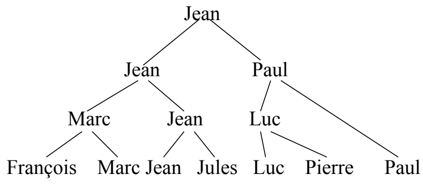
2016-2017, semestre automne
L3, Licence Sciences et Technologies

LIFAP6: Algorithmique, Programmation et Complexité

Chaine Raphaëlle (responsable semestre automne)
E-mail : raphaelle.chaine@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/membres?idn=rchaine

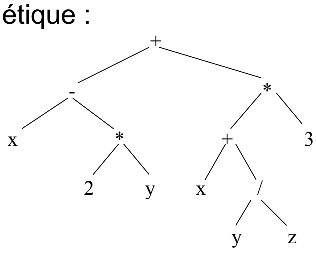
Structures arborescentes

- **Modélise une relation « père de »**
- **Arbres binaires :**
  – au plus 2 fils



216

- Arbre binaire d'une expression arithmétique :



(x-(2*y))+((x+(y/z))*3)

217

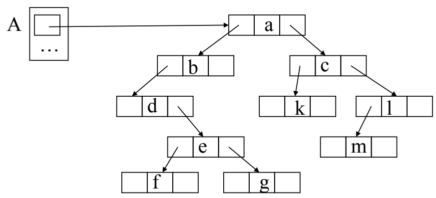
- **Définitions (rappels)**
  – Un **arbre binaire** est soit vide, soit de la forme $B = < o, B_1, B_2 >$ où B1 et B2 sont des arbres binaires disjoints et o un élément stocké dans un nœud **racine** (équivalent de la notion d'«emplacement » ou de « cellule » des listes)
- **module** ArbreBin
  – **importer**
    Module Element
  – **Exporter**
    Type **AB, Noeud**
    procédure **initialisation**(Résultat a : AB)
    {Préc°: a- non initialisé , Postc°: a+ AB vide}
    procédure **initialisation**(Résultat a : AB, Donnée b : AB)
    {Préc°: a- non initialisé , Postc°: a+ **COPIE** de b}
    procédure **initialisation**(Résultat a : AB, Donnée e : Element, g,d : AB)
    {Préc°: a- non initialisé ,
    Postc°: a+ a pour elt racine e et comme sous-arbre gauche (resp droit) une **COPIE** de g (resp. de d)}
    procédure **initialisation**(Résultat a : AB, Donnée b : AB, p : Nœud *)
    {Préc°: a- non initialisé ,
    Postc°: a+ **COPIE** du ss.arbre de b enraciné en p}

218

Nœud * fonction **noeudRacine**(a : AB)
{Préc°: a initialisé non vide,
Res : adresse du nœud racine de a}
Nœud * fonction **gauche**(a : AB, p : Nœud *)
{Préc°: p adresse d'un ss. arbre de a ,
Res : adresse du nœud racine
du ss arbre gauche de p}
Nœud * fonction **droite**(a : AB, p : Nœud *)
{Préc°: p adresse d'un ss. arbre de a,
Res : adresse du nœud racine
du ss arbre droit de p}
booléen fonction **testVide**(a : AB, p : Nœud *)
{Préc°: p adresse d'un ss. arbre de a,
Res : vrai si ss.arbre vide, faux sinon}
Element fonction **contenu**(n : Nœud)
{Préc°: n initialisé, Res : elt contenu dans n}
procédure **testament**(Donnée-Résultat a : AB)
{Préc°: a- initialisé , Postc°: a+ prêt à disparaitre}
FinModule

219

- **Représentation des arbres binaires**
  – *par utilisation de pointeurs* :
    - A chaque nœud, on associe 2 pointeurs, l'un vers le sous-arbre gauche, l'autre vers le sous-arbre droit.
    - L'arbre est déterminé par l'adresse de sa racine (et éventuellement d'autres infos)



220

2.2 Par utilisation de tableaux

	sommet	g	d
1			
2	d	-1	10
3	a	5	6
4	g	-1	-1
5	b	2	-1
6	c	13	11
7			
8	f	-1	-1
9	m	-1	-1
10	e	8	4
11	l	9	-1
12			
13	k	-1	-1

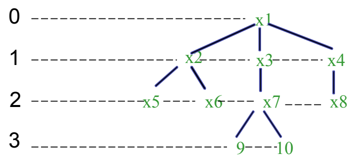
- **Nuance entre arbre et sous-arbre**
  - Dans les procédures et les fonctions, la donnée d'un couple <Arbre, pointeur sur Nœud> modélise généralement un sous-arbre
  - Un sous-arbre peut servir à initialiser un arbre par copie de ses Nœuds et de son organisation… mais un sous-arbre n'est pas un arbre (seulement une partie d'un arbre!)
  - La plupart des traitements récursifs s'effectueront sur des sous-arbres
  - Exemple :
    - L'affichage d'un arbre pourra utiliser une procédure récursive d'affichage d'un sous-arbre :
      - commence l'affichage à partir d'un Nœud dont l'adresse est fournie en paramètre.

- **Vocabulaire familial :**
  - **fils gauche** (resp. **fils droit**) d'un nœud : racine de son sous-arbre gauche (resp. droit)
  - si un nœud n_i a pour fils gauche (resp. droit) un nœud n_j, n_i est le **père** de n_j
  - deux nœuds qui ont le même père sont dits **frères**
  - le nœud n_i est un **ascendant** (ou un **ancêtre**) de n_j si et seulement si n_i est le père de n_j ou un ascendant du père de n_j
  - le nœud n_i est un **descendant** de n_j si et seulement si n_i est un fils de n_j ou un descendant d'un fils de n_j
  - un nœud est :
    - **interne** s'il a exactement 2 fils,
    - **simple** s'il a exactement un fils,
    - **feuille** s'il est sans fils

- la **taille** d'un arbre est définie par

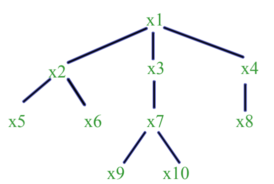
$$\text{taille}(\text{arbre}-\text{vide}) = 0$$
$$\text{taille}(< o, B_1, B_2 >) = 1 + \text{taille}(B_1) + \text{taille}(B_2)$$

- la **profondeur** d'un nœud x est définie par
  prof(x)= 0 si x est la racine de B
  prof(x)=1+prof(y) si y est père de x



- La **hauteur** d'un arbre B est
  h(B)=max{prof(x) / x nœud de B} +1
- La hauteur d'un nœud x est le nombre de nœud sur le chemin qui le mène à la plus lointaine de ses feuilles

h(x8) = 1
h(x7) = 2
h(x3) = 3
h(*A*) = h(x1) = 4



- la **longueur de cheminement** d'un arbre B est

$$LC(B) = \sum_{x \text{ noeud de } B} prof(x)$$

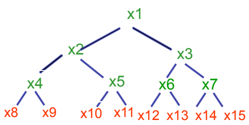
- la **longueur de cheminement externe** d'un arbre B est

$$LCE(B) = \sum_{f \text{ feuille de } B} prof(f)$$

- la **longueur de cheminement interne** d'un arbre B est

$$LCI(B) = \sum_{x \text{ noeud interne de } B} prof(x)$$

- Un arbre binaire est :
  - **dégénéré** s'il n'a que des nœuds simples ou feuilles
  - **complet** s'il contient 2^h nœuds au niveau h, $\forall h \geq 0$

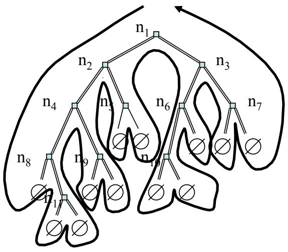


227

- **localement complet** s'il est non vide et s'il n'a pas de nœud simple
- un **peigne gauche** (resp. **droit**) s'il est localement complet et si tout fils droit (resp. gauche) est une feuille

228

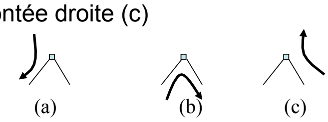
Parcours d'un arbre (binaire)



Parcours en profondeur « à main gauche »
(rappels LIF3, LIF5)

229

- Chaque nœud de l'arbre est rencontré 3 fois : à la descente (a), en montée gauche (b) et enfin en montée droite (c)




```
procédure  parcours - recursif(donnée - résultat t  : AB, p  : Noeud *)
début
    si (non testVide(t,p)) alors
        traitement1 ;
        parcours - recursif(t,p →gauche) ;
        traitement2 ;
        parcours - recursif(t,p →droit) ;
        traitement3 ;
    finsi
fin
```

On part à gauche, mais la pile des appels permettra de revenir ici quand on aura fini à gauche!

