Master M1 MEEF ; Préparation au CAPES Maths option Informatique
Durée :3 heures
Documents non autorisés

Partie 0

Questions de cours : Réponses claires et synthétiques

1) Citer deux raisons justifiant le choix du binaire en informatique.

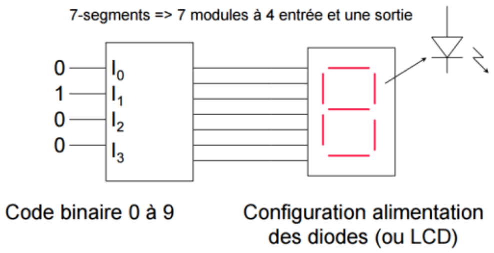
Réponse :

- Le binaire est utilisé en informatique car il permet de modéliser le fonctionnement des composants de commutation comme le TTL ou le CMOS. Les processeurs des ordinateurs actuels sont composés de transistors ne gérant chacun que deux états.
- Par exemple le chiffre 0 sera utilisé pour signifier une absence de tension, et le chiffre 1 pour signifier sa présence. Cette marge de tolérance permet de pousser les cadences des microprocesseurs à des valeurs atteignant sans problème plusieurs gigahertz.
- En n'utilisant que 2 chiffres (base 2), les processeurs effectuent des calculs très rapidement et très simplement sur des nombres comportant uniquement des 0 et des 1.

2) Qu'est-ce qu'un transcodeur ? Donner un exemple d'application.

Réponse :

Un transcodeur est un circuit combinatoire qui a n entrées et m sorties.
Exemple d'application : réaliser ou configurer un afficheur à l'aide des diodes…



3) Quelle est la différence entre « la logique combinatoire » et « la logique séquentielle » ?

Réponse :

- La logique combinatoire ; L'état de la (ou des) sortie(s) à un instant donné ne dépend que du circuit et de la valeur des entrées à cet instant.

- En logique séquentielle : L'état de sortie du circuit à un instant donné dépend de la valeur des entrées à cet instant et de la valeur de la (ou des) sortie(s) aux instants antérieurs, plus la notion d'horloge.
- La logique séquentielle fait donc intervenir la notion de mémoire contrairement à la logique combinatoire.

Master M1 MEEF ; Préparation au CAPES Maths option Informatique
Durée :3 heures
Documents non autorisés

4) A quoi sert l'horloge en informatique ?

Réponses :

Deux rôles important : la synchronisation et le cadencement

- L'horloge permet de synchroniser et gérer les données
- Le cadencement : Le rôle de l'horloge est de cadencer le rythme du travail du microprocesseur par exemple

4) Quel est la différence entre les images bitmap et vectorielles ?

5) Réponses :

Bitmap : Dessin point par point (pixel)

Vectoriel : Équations mathématiques

Une image vectorielle, est une image numérique composée d'objets géométriques individuels, des primitives géométriques (segments de droite, arcs de cercle, courbes de Bézier, polygones, etc.), définis chacun par différents attributs (forme, position, couleur, remplissage, visibilité, etc.) et auxquels on peut appliquer différentes transformations (homothéties, rotations, écrasement, mise à l'échelle...). Elle se différencie en cela des images matricielles (ou images bitmap), qui sont constituées de pixels.

	BITMAP	**VECTORIELLE**
Principes	Grille de points (pixels: picture element) où chaque pixel possède une position et une couleur. L'ensemble des points forme un dessin	Des lignes, des courbes calculées mathématiquement (équation vectorielle) et qui peuvent être modifiées (épaisseur, longeur, couleur, forme...). L'ensemble des lignes forme un dessin
Caractéristiques des dessins	Tracé en «escalier» donc zoom délicat, voire impossible, écriture peu lisible si trop petite. Modification très délicate car il faut modifier point par point ou tous les points en même temps. Des fichiers Volumineux (chaque point est codé et mémorisé)	Tracé précis de lignes donc zoom illimité (calcul du logiciel), écriture fine lisible. Modification facile par «élément» qui peut être déplacé, agrandi, tourné... Légers (des formules mathématiques sont codées)

Master M1 MEEF ; Préparation au CAPES Maths option Informatique
Durée :3 heures
Documents non autorisés

6) A quoi sert la compression de données.
La compression consiste à réduire la taille physique de blocs d'informations, pour permettre le transit via les réseaux d'informations.

7) Quelle est la différence entre un demi-additionneur et un additionneur complet ?
Le demi additionneur est un circuit combinatoire qui permet de réaliser la somme arithmétique de deux nombres A et B chacun sur un bit (ne prend pas en compte la retenue précédente).
L'additionneur complet est un circuit combinatoire prend en compte la retenue précédente. Il possède 3 entrées ; le premier nombre, le deuxième nombre et la retenue entrante.

8) Rappeler les principes des algorithmes de codage sans pertes ? Citer deux algorithmes de codage de données sans pertes ? Donner les avantages et les inconvénients de chaque algorithme ? Quelles solutions techniques pourriez-vous proposer pour améliorer ce type d'algorithmes (algorithmes de codage sans pertes).

Un algorithme de compression sans perte restitue après décompression une suite de bits strictement identique à l'originale. La méthode de compression dépend intrinsèquement du type de données à compresser. Les algorithmes de compression sans perte sont utilisés pour les archives, les images ou les textes….

Les 3 algorithmes de compression sans perte les plus utilisés sont : RLE, LZW, Huffman.

RLE : C'est un type d'algorithme relativement simple, il est basé sur la répétition de caractère et donc si les données à compresser sont peu ou pas répétées le taux de compression sera faible.

LZW : Cet algorithme fonctionne sur le même principe que le RLE à savoir supprimer les redondances. Il ne lit pas byte par byte mais plutôt « mot » par « mot ». Et donc pour cela il doit utiliser une bibliothèque de mot.

Il a pour principe de ne plus coder des bytes mais des groupes de bytes grâce à l'utilisation d'un dictionnaire qui permet au cours de la compression de ne plus stocker les mots mais juste leurs références vers le dictionnaire.

Huffman : Cet algorithme se base sur les fréquences d'apparition des caractères
Il va les stocker dans une table et construire l'arbre de codage à partir de cette table.

Donc il va réduire le nombre de bytes occupés par les caractères dont la fréquence est élevée et augmenter celui dont elle est faible.

Algorithme	Avantages/Inconvénients
RLE(faible)	Compression moyenne Efficace pour les données a forte répétition
LZW(bon)	Bonne compression Efficace sur texte.
Huffman(moyen)	Bonne compression mais nécessité de fournir la table de fréquence Efficace sur tous types de données Forme adaptative très intéressante.

- Certains algorithmes de compression sont basés sur des dictionnaires spécifiques à un type de données : ce sont des encodeurs non adaptifs. Les occurrences de lettres dans un fichier texte par exemple dépendent de la langue dans laquelle celui-ci est écrit.

- Un encodeur adaptif s'adapte aux données qu'il va devoir compresser, il ne part pas avec un dictionnaire déjà préparé pour un type de données.

Exemple :
Hauffman adaptatif : Cette variante permet de ne plus avoir besoin de parcourir les données avant. Avec cet algorithme, n’est plus nécessaire de fournir la table de fréquence et donc le gain de compression est relativement important.
Mais cet algorithme étant généralement récursif il est plus lent que la version statique.

Master M1 MEEF ; Préparation au CAPES Maths option Informatique
Durée :3 heures
Documents non autorisés

Partie I : Codage et représentation des données

Exercice1 :

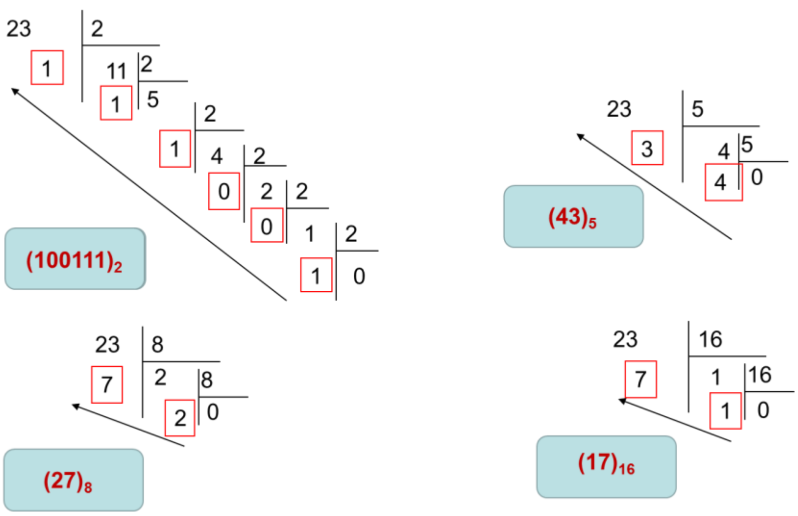
a) Effectuer les conversions suivantes :

- Convertir le nombre décimal 15 en binaire.
- Convertir le nombre binaire 10011001 en décimal.
- Convertir le nombre hexadécimal 8AB en binaire.
- Convertir le nombre binaire 10011110 en hexadécimal
- **$(0,9)_{10}=(?)_2$**
- **$(23)_{10}=(?)_2=(?)_5=(?)_8=(?)_{16}$**
- **$(27)_5=(?)_7$**
- **$(11001010010110)_2=(?)_8$**
- **$(110010100,10101)_2=(?)_8$**

Réponses :

- **$(15)_{10}=(1111)_2$**
- $(10011001)_2 = 1*2^7+0*2^6+0*2^5+1*2^4+1*2^3+0*2^2+0*2^1+1*2^0=(153)_{10}$
- $(8AB)_{16}=$**$(1000\ 1010\ 1011)_2$**
- $(1001\ 1110)_2=$**$(9E)_{16}$**
- **$(0,9)_{10}=(11100)_2$**

0,9 * 2 = 1,8
0,8 * 2 = 1,6
0,6 * 2 = 1,2
0,2 * 2 = 0,4
0,4 * 2 = 0,8



- $(27)_5=2*5^1+7*5^0=10+7=(17)_{10}$
- **$(11001010010110)_2 = =(\underline{011}\ \underline{001}\ \underline{010}\ \underline{010}\ \underline{110})_2=(31226)_8$**
- **$(110010100,10101)_2=(\underline{110}\ \underline{010}\ \underline{100}\ ,\ \underline{101}\ \underline{010})_2=(624,52)_8$**

Master M1 MEEF ; Préparation au CAPES Maths option Informatique
Durée :3 heures
Documents non autorisés

b) Donnez la valeur **décimale** des nombres binaires **(arithmétique signée, format complément à deux)** suivants :

Réponses :

- 010 = 2
- 10 = -2
- 1111 1111 1111 001 = -7
- 1011.001= -4.875

c) Donnez la valeur **binaire** (**arithmétique signée**, format complément à deux) des nombres décimaux suivants en utilisant le moins de bits possibles :

Réponses :

- -15 = 10001
- 2.125 = 010.001
- -1.75 = 10.01
- 3.3 = 011.0 1001 1001 1001

Partie II : L'algèbre de Boole et circuit combinatoire

Exercice 1 :

- Démontrez analytiquement par l'algèbre de Boole que :

$$(A\overline{C}+BC)\oplus(A\overline{B}+BC)=A(B\oplus C)$$
$$A(\overline{A}+\overline{B})(A+B)=A.\overline{B}$$

1)

$$(A\overline{C}+BC)\oplus(A\overline{B}+BC)=((A\overline{C}+BC).\overline{(A\overline{B}+BC)})+(\overline{(A\overline{C}+BC)}.(A\overline{B}+BC))$$
$$=((A\overline{C}+BC).(\overline{A}+B)(\overline{B}+\overline{C}))+((\overline{A}+C)(\overline{B}+\overline{C})(A\overline{B}+BC))$$
$$=((A\overline{C}+BC)(\overline{A}\overline{B}+\overline{A}\overline{C}+B\overline{C}))+(\overline{A}\overline{B}+\overline{A}\overline{C}+\overline{B}C)(A\overline{B}+BC)$$
$$=(AB\overline{C})+(A\overline{B}C)=(AB\overline{C}+A\overline{B}C)=A(B\oplus C)$$

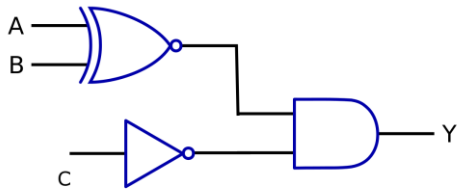
2)

$$A(\overline{A}+\overline{B})(A+B)=A.\overline{B}$$
$$A(\overline{A}+\overline{B})(A+B)=A.(A\overline{A}+\overline{A}B+\overline{B}A+\overline{B}B)=A.(\overline{A}B+\overline{B}A)=A\overline{A}B+A\overline{B}A=A\overline{B}$$

Master M1 MEEF ; Préparation au CAPES Maths option Informatique
Durée :3 heures
Documents non autorisés

Exercice 2 :

Retrouver la table de Karnaugh de la fonction Y(A,B,C) :



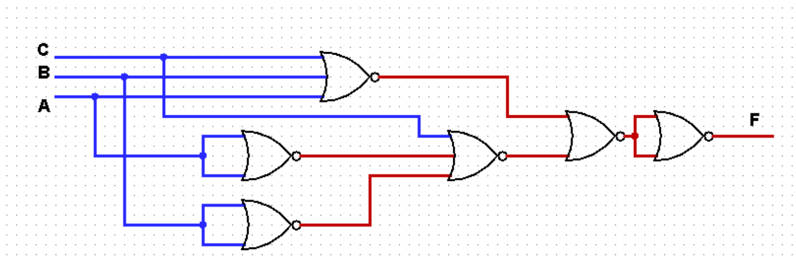
A \ BC	00	01	11	10
0				
1				

1. Donner l'expression simplifiée de Y
2. Dessiner le circuit équivalent qui utilise uniquement des portes NOR

A \ BC	00	01	11	10
0	1	0	0	0
1	0	0	0	1

$$F = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + AB\bar{C} = \bar{C}(\bar{A}\bar{B} + AB) = \bar{C}(\overline{A \oplus B})$$

$$F = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + AB\bar{C} = \overline{\overline{\bar{A}\bar{B}\bar{C}}} + \overline{\overline{AB\bar{C}}} == \overline{\overline{A+B+C} + \overline{\bar{A}+\bar{B}+C}}$$



Master M1 MEEF ; Préparation au CAPES Maths option Informatique
Durée :3 heures
Documents non autorisés

Exercice 2 : Représentation des circuits logiques

Une fonction logique à 4 variables booléennes qui sont : A, B, C et D.

1) En utilisant exclusivement l'algèbre de Boole, démontrez que :

$$(B + AC\overline{(A \oplus C)})(D + \overline{\overline{A} + \overline{C}}) = AC + BD$$

2) Vérifiez votre résultat avec le tableau de Karnaugh.

AB \ CD	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

3) Tracer le circuit logique (logigramme) en utilisant uniquement des portes **NAND**

Réponse

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	1	1	0
11	0	1	1	1
10	0	0	1	1

$$(B + AC\overline{(A \oplus C)})(D + \overline{\overline{A} + \overline{C}}) = AC + BD$$

$$(B + AC\overline{(A \oplus C)})(D + \overline{\overline{A} + \overline{C}}) = (B + AC(\overline{A}\overline{C} + AC))(D + AC)$$

$$= (B + AC\overline{A}\overline{C} + ACAC))(D + AC) = (B + AC))(D + AC)$$

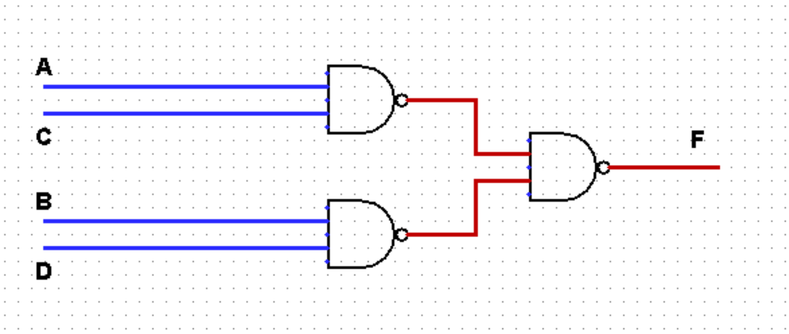
$$= BD + BAC + ACD + AC = BD + AC(B + D + 1) = BD + AC$$

Master M1 MEEF ; Préparation au CAPES Maths option Informatique
Durée :3 heures
Documents non autorisés

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	1	1	0
11	0	1	1	1
10	0	0	1	1

$$F = AC + BD$$

$$F = AC + BD = \overline{\overline{AC + BD}} = \overline{\overline{AC}.\overline{BD}}$$



Exercice 3 : Conception de circuit

Vous devez réaliser un jeu de roche-papier-ciseau numérique. Il y a donc **deux joueurs A et B** qui disposent chacun d'un interrupteur à trois positions qui encode le choix sur deux bits, selon l'encodage suivant, pour chacun des joueurs **(A1A0) et (B1B0) :**

00 : Roche
01 : Papier
10 : Ciseaux

- Le système a deux lumières (sorties) **SA et SB**.
- La roche l'emporte sur le ciseau. Le ciseau l'emporte sur le papier et le papier l'emporte sur la roche. Donc, par exemple, **si A1A0 =01 (Papier) et B1B0 = 10 (Ciseau),** c'est le **joueur B** qui l'emporte et la **lampe B** s'allume **(SA = 0 et SB = 1).**
- En cas d'égalité, aucune lumière ne s'allume.

