



# Sélection d'exercices de graphes

Préparation au CAPES de Mathématiques, option Informatique

Nov. 2016

## Sources

- <https://www.irif.fr/~francoisl/DIVERS/l3algo1617-TD2.pdf>
- <https://www.irif.fr/~francoisl/DIVERS/l3algo-td5-1011.pdf>
- [http://www.gymomath.ch/javmath/polycopie/th\\_graphe4.pdf](http://www.gymomath.ch/javmath/polycopie/th_graphe4.pdf)

## 1 Graphes non orientés

### 1.1 Degré, connexité

#### EXERCICE 1 ► Une preuve par construction

Un graphe est dit  $k$ -régulier si tous ses sommets sont de degré  $k$ . Prouver la propriété suivante :

**Proposition 1.** *Pour tout entier  $n$  pair,  $n > 2$ , il existe un graphe 3-régulier composé de  $n$  sommets.*

#### EXERCICE 2 ► Degré

Si  $m$  est le nombre d'arêtes d'un graphe  $G$ , montrer que

$$\sum_{u \in V(G)} d_G(u) = 2m.$$

#### EXERCICE 3 ► Connexité

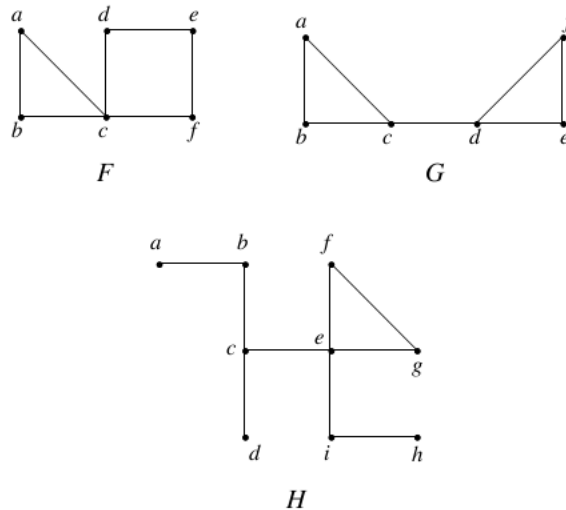
Montrez que tout graphe connexe à  $n$  sommets a au moins  $n-1$  arêtes.

#### EXERCICE 4 ► Application : fiabilité des réseaux - notion de coupure

Si on considère un réseau informatique où tout le monde doit communiquer avec tout le monde, il est important que le graphe associé soit connexe. Maintenant, il faut aussi que le retrait d'une machine (ou d'un lien) soit sans douleur, d'où les définitions suivantes :

Le retrait d'un sommet et de toutes les arêtes incidentes à ce sommet conduit à former un sous-graphe avec plus de composantes connexes que dans le graphe initial. Ces sommets sont appelés **points de coupure**. Le retrait d'un point coupure à partir d'un graphe connexe produit un sous-graphe qui n'est pas connexe. De façon similaire, une arête dont le retrait produit un graphe avec plus de composantes connexes que dans le graphe initial est appelée un **séparateur**.

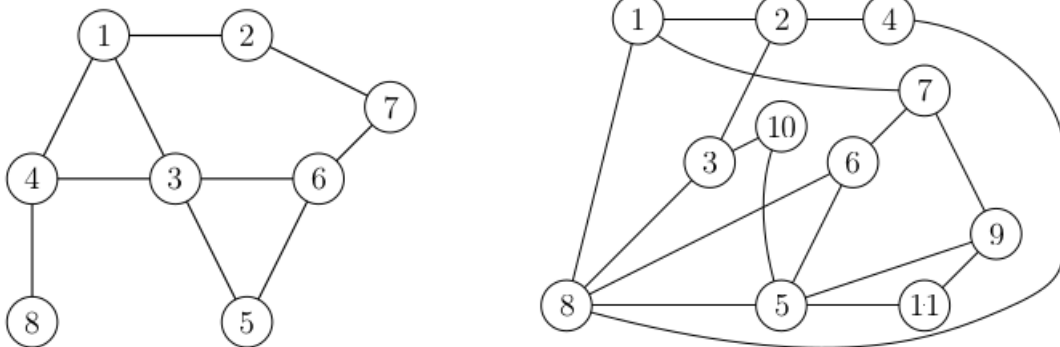
Dans les graphes suivants trouver les points de coupure et les séparateurs :



## 1.2 Parcours

### EXERCICE 5 ► Parcours en largeur

Pour chacun des graphes suivants, donner l'ordre des noeuds rencontrés lors d'un parcours en largeur, en partant du sommet 1. Donner l'arbre résultant de ce parcours.



Quelle est la complexité du parcours en largeur avec les listes d'adjacence ?

### EXERCICE 6 ► Profondeur

Donner l'ordre des noeuds visités dans le parcours en profondeur des deux graphes précédents à partir du noeud 1.

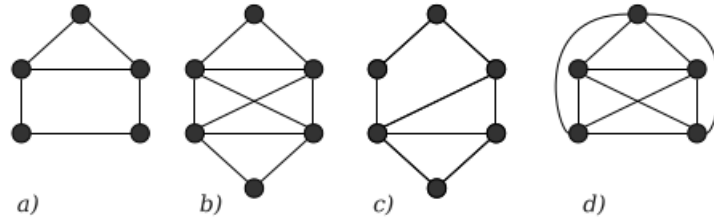
### EXERCICE 7 ► Applications des parcours

Proposer un algorithme qui permet de déterminer si un graphe contient un cycle.

## 1.3 Graphes eulériens/hamiltoniens

### EXERCICE 8 ► Cycles Eulériens

Un chemin est dit eulérien si il passe une et une seule fois par chacune des *arêtes* du graphe. Les graphes suivants possèdent-ils un cycle eulérien ?



### EXERCICE 9 ► CNS Chemin Eulérien

Montrer qu'un graphe admet un chemin eulérien ssi il est connexe et au plus 2 de ses sommets sont de degré impair.

### EXERCICE 10 ► Implem !

Doc : [https://fr.wikipedia.org/wiki/Graphe\\_eul%C3%A9rien](https://fr.wikipedia.org/wiki/Graphe_eul%C3%A9rien)

Implémenter le problème de recherche de séquence minimale pour ouvrir un digicode à 4 chiffres :

- Montrer que le problème se ramène à un problème de recherche de circuit eulérien.
- Dans la classe Graphe fournie implémenter les fonctions suivantes :
  1. `condEuler(self)` qui teste les conditions d'Euler.
  2. `findEulerianCircuit()` qui retourne (si il existe) un circuit eulérien.
- Répondre à la question. On écrira aussi une fonction qui teste qu'une séquence de chiffres donnée contient bien tous les codes.

### EXERCICE 11 ► Graphes Hamiltoniens

Un cycle est dit Hamiltonien ssi il passe une et une seule fois par chaque sommet du graphe.

Les graphes suivants possèdent-ils un cycle hamiltonien ?

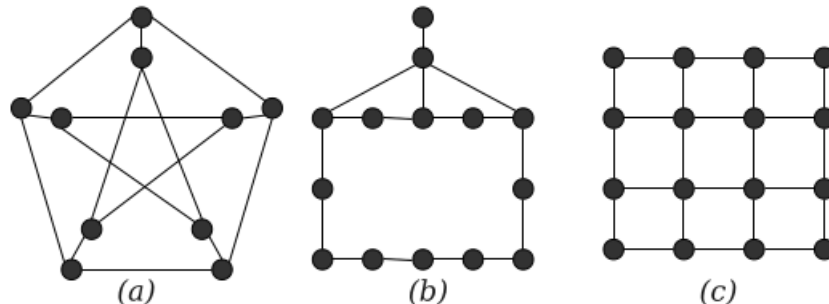


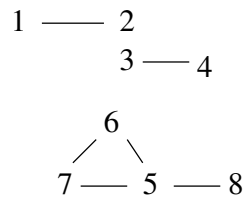
FIGURE 3 – (a) Graphe de Petersen 3-régulier, (b) maison agrandie, (c) grille

Donner un algorithme pour déterminer si un tel cycle existe.

## 1.4 Coloriages

### EXERCICE 12 ► Un exemple simple

Avec l'algorithme polynomial vu en cours (simplification de Kempe), colorier le graphe suivant :



### EXERCICE 13 ► **Coloriage et Bipartisme**

On dit qu'un graphe est biparti si on peut partitionner ses sommets en deux ensembles  $V_1$  et  $V_2$  de sorte qu'il n'y ait aucune arête entre deux sommets de  $V_1$  (resp. de  $V_2$ ). Les seules arêtes joignent donc un sommet de  $V_1$  à un sommet de  $V_2$ .

1. Montrer qu'un graphe à  $n$  sommets est  $n$ -coloriable. Donner un graphe à 5 sommets qui n'est pas 4 coloriable.
2. Montrer qu'un graphe est deux coloriable ssi il est biparti.