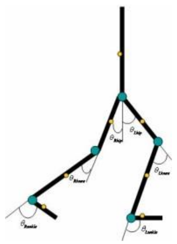
M1IF37 - Animation en synthèse d’image

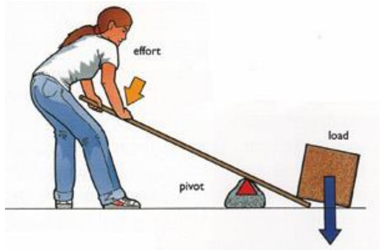
INTRODUCTION À L’ANIMATION PHYSIQUE

Les problématiques principales

- On va déplacer des objets dans un environnement virtuel



  - De manière cinématique : description du mouvement
    - Nécessite les positions, les vitesses et les accélérations

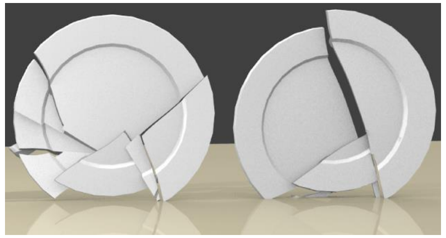


  - De manière physique : mouvement en tant que résultat de l’effet de forces
    - Nécessite en plus les masses, les inerties, les primitives de collision etc.

- Avec la physique, les objets peuvent interagir à travers des forces
  - Pas besoin de précalculer ou de scripter les mouvements et les interactions
  - Réagit nativement en respectant les lois de la physique (intégrées)
  - Bien pour certaines problématiques dans les jeux (applications interactives temps-réel) : génération rapide et automatique de mouvement à partir d’évènements imprédictibles

Applications

- On peut utiliser la physique pour simuler :
  - Des corps rigides
    - Mécaniquement considérés comme des points
    - Possiblement connectés avec d’autres corps rigides
  - Des corps déformables
    - Peuvent se déformer dans un continuum
    - Possiblement en interaction avec d’autres corps
  - Des corps cassables
    - Agissent comme des corps rigides jusqu’à ce qu’un évènement mène à les casser en plusieurs corps rigides



Prérequis

- On a besoin de quelques bases de maths
  - Le point (2D ou 3D)
  - Le vecteur
    - Magnitude/longueur, normalisation, addition, soustraction, multiplication scalaire, transposé, produit vectoriel, produit scalaire, …
  - La matrice
    - Addition, soustraction, multiplication, transposé, produit scalaire, inverse, rang, déterminant, …
  - Les fonctions, les dérivées et les intégrales
- Et de physique
  - Position, vitesse et accélération
  - Les unités standard de mesure

LA CINÉMATIQUE

La cinématique

- Détermine la position $p(t)$ d'un objet à chaque instant t de la simulation
- Supposons que vous avons une vitesse constante v de cet objet
  - Alors $p(t + \Delta t) = p(t) + v \times \Delta t$, nous donne la position de l'objet après un temps Δt
  - Ou bien alternativement $\Delta p = p(t + \Delta t) - p(t) = v \times \Delta t$, nous donne le déplacement de l'objet
  - Si on défini $p(O) = P$ la position initiale de l'objet, alors $p(t) = P + v \times t$
  - Et on peut calculer la position de l'objet à n'importe quel instant
- Mais la vitesse v n'est probablement pas constante dans le temps
  - La vitesse est une fonction du temps $v(t)$
  - Donc nous avons plutôt $p(T) = P + \int_0^T v(t)\, dt$
  - La position doit être calculée en fonction de la vitesse (de son changement)

La cinématique

- Des propriétés similaires s'appliquent à l'accélération a
  - Si l'accélération est constante alors le changement de vitesse est $\Delta v = a \times \Delta t$
  - Si non (probablement le cas), alors $v(T) = V + \int_0^T a(t)\, dt$
- A-t-on vraiment besoin de faire ces deux intégrations ?
  - Si on recalcule la position à chaque pas de temps (ex. itération de la boucle principale d'un jeu) après un temps Δt
  - Et si on suppose que la vitesse et l'accélération ont été constantes pendant ce petit laps de temps
  - Alors on peut utiliser les formules $p(t + \Delta t) = p(t) + v(t) \times \Delta t$ et $v(t + \Delta t) = v(t) + a(t) \times \Delta t$
- Pour rappel, un jeu qui tourne à 100 FPS, c'est-à-dire 100 Hz, a un $\Delta t = \frac{1}{100} = 0{,}01s = 10\ ms$

