

THÈSE

présentée devant

L'UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD – LYON 1

pour l'obtention du

DIPLÔME DE DOCTORAT

(arrêté du 7 août 2006)

SPÉCIALITÉ INFORMATIQUE

présentée et soutenue publiquement le 10 Septembre 2007

par

Mohamed-Hamed MOUSA

CALCUL EFFICACE ET DIRECT DES REPRÉSENTATIONS DE MAILLAGES 3D UTILISANT LES HARMONIQUES SPHÉRIQUES

Directeur de thèse

Samir AKKOUCHE

COMPOSITION DU JURY

| | | |
|------------------|---|--------------------|
| Stefanie Hahmann | Professeur, Ensimag-INPG | Rapporteur |
| Marc Neveu | Professeur, Université de Bourgogne | Rapporteur |
| Francis Schmitt | Professeur, ENST | Examineur |
| Bruno Lévy | Chargé de recherche, LORIA/INRIA Lorraine | Examineur |
| Samir Akkouche | Professeur, Université Lyon I | Directeur de thèse |
| Raphaëlle Chaine | Maître de Conférences, Université Lyon I | Co-encadrante |

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier mon directeur de thèse Samir Akkouche pour m'avoir fait profiter de son expérience dans la recherche et de la qualité de son encadrement pendant toute la durée de la thèse. Je m'adresse également avec tous mes vifs remerciements à Raphaëlle Chaine, ma co-encadrante. Leurs compétences complémentaires ont largement contribué à l'avancement de mes travaux. Ce travail n'aurait probablement pas été aussi abouti sans les nombreuses discussions que nous avons eues ensemble.

Merci aux rapporteurs, Stefanie Hahmann et Marc Neveu, d'avoir pris le temps de lire en détail ce manuscrit. Merci pour les remarques qu'ils ont faites et qui ont grandement contribué à l'amélioration de la compréhension du document.

Je remercie également les autres membres du jury, Francis Schmitt et Bruno Lévy, de m'avoir fait l'honneur de participer à ma soutenance. C'est un honneur pour moi de leur présenter mes travaux.

Je tiens à remercier ma famille et mes parents pour leur soutien bienveillant tout au long de ces années.

Table des matières

| | |
|---|------------|
| Table des figures | vii |
| Chapitre 1 Introduction | 1 |
| 1.1 Représentations fréquentielles | 2 |
| 1.2 Notre contribution | 3 |
| Chapitre 2 État de l'art | 7 |
| 2.1 Décomposition des surfaces 3D | 9 |
| 2.1.1 Décomposition par transformée de Fourier | 10 |
| 2.1.2 Décomposition en harmoniques sphériques | 13 |
| 2.1.2.1 Le système de coordonnées sphériques | 14 |
| 2.1.2.2 Les harmoniques sphériques | 15 |
| 2.1.2.3 Application de la THS discrète à l'analyse de formes 3D | 19 |
| 2.1.3 Décomposition générale par le Laplacien | 24 |
| 2.1.4 Décomposition en ondelettes sphériques | 27 |
| 2.2 Prémisses d'un calcul direct | 30 |
| 2.2.1 L'aire et le volume d'un maillage | 31 |
| 2.2.1.1 L'aire du maillage 2D | 32 |
| 2.2.1.2 Le volume du maillage 3D | 33 |
| 2.2.2 Utilisation du calcul direct pour l'évaluation des Moments et de la transformée de Fourier | 34 |
| 2.3 Synthèse | 36 |
| Chapitre 3 THS d'une tranche sphérique d'un objet 3D | 39 |
| 3.1 Définition de la tranche sphérique | 40 |

| | | |
|---|---|-----------|
| 3.2 | Décomposition simpliciale | 42 |
| 3.3 | Intersection avec la sphère | 43 |
| 3.4 | Les coefficients harmoniques d'un triangle sphérique | 45 |
| 3.4.1 | Cas spéciaux | 46 |
| 3.5 | Évaluation numérique et contrôle de l'erreur | 48 |
| 3.5.1 | La méthode de Monte Carlo | 48 |
| 3.5.1.1 | Méthode de Monte Carlo en 1D | 48 |
| 3.5.1.2 | Méthode de Monte Carlo en 2D | 49 |
| 3.5.2 | Évaluation sur le triangle sphérique | 52 |
| 3.5.3 | Une mesure de l'erreur | 54 |
| 3.6 | Résultats | 55 |
| Chapitre 4 Représentation de maillages étoilés par les HSs | | 61 |
| 4.1 | La fonction sphérique et sa décomposition angulaire | 62 |
| 4.2 | Calcul de la THS décomposée sur les triangles | 64 |
| 4.2.1 | Orientation et position du triangle par rapport au centre | 66 |
| 4.2.2 | Choix optimal de la sphère | 67 |
| 4.3 | Extension du calcul de la THS sur les arêtes | 69 |
| 4.3.1 | Motivation | 69 |
| 4.3.2 | La théorie du Curl | 70 |
| 4.3.3 | Le calcul des HSs | 72 |
| 4.4 | Évaluation numérique | 77 |
| Chapitre 5 Extension aux maillages non étoilés et ses applications | | 81 |
| