TD5 : Algorithme, invariant de boucle et complexité (1/2)

Exercice 1 : Analyse de la complexité d'un algorithme

On considère le pseudo-code suivant, comportant deux « tant que » imbriqués. On cherche à mesurer la complexité de cette imbrication en fonction de n. Pour cela, on utilise la variable « compteur », qui est incrémentée à chaque passage dans le « tant que » interne.

```
Variables :
  n : entier
  compteur : entier
  i, j : entiers
Début
  Afficher(« Quelle est la valeur de n ? »)
  Saisir(n)
  compteur ← 0
  i ← 1
  Tant que (i < n) Faire
      j ← i + 1
      Tant que (j ≤ n) Faire
          compteur ← compteur + 1
          j ← j + 1
      Fin tantque
      i ← i * 2
  Fin tantque
  Afficher(compteur)
Fin
```

a. Quelle est la valeur finale du compteur dans le cas où n = 16 ?

b. Considérons le cas particulier où n est une puissance de 2 : on suppose que $n = 2^p$ avec p connu. Quelle est la valeur finale du compteur en fonction de p ? Justifiez votre réponse.

c. Réexprimez le résultat précédent en fonction de n.

Exercice 2 : Tri par insertion

Le tri par insertion est l'algorithme utilisé par la plupart des joueurs lorsqu'ils trient leur « main » de cartes à jouer. Le principe consiste à prendre le premier élément du sous-tableau non trié et à l'insérer à sa place dans la partie triée du tableau.

a. Dérouler le tri par insertion du tableau {5.1, 2.4, 4.9, 6.8, 1.1, 3.0}.

b. Ecrire en langage algorithmique le corps de la procédure de tri par insertion, par ordre croissant, d'un tableau de réels :

```
Procédure tri_par_insertion (tab : tableau [1..n] de réels)
Précondition : tab[1], tab[2], … tab[n] initialisés
Postcondition : tab[1] ≤ tab[2] ≤ … ≤ tab[n]
Paramètres en mode donnée : aucun
```

Paramètre en mode donnée-résultat : tab

c. Donner l'invariant de boucle correspondant à cet algorithme, en démontrant qu'il vérifie bien les 3 propriétés d'un invariant de boucle : initialisation, conservation, terminaison.

d. Evaluer le nombre de comparaisons de réels et le nombre d'affectations de réels pour un tableau de taille *n*, dans le cas le plus défavorable (tableau trié dans l'ordre décroissant). Cet algorithme est-il meilleur que le tri par sélection (tri du minimum) vu en cours ?