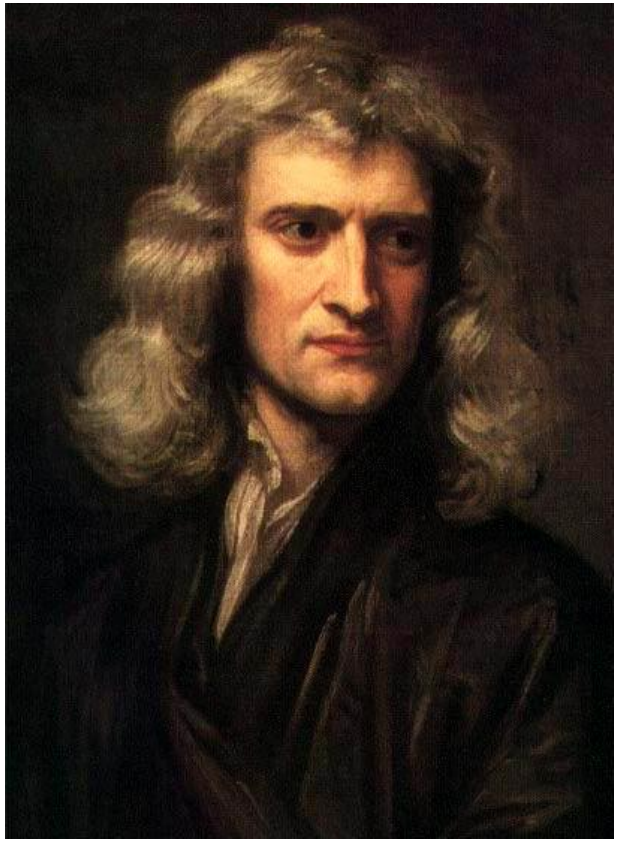
SYSTÈME BASÉ PHYSIQUE

Les forces

- Dans une simulation physique, ce qui cause le mouvement n’est pas le changement de vitesse ou d’accélération mais des forces qui s’appliquent sur les objets
- La somme des forces agissant sur un objet détermine son mouvement
- La notation F sera utilisée dans la suite pour $\vec{F}$, mais le contexte indiquera si c’est un scalaire ou un vecteur

Les lois de Newton

- A la fin du $17^{ème}$ siècle, Sir Isaac Newton a décrit trois lois qui gouvernent tout mouvement sur Terre



Première loi du mouvement

- La première loi du mouvement de Newton décrit ce qu'il se passe quand la force nette sur un objet est nulle : toutes les forces individuelles s'annulent et il n'y a pas de changement dans le mouvement

Si $\boldsymbol{F_{nette} = 0}$ alors pas de changement dans le mouvement

- Cela veut dire que, tant qu'une force nette nulle est appliquée
  - un objet au repos reste au repos
  - un objet qui se déplace continue de se déplacer à la même vitesse et dans la même direction

Seconde loi du mouvement

- La seconde loi du mouvement de Newton décrit comment un objet se déplace lorsqu'une force nette est non nulle

$$\boldsymbol{F_{nette} = m \times a}$$ **où $\boldsymbol{m}$ est la masse de l'objet et $\boldsymbol{a}$ son accélération**

- Cela montre aussi que
  - Plus la force appliquée est grande, plus l'objet accélère
  - Pour une quantité identique de force, les objets légers accélèrent plus que les objets lourds

- On fait aussi référence à cette loi comme le principe fondamental de la dynamique

Troisième loi du mouvement

- La troisième loi du mouvement de Newton décrit la relation entre les forces

Pour toute force, il existe une force égale et opposée, ou bien, lorsque deux objets entrent en contact ils exercent entre eux des forces égales et opposées

- On appelle aussi communément cela le principe d’action-réaction

EXEMPLES DE FORCES

La force gravitationnelle

- La loi de la gravitation de Newton indiques que la force gravitationnelle entre deux objets A et B
  - est proportionnelle au produit de leurs masses m_A et m_B
  - est inversement proportionnelle au carré de la distance entre les objets
  - agit le long d'une ligne connectant les deux objets

$$\boldsymbol{F_g = F_{A\to B} = -F_{B\to A} = G\frac{m_A \times m_B}{r^2}u_{AB}}$$

où G est la constante de gravitation $6.673 \times 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$, r est la distance entre les deux objets et u_{AB} est le vecteur unitaire de distance