On part à droite, mais la pile des appels permettra de revenir ici quand on aura fini à droite!

230

- 3 cas particuliers classiques (rappels) :
  – ordre **préfixe** (ou **préordre**) :
    celui dans lequel traitement1 est appliqué
  – ordre **infixe** (ou **symétrique**) :
    celui dans lequel traitement2 est appliqué
  – ordre **suffixe** (ou **postfixe**) :
    celui dans lequel traitement3 est appliqué

231

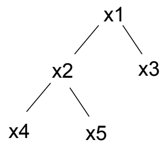
```
procédure parcours - itératif(donnée - résultat a : Arbre, p : Noeud * )
variables P : pile ; N : entier ; t : noeud *
début N ← 1; initialise(P); t ← p
  répéter
    si N = 1 alors
      tant que non testSsArbreVide(a,t) faire
        traitement1 ;empiler(P,(t,1))
        t ← gauche(a,t)
      fintant que
    finsi
    si est - vide(P) = faux alors
      (t,N) ← sommet(P); dépiler(P)
      si N = 1 alors
          traitement2; empiler(P,(t,2))
          t ← droit(a,t); N = 1
      sinon traitement3 finsi
    finsi
  jusqu'à est - vide(P) = vrai
fin
```

N vaut 1 à la descente

On utilise le pointeur de travail t pour aller à gauche toute
(sans aucun dépilement)

Dès que l'on va à droite on se prépare à aller à nouveau à gauche toute…

232



- Etats successifs marquants de la pile P (haut de la pile représenté vers le bas) :

X1 1	X1 1	X1 1	X1 1	X1 1	X1 1	X1 1	etc.
X2 1	X2 1	X2 2	X2 2	X2 2	X2 2		
X4 1	X4 2		X5 1	X5 2			

Analyseur syntaxique

- But : analyser une expression arithmétique et construire l'arbre binaire associé
- On désignera par flot, le flot de caractères correspondant à l'expression
- Une première phase d'analyse lexicale permet la décomposition du flot en lexèmes :
  - opérateurs +, -, *, / (on dispose de lit_operateur)
  - parenthèses (,) (on dispose de lit_parenthèse)
  - constantes (on dispose de lit_constante)
- L'analyse syntaxique permet de reconnaître des combinaisons de lexèmes formant des entités syntaxiques (ici des expressions arithmétiques)

- Définitions
  - Une **expression** est composée d'une suite de termes séparés par des opérateurs **+** ou **-**
    Expression : Terme, {('+';'-'), Terme}
  - Un **terme** est composé d'une suite de facteurs séparés par des opérateurs ***** ou **/**
    Terme : Facteur, {('*';'/'), Facteur}
  - Un **facteur** correspond à une constante entière ou alors à une expression entre parenthèses
    Facteur : Constante ; '(', Expression, ')'

- Fonctions **internes** utilisées :
  - Lecture d'un facteur et création de la branche correspondante
    Nœud * lit_facteur(donnée-résultat f : flot)
  - Lecture d'un terme et création de la branche correspondante
    Nœud * lit_terme(donnée-résultat f : flot)
  - Lecture d'une expression et création de la branche correspondante
    Nœud * lit_expression(donnée-résultat f : flot)

- La procédure d'initialisation d'un AB à partir d'une expression arithmétique utilise la 3ème fonction interne, qui elle-même utilise les précédentes…

procédure initialise(résultat a : AB, donnée-résultat f: flot)
début
a.racine ← lit_expression(f)
a.autresinfos ← *informations nécessaires*
fin

- Version itérative :
  - On procède pour cela à une lecture de la gauche vers la droite de l'expression