3. Proposer un circuit pour réaliser la fonction demandée : vous devez remplir la table de vérité ci-dessous,
4. Trouver l'expression simplifiée des sorties (en utilisant les tableaux de Karnaugh)
5. Dessiner le circuit équivalent (logigramme) (**On peut utiliser des portes à 3 entrées)**

Master M1 MEEF ; Préparation au CAPES Maths option Informatique
Durée :3 heures
Documents non autorisés

A1	A0	B1	B0	**SA**	**SB**
0	0	0	0		
0	0	0	1		
0	0	1	0		
0	0	1	1		
0	1	0	0		
0	1	0	1		
0	1	1	0		
0	1	1	1		
1	0	0	0		
1	0	0	1		
1	0	1	0		
1	0	1	1		
1	1	0	0		
1	1	0	1		
1	1	1	0		
1	1	1	1		

A_1	A_0	B_1	B_0	S_A	S_B
0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	1
0	0	1	0	1	0
0	0	1	1	-	-
0	1	0	0	1	0
0	1	0	1	0	0
0	1	1	0	0	1
0	1	1	1	-	-
1	0	0	0	0	1
1	0	0	1	1	0
1	0	1	0	0	0
1	0	1	1	-	-
1	1	0	0	-	-
1	1	0	1	-	-
1	1	1	0	-	-
1	1	1	1	-	-

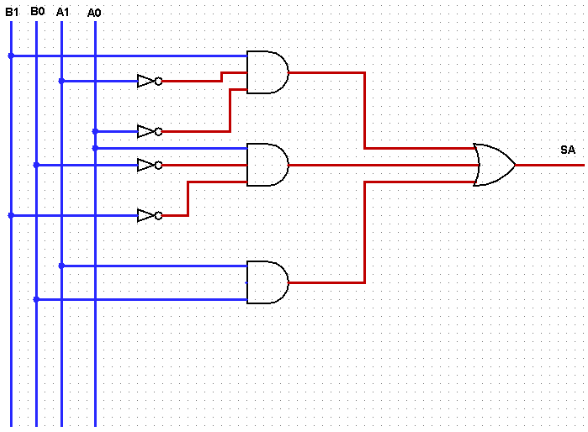
A10 \ B10	00	01	11	10
00	0	0	-	1
01	1	0	-	0
11	-	-	-	-
10	0	1	-	0

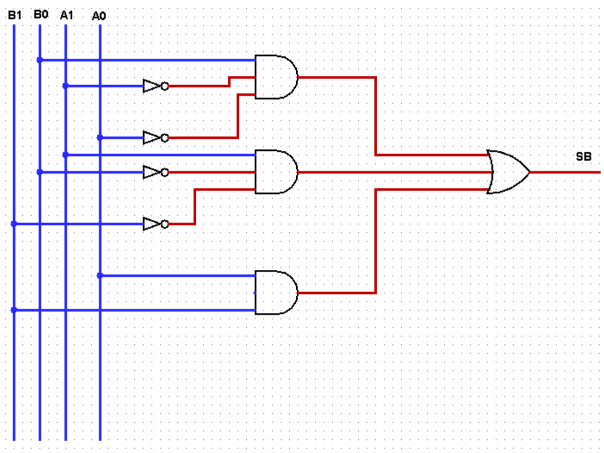
A10 \ B10	00	01	11	10
00	0	1	-	0
01	0	0	-	1
11	-	-	-	-
10	1	0	-	0

Master M1 MEEF ; Préparation au CAPES Maths option Informatique
Durée :3 heures
Documents non autorisés

$$S_A = B_1.\overline{A_1}.\overline{A_0} + A_0.\overline{B_1}.\overline{B_0} + A_1.B_0$$

$$S_B = B_0.\overline{A_1}.\overline{A_0} + A_1.\overline{B_1}.\overline{B_0} + A_0.B_1$$





Exercice 4 : Circuit combinatoire

Soit la fonction logique suivante :

$$Z = (A \oplus B)(\overline{A}C + \overline{B}\overline{D})$$

1) Que vaut Z si AB vaut :
   a) AB= 00 Z= **0**
   b) AB= 01 Z= **C**
   c) AB= 10 Z= $\overline{D}$
   d) AB= 11 Z= **0**

2) Représentez la fonction Z par une table de Karnaugh où C et D sont inscrites.

