.

Remarque

Pour tout k, il existe des graphes 2-colorables qui ne sont pas k-mixing.





Théorème (Bonamy, B.)

Les graphes de treewidth k sont $k+2$-mixing avec un chemin de longueur quadratique.

Merci

Des questions ?