La force gravitationnelle sur Terre

- En appliquant la loi de la gravitation sur un objet de masse m à la surface de la Terre on obtient

$$\boldsymbol{F_{nette} = F_g = m \times a}$$

$$\boldsymbol{G\frac{m \times m_{Terre}}{{r_{Terre}}^2} = m \times a}$$

$$\boldsymbol{G\frac{m_{Terre}}{{r_{Terre}}^2} = a}$$

$$\boldsymbol{a = 6.673 \times 10^{-11} \times \frac{5.98 \times 10^{24}}{(6.377 \times 10^6)^2} = g = 9.81\ m/s^2}$$

Le poids

- C'est l'autre nom pour la force gravitationnelle sur Terre

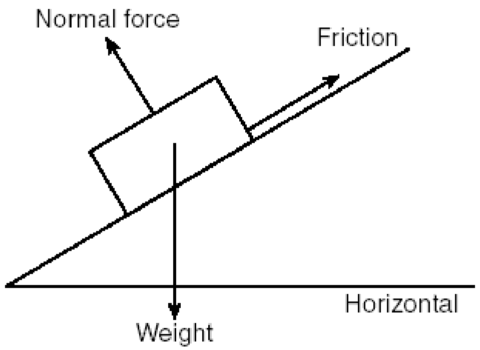
$$\boldsymbol{W = m \times g}$$

où m est la masse de l'objet et g est l'accélération due à la gravité terrestre, aussi appelée constante de gravitation (cf. transparent précédent)

- On peut noter que l'unité standard d'une force est donc $kg \times m/s^2$, et notée N pour Newtons

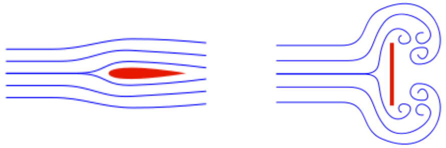
Autres forces

- La force normale F_N
  - Force agissant en réaction à un contact
  - De magnitude égale à la force de contact projetée sur la direction normale au contact

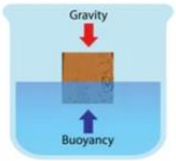


- La force de friction
  - C'est la composante tangentielle à la réaction due au contact
  - La friction statique empêche le corps de se mettre en mouvement : $F_{SF} = \mu_{SF} F_N$
  - La friction dynamique ralenti l'objet en contact : $F_{DF} = \mu_{DF} F_N$

- La force de résistance dans un fluide F_D (l'air est un fluide)
  - Un objet est ralenti par le « contact » avec le fluide
  - Dépend de la vitesse relative entre l'objet et le fluide, la densité du fluide, la forme de l'objet et l'aire d'exposition de l'objet



- La poussée d'Archimède F_B
  - Force apparaissant lorsqu'un objet est immergé dans un fluide
  - Dépend de la densité du fluide, de la gravité et du volume immergé



Autres forces

- Les forces ressort F_S 
  - Connectent plusieurs objets entre eux et tendent à les maintenir à une distance au repos l_0
  - La distance relative l et la distance l_0 déterminent la force $F_S = K(l - l_0)$ avec K la raideur du ressort

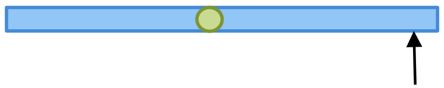
- Les forces amortisseurs F_C
  - Connectent plusieurs objets entre eux et tendent à les maintenir à une vitesse identique
  - La vitesse relative détermine la force $F_C = \nu(v_A - v_B)$ avec ν le coefficient d'amortissement
  - La force appliquée sur B est opposée
  - Similaire à la force de résistance dans un fluide à basse vitesse

LES MOMENTS

Principe

- Les objets ne font pas que se déplacer en (segments de) ligne droite

- Ils tournent également
- Pour faire tourner un objet sur lui-même on lui applique soit
  - une force tangentielle F à une distance r du centre de masse de l'objet qui produira un moment $\tau = r \times F$ (produit vectoriel)



  - un moment $\tau = I \times \alpha$ où I est l'inertie de l'objet et α son accélération angulaire
- Le moment est exprimé en $N \times m$, dans une direction perpendiculaire à F et r
- Il cause une accélération angulaire là où une force cause une accélération linéaire