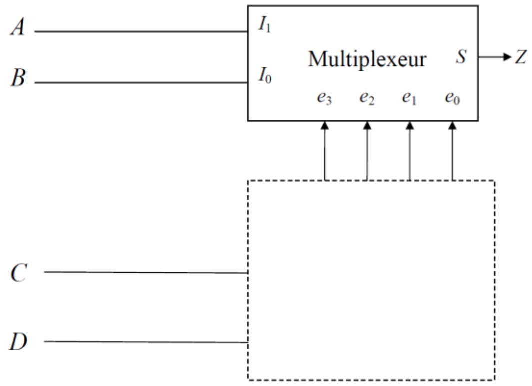
A\B	0	1
0		
1		

3) Vous devez réaliser cette fonction à l'aide d'un multiplexeur à quatre entrées ($e_0 \rightarrow e_3$) et commandé par deux bits de sélection (I_1, I_0). Les variables *A* et *B* seront les bits de sélection comme l'illustre la figure à la page suivante. **Identifier sur la table de Karnaugh** qui suit les entrées du multiplexeur ($e_0 \rightarrow e_3$). Un des choix a été entré pour vous.

Master M1 MEEF ; Préparation au CAPES Maths option Informatique
Durée :3 heures
Documents non autorisés

A\B	0	1
0	e_0	
1		

4) Concevoir le circuit combinatoire à deux entrées (C, *D*) et dont les quatre sorties sont branchées au multiplexeur.



Circuit combinatoire à dessiner

Réponses :

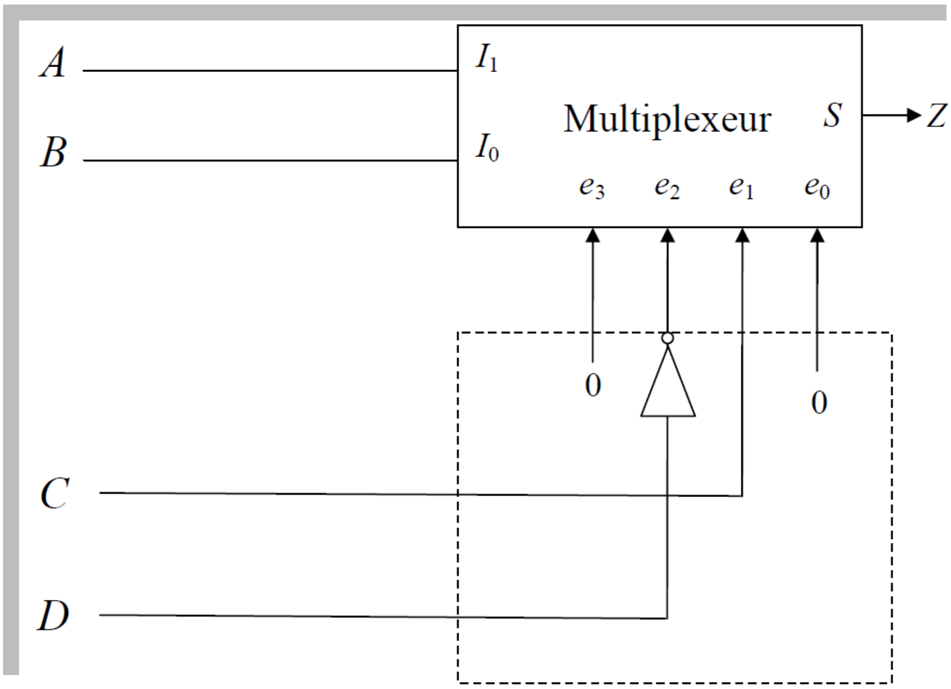
a) AB= 00 Z= **0**
b) AB= 01 Z= **C**
c) AB= 10 Z= $\overline{D}$
d) AB= 11 Z= **0**

A\B	0	1
0	0	C
1	$\overline{D}$	0

Cette fonction est réalisée à l'aide d'un multiplexeur à quatre entrées ($e0 \rightarrow e3$) et commandé par deux bits de sélection ($I1$, $I0$).