Nœud * lit_expression(donnée-résultat f : flot)
variables
b1, b2, b3 : pointeur sur Nœud op : opérateur
début
b1← lit_terme(f)
tantque f contient ensuite + ou – **faire**
op ← lit_opérateur(f)
b2 ← lit_terme(f)
b3 ← nouveau nœud
b3->info ← op, b3->gauche ← b1, b3->droite ←b2
b1 ← b3
fintantque
retourne b1
fin

```
Nœud *  lit_terme(donnée-résultat f : flot)
   variables
      b1, b2, b3 : pointeur sur Nœud
      op : opérateur
   début
      b1 ← lit_facteur(f)
      tantque f contient ensuite * ou /  faire
          op ← lit_opérateur(f)
          b2 ← lit_facteur(f)
          b3 ← nouveau nœud
          b3->info ← op, b3->gauche ← b1, b3->droite ←b2
          b1 ← b3
      fintantque
      retourne b1
   fin
```



```
Nœud *  lit_facteur(donnée-résultat f : flot)
   variables
      b : pointeur sur Noeud, c : constante
   début
      si le prochain lexème dans le flot est ( alors
         lit_parenthèse_ouvrante(f)
         b ← lit_expression(f)
         lit_parenthèse_fermante(f)
      sinon
          c ← lit_constante(f)
          b1 ← nouveau nœud
          b1->info ← c,
          b1->gauche ← NULL, b1->droite ←NULL
      finsi
      retourne b1
   fin
```


Version récursive :

A votre avis quel est le sens le plus adapté pour lire une expression avec une approche récursive?

T1-T2+T3-T4

??? T1-(T2+(T3-T4)) ???

??? ((T1-T2)+T3)-T4 ???

Version récursive :

lecture de la droite vers la gauche

(ou lecture de la gauche vers la droite avec inversion des signes après chaque – (resp. /) rencontré)

Version récursive :

```
pointeur sur Nœud  lit_expression(donnée-résultat f : flot)
variables
   b1, b2, b3 : pointeur sur Nœud
   op : opérateur
début
   b1← lit_terme(f)
   si f contient ensuite + ou –  alors
       op ← lit_opérateur(f)
       b2 ← lit_expression(f)
       b3 ← nouveau noeud
       b3->info ← op, b3->gauche ← b2, b3->droite ←b1
       b1 ← b3
   finsi
   retourne b1
fin
```


Version récursive :

```
pointeur sur Nœud  lit_terme(donnée-résultat f : flot)
variables
   b1, b2, b3 : pointeur sur Nœud
   op : opérateur
début
   b1← lit_facteur(f)
   si f contient ensuite * ou /  alors
       op ← lit_opérateur(f)
       b2 ← lit_terme(f)
       b1 ← nouveau noeud
       b3->info ← op, b3->gauche ← b2, b3->droite ←b1
       b1 ← b3
   finsi
   retourne b1
fin
```

- Comment évaluer une expression arithmétique représentée sous forme d'un Arbre Binaire ?

245

```
entier fonction eval (A : AB, n : Nœud *)
début
  si n≠NULL alors
   cas n->genre =
     cste : retourne n->val
     autre : cas n->op  =
               + : retourne eval(A,n->gauche)+eval(A,n->droite);
               - : retourne eval(A,n->gauche)-eval(A,n->droite);
               * : retourne eval(A,n->gauche)*eval(A,n->droite);
               / : retourne eval(A,n->gauche)/eval(A,n->droite);
             fin cas
   fincas
  finsi
fin
```

246

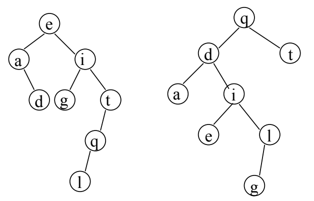
Arbre Binaire de Recherche

Rappels (LIF3, LIF5)

- Un Arbre Binaire de Recherche (ABR) est un Arbre Binaire dont les éléments considérés dans l'ordre infixé sont ordonnés dans l'ordre croissant
- Pour tout nœud n d'un ABR
  - Les éléments du sous-arbre gauche de n sont ≤ contenu(n)
  - Les éléments du sous-arbre droit de n sont > contenu(n)

247

- Attention, pour un même contenu la configuration d'un ABR n'est pas unique!

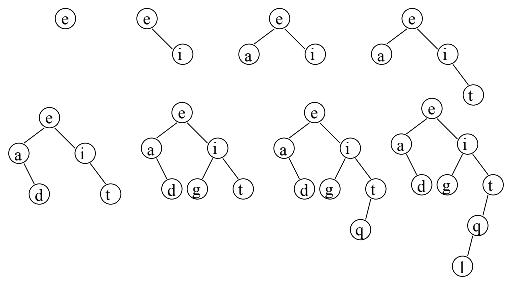


248

- Structure de donnée intéressante pour la recherche d'un élément
  - Seulement quand l'ABR est équilibré (performance en $O(lg_2 n)$, similaire à une dichotomie)
  - Si l'arbre est **dégénéré**, la recherche se fait en O(n) (similaire à une recherche dans une liste triée) ce qui est beaucoup moins intéressant!!
- Descente dans l'arbre à gauche OU à droite de chaque nœud rencontré
- Testez votre mémoire :
  - Dans la version récursive de la procédure de recherche d'un élément, combien y a-t-il d'appels récursifs?

249

- Insertion aux feuilles d'un élément (rappel)



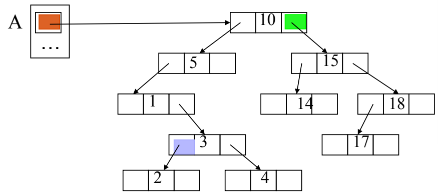
250

```
procédure insérer(donnée e : Elément,
                  donnée-résultat A:ABR,
                                  n : Nœud *)
début
  si n ≠ NULL alors
    si e ≤ n->info alors
      insérer(e,A,n->gauche)
    sinon
      insérer(e,A,n->droite)
    finsi
  sinon
    n←nouveau Nœud(e,NULL,NULL)
  finsi
fin
```

251

Suppression d'un élément e (rappel)

- Recherche de e dans l'ABR
  - Plus précisément rechercher l'emplacement p de type pointeur qui contient l'adresse du nœud contenant e (s'il existe)
  - **Attention, on sera amené à modifier le contenu de p et non pas d'une copie! (on veut l'accès à l'emplacement et pas seulement sa valeur…**



Utilisation d'un pointeur de travail de type pointeur sur pointeur, pour effectuer la localisation

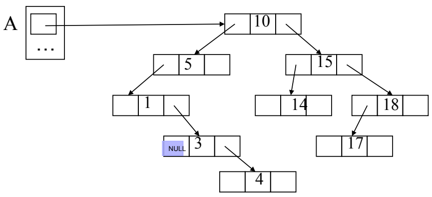
Recherche avant suppression de 10

Recherche avant suppression de 15

Recherche avant suppression de 2

252

- Dans tous les cas, libération de l'espace mémoire occupé par le nœud contenant e après réorganisation de l'arbre
- Cas d'une suppression en feuille
  - On met p à null



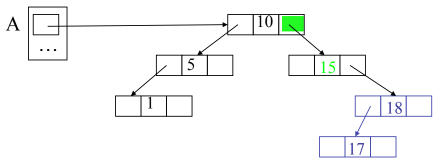
Etat de l'ABR du transparent précédent après suppression de 2

253

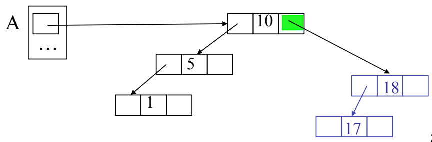
- Cas d'une suppression d'un nœud possédant 1 seul sous-arbre :
  - On transmet ce sous-arbre à p

Suppression de 15

Avant…

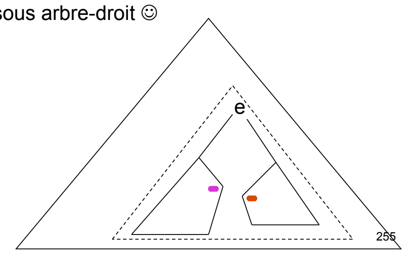


Après…



254

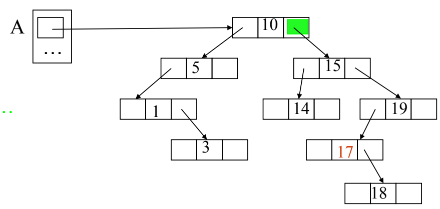
- Sinon …
  - On remplace e par le plus petit de ses descendants supérieurs, ou le plus grand de ses descendants inférieurs **après avoir supprimé ce remplaçant de son emplacement initial** (un des 2 cas précédents)
  - En effet, le plus petit descendant supérieur n'a pas de sous-arbre gauche, le plus grand descendant inférieur n'a pas de sous arbre-droit ☺



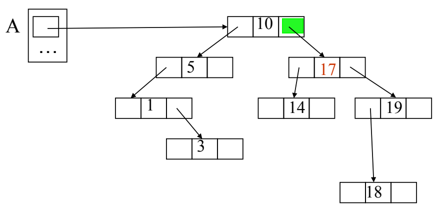
255

Suppression de 15

Avant …



Après …



256