INTÉGRATION NUMÉRIQUE

Mettre à jour les positions

- On sait que l'on a la relation FORCE = MASSE x ACCELERATION
  - Si on suppose que la masse est constante au cours du temps alors
$$F(p,t) = m \times a(p,t)$$
  - On sait que $v'(t) = a(t)$ et que $p'(t) = v(t)$
  - Donc on a $F(p,t) = m \times p''(t)$

- Ceci est une équation différentielle
  - Branche des mathématiques bien étudiées
  - Souvent difficile à résoudre dans des applications temps-réel

Série de Taylor

- Le développement en série de Taylor d'une fonction peut être appliqué sur p au temps $t + \Delta t$

$$p(t + \Delta t) = p(t) + \Delta t \times p'(t) + \frac{\Delta t^2}{2} p''(t) + \cdots + \frac{\Delta t^n}{n!} p^n(t)$$

- Mais nous n'avons pas les valeurs pour l'infinité de termes du développement
- Typiquement nous avons $p(t)$ et les deux premières dérivées (vitesse et accélération)

Approximation du premier ordre

- Heureusement on sait que si Δt est suffisamment petit alors on peut utiliser une approximation

$$p(t + \Delta t) \approx p(t) + \Delta t \times p'(t)$$

- En appliquant cette approximation pour les positions et les vitesses, on obtient

$$v(t + \Delta t) = v(t) + \Delta t \times a(t) = v(t) + \Delta t \times \frac{F(t)}{m}$$

et

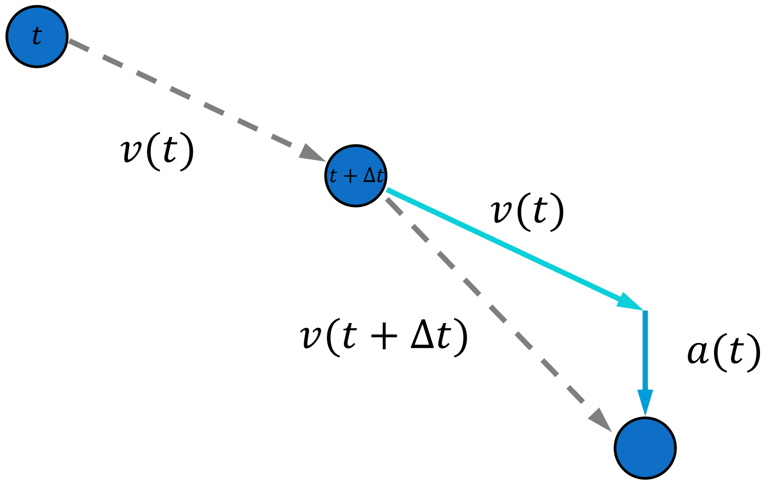
$$p(t + \Delta t) = p(t) + \Delta t \times v(t)$$

Méthode d'Euler

- Cette manière de mettre à jour les positions et les vitesses est connue sous le nom de méthode d'Euler

$$v(t + \Delta t) = v(t) + \Delta t \times a(t)$$

$$p(t + \Delta t) = p(t) + \Delta t \times v(t)$$



Algorithme pour la méthode d’Euler

- En supposant que la vitesse est constante durant la durée Δt entre deux itérations
  - On calcule l’accélération de l’objet à partir de la force nette appliquée dessus

$$a(t) = \frac{F(t)}{m}$$

  - On calcule la vitesse à partir de l’accélération obtenue et de la vitesse à l’itération précédente

