

Programme de l'option mathématiques de la première épreuve d'admissibilité

Raisonnement et vocabulaire ensembliste.

Opérateurs logiques et quantificateurs. Vocabulaire de la théorie des ensembles. Applications, relations d'ordre et relations d'équivalence.

Nombres complexes.

Module et argument. Racines n^{mes} de l'unité. Exponentielle complexe, trigonométrie. Application à la géométrie plane. Équation du second degré.

Fonctions de variable réelle.

Continuité, théorème des valeurs intermédiaires. Dérivabilité, théorème de Rolle, inégalité des accroissements finis. Extension aux fonctions à valeurs complexes.

Calcul intégral et Équations différentielles.

Intégrale d'une fonction continue sur un segment, sommes de Riemann. Calculs de primitive. Intégration par parties, changement de variable. Formule de Taylor avec reste intégral. Intégrales généralisées. Équations différentielles linéaires du premier ordre, du premier ordre à variables séparables, linéaires du second ordre à coefficients constants.

Nombres réels et suites réelles.

Construction de \mathbf{N} , \mathbf{Z} et \mathbf{Q} . Présentation axiomatique de \mathbf{R} , bornes supérieure et inférieure. Valeurs approchées, nombres décimaux. Limite d'une suite réelle, théorèmes d'existence. Suites extraites. Extension aux suites à valeurs complexes. Séries numériques, séries à termes positifs, séries absolument convergentes, séries de références (séries géométriques, séries de Riemann).

Suites et séries de fonctions.

Convergence simple, convergence uniforme. Théorèmes de régularité. Convergence normale des séries de fonctions. Rayon de convergence. Les théorèmes de régularité de la somme sont admis. Développement en séries entières des fonctions usuelles.

Analyse asymptotique.

Relations de comparaisons des suites et des fonctions. Développements limités.

Algèbre linéaire.

Systèmes linéaires, algorithme du pivot de Gauss-Jordan. Espaces vectoriels de dimension finie, familles libres, familles génératrices, bases. Applications linéaires. Homothéties, projections et symétries. Rang d'une application linéaire. Représentations matricielles d'un endomorphisme. Réduction des endomorphismes et des matrices carrées : éléments propres, diagonalisation, trigonalisation. Polynômes d'endomorphismes, polynôme minimal. Le théorème de Cayley-Hamilton est admis.

Matrices et déterminants.

Calcul matriciel, matrices inversibles, transposition. Matrices et applications linéaires, changements de base. Équivalence, similitude. Déterminant d'une matrice carrée, d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.

Dénombrement.

Cardinal d'un ensemble fini, listes, combinaisons, factorielles, formule du binôme.

Arithmétique des entiers.

Arithmétique des entiers : nombres premiers, PGCD, PPCM, algorithme d'Euclide. Sous-groupes de \mathbf{Z} Congruences. Anneaux $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$: théorème des restes chinois, unités, petit théorème de Fermat.

Polynômes.

Arithmétique des polynômes à coefficients réels ou complexes. Racines. Décomposition dans $\mathbf{R}[X]$ et $\mathbf{C}[X]$. Somme et produit des racines d'un polynôme.

Groupes.

Sous-groupes, morphismes de groupes. Groupes monogènes et groupes cycliques : groupes $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, groupe des racines n^{mes} de l'unité; générateurs, indicatrice d'Euler. Théorème de structure des groupes monogènes et cycliques. Ordre d'un élément. Groupes symétriques. Exemples de groupes agissant sur un ensemble, exemples de groupes laissant invariante une partie du plan ou de l'espace.

Produit scalaire et espaces euclidiens. Produit scalaire sur un espace de dimension finie, norme associée, orthogonalité. Bases orthonormées. Projections orthogonales. Orientation. Groupes des isométries vectorielles d'un espace euclidien, des isométries affines d'un espace euclidien, des similitudes d'un espace euclidien. Isométries vectorielles d'un espace euclidien de dimension 2 ou 3. Isométries affines du plan euclidien.

Probabilités. Espaces probabilisés finis. Probabilités conditionnelles, conditionnement et indépendance. Variable aléatoires sur un univers fini : lois usuelles (lois uniformes, lois binomiales), variables aléatoires indépendantes, espérance, variance et écart-type. Variables aléatoires discrètes : espérance et variance, lois de Poisson, lois géométriques. Lois exponentielles, loi faible des grands nombres.

Calcul différentiel.

Fonctions de 2 ou 3 variables réelles. Dérivées partielles d'ordre 1. Fonctions de classe C^1 .

Points critiques d'une fonction de \mathbf{R}^p dans \mathbf{R} . Dérivées partielles d'ordre supérieur. Le théorème de Schwarz est admis. Extrema d'une fonction de \mathbf{R}^p dans \mathbf{R} .

Topologie d'un espace vectoriel normé de dimension finie. Parties ouvertes, parties fermées.

Adhérence, intérieur. Parties denses. Parties compactes, théorème de Bolzano-Weierstrass, théorème de Heine.

Programme de l'option informatique de la première épreuve d'admissibilité

Pour l'épreuve écrite, les algorithmes traduits dans un langage de programmation seront écrits en langage Python.

Codage de l'information

Notion de bit et d'octet. Codage en base 2 des entiers positifs. Codage des caractères (ASCII), des images bitmap.

Logique propositionnelle

Opérations booléennes.

Algorithmique

Structures de données élémentaires (piles, files, arbres binaires).

Algorithmique des graphes

Parcours de graphes en largeur et en profondeur. Structures de données pouvant représenter un graphe. Composantes connexes. Plus courts chemins.

Algorithmes classiques

Tris (tri sélection, tri fusion, tri rapide). Recherche naïve d'un mot dans un texte. Arbres de recherche. Exemples d'algorithmes de compression, d'algorithmes de chiffrement.

Notion de complexité

Coût dans le pire des cas. Coût en temps et coût en espace.

Problèmes difficiles

Définition des classes de problèmes P, NP. Exemples de problèmes difficiles, exemples d'heuristiques.

Langages de programmation

Variations et types de données (booléens, entiers, flottants, caractères, chaînes, tableaux). Conditionnelles, boucles. Notion de fonction (passage de paramètres, valeur retournée).

Méthodes de programmation

Méthode itérative, récursivité.

Formalisme objet

Notion d'objet, de classe, méthode, sous-classe, héritage.

Bases de données

Organisation d'une base de données, modèle relationnel, formes normales. Opérateurs SQL simples. Utilisation des bases de données dans les systèmes d'information.