A\B	0	1
0	e_0	e_1
1	e_2	e_3

Master M1 MEEF ; Préparation au CAPES Maths option Informatique
Durée :3 heures
Documents non autorisés



Partie III : Circuits séquentiels

Exercice 1 :

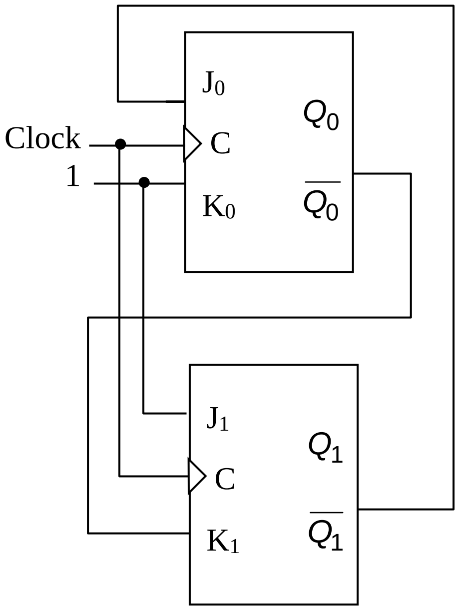
Rappel ci-contre : table de vérité d'une bascule JK

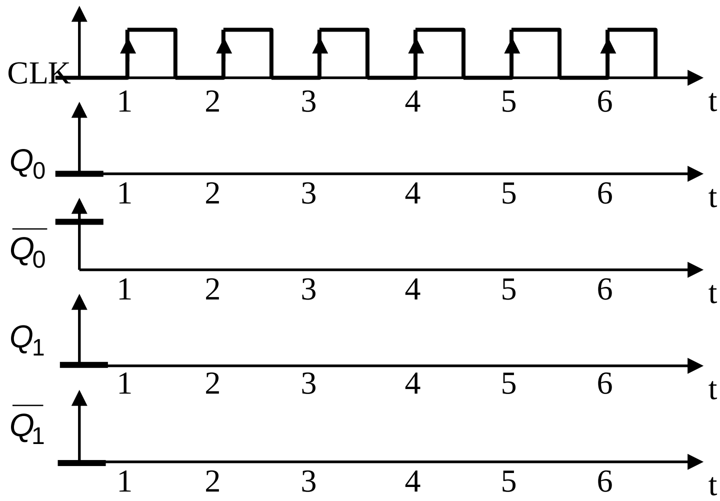
J	K	Q_{t+1}
0	0	Q_t
0	1	0
1	0	1
1	1	$\overline{Q_t}$

1. Complétez les chronogrammes correspondant au montage ci-dessous (les valeurs initiales sont données en gras). Pour cela, vous remplirez le tableau ci-dessous avec les valeurs des entrées et sorties en fonction du temps.

Temps	Valeur initiale	1	2	3	4	5	6
J_0							
K_0							
J_1							
K_1							
Q_0	**0**						
Q_1	**0**						

Master M1 MEEF ; Préparation au CAPES Maths option Informatique
Durée :3 heures
Documents non autorisés





2. Réaliser un compteur synchrone modulo 4 à l'aide de bascules D avec le codage de Gray (000, 001, 011, 010).
3. On demande l'expression simplifiée des entrées des bascules utilisées en fonction des sorties des bascules

Réponses :

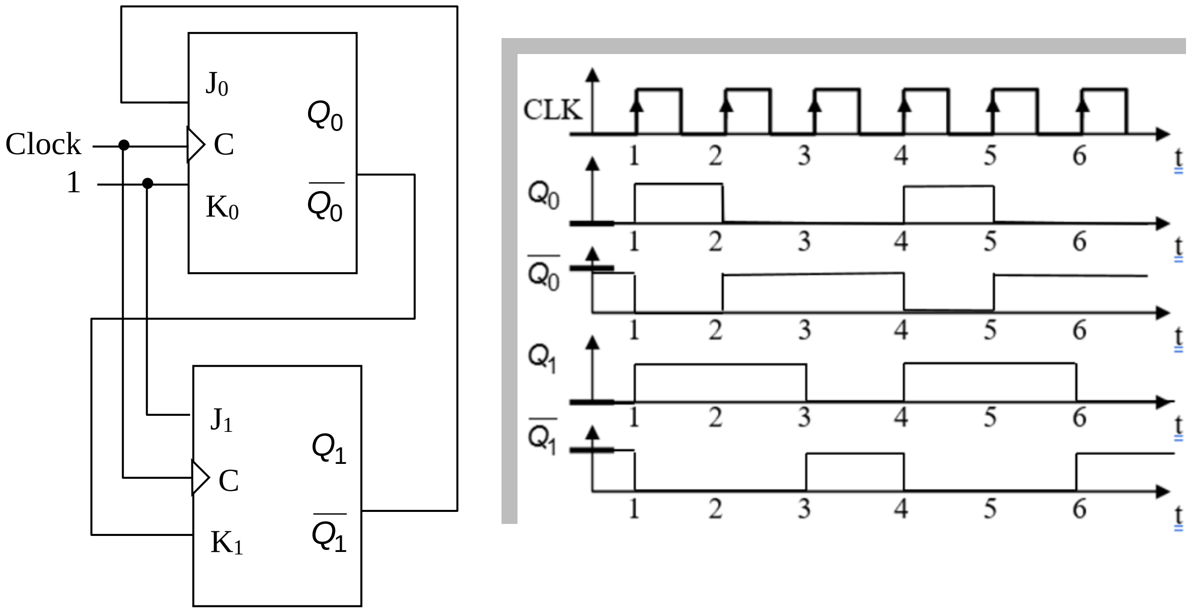
Rappel ci-contre : table de vérité d'une bascule JK

J	K	Q_{t+1}
0	0	Q_t
0	1	0
1	0	1
1	1	$\overline{Q_t}$

1. Complétez les chronogrammes correspondant au montage ci-dessous (les valeurs initiales sont données en gras). Pour cela, vous remplirez le tableau ci-dessous avec les valeurs des entrées et sorties en fonction du temps.

Temps	Valeur initiale	1	2	3	4	5	6
J_0	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**
K_0	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
J_1	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
K_1	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**
Q_0	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**
Q_1	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**

Master M1 MEEF ; Préparation au CAPES Maths option Informatique
Durée :3 heures
Documents non autorisés



$J_0 = /Q_1$ $K_0 = 1$
$J_1 = 1$ $K_1 = /Q_0$

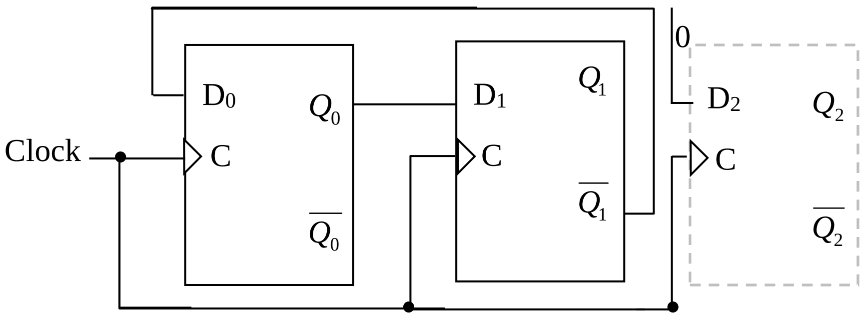
2. Un compteur synchrone modulo 4 à l'aide de bascules D avec le codage de Gray (000, 001, 011, 010).

t				t+1				Entrées		
n	**Q_2**	**Q_1**	**Q_0**	**n**	**Q_2**	**Q_1**	**Q_0**	**D_2**	**D_1**	**D_0**
0	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**
1	**0**	**0**	**1**	**3**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**
3	**0**	**1**	**1**	**2**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**
2	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**

3.
- On remarque que deux bascules sont suffisantes pour réaliser ce type de compteur (la bascule 3 est inutile, on peut l'enlever).
- On peut facilement trouver les expressions des entrées sans les tableaux de Karnaugh

$D_0 = \overline{Q_1}$ $D_1 = Q_0$ $D_2 = Q_2 = 0$

Master M1 MEEF ; Préparation au CAPES Maths option Informatique
Durée :3 heures
Documents non autorisés



On peut supprimer la bascule N° :3