$$v(t + \Delta t) = v(t) + \Delta t \times a(t)$$

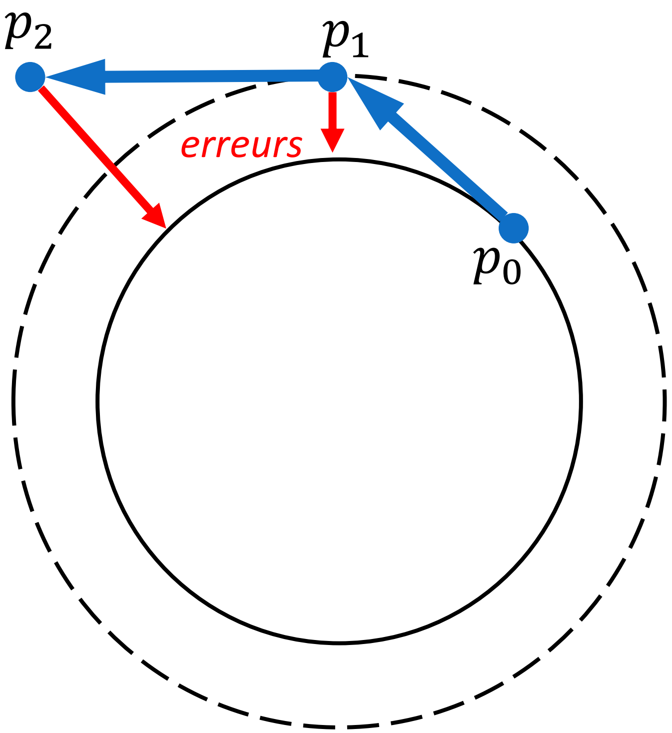
  - On calcule la position à partir de la vitesse à l’itération précédente et la position précédente

$$p(t + \Delta t) = p(t) + \Delta t \times v(t)$$

Pas de temps et itérations

- Plus Δt est petit plus l'approximation du premier ordre se rapproche de l'objectif parfait $p(T) = \int_0^T v(t)\, dt$
- Donc une solution classique consiste à réduire Δt le plus possible
  - En pratique, la vitesse d'exécution de la boucle de simulation (rendu compris) peut être suffisante
  - Mais parfois on a besoin de faire d'avantage d'étapes (surtout si les fps chutent), on peut alors faire plus d'un pas d'intégration numérique par pas de simulation
- On a supposé que la dérivée à un instant donne une bonne estimation de la dérivée sur l'entièreté de l'intervalle de temps Δt
- Si ça n'est pas le cas, l'approximation peut dévier et faire diverger le système

Exemple d’accumulation d’erreurs



Autres schémas d’intégration numérique

- D’autres schémas existent afin de réduire ce type d’accumulation d’erreurs
- La méthode du point médian calcule la dérivée au milieu de l’intervalle de temps ($\frac{\Delta t}{2}$)
  - Mieux que Euler lorsque $\Delta t < 1$, fait une approximation de la fonction en parabole au lieu d’une ligne
- La méthode d’Euler améliorée prend la moyenne de l’estimation de la vitesse à t et à $t + \Delta t$
- La méthode Runge-Kutta est une combinaison des deux précédentes mais d’ordre 4
  - On calcule les dérivées en 4 points et on en fait une moyenne pondérée
- La méthode d’intégration de Verlet
  - On utilise le développement de Taylor à un ordre supérieur (2), n’a pas besoin d’estimer les vitesses

Schémas implicites

- Les schémas précédents utilisaient toujours la position et vitesse précédentes pour calculer les suivantes
- C’est ce que l’on appelle des schémas explicites
- Dans les schémas implicites on utilise les quantités au pas de temps calculé
$$p(t + \Delta t) = p(t) + \Delta t \times v(t + \Delta t)$$
  - Ce schéma en particulier est appelé Euler inversé
  - Le but est de trouver la position $p(t + \Delta t)$ pour laquelle on arrive sur la position p en exécutant la simulation à l’envers
- Ces schémas ne garantissent pas une meilleure précision que les méthodes explicites
- Mais ils garantissent qu’il n’y a pas d’énergie ajoutée au système à cause d’approximations numériques
- Etant donné que l’on veut dans tous les cas avoir un certain amortissement de tous les mouvements (friction de l’air etc.), ces schémas sont plus appropriés

Algorithme de la méthode semi-implicite

- La méthode semi-implicite fournie la simplicité de la méthode Euler explicite et la stabilité de la méthode Euler implicite
  - On exécute un pas d'intégration en Euler explicite pour les vitesses

$$v(t + \Delta t) = v(t) + \Delta t \times a(t) = v(t) + \Delta t \times \frac{F(t)}{m}$$

  - On exécute un pas d'intégration en Euler implicite pour les positions

$$p(t + \Delta t) \cancel{= p(t) + \Delta t \times v(t)} = p(t) + \Delta t \times v(t + \Delta t)$$

  - C'est le $v(t + \Delta t)$ calculé à l'étape juste au dessus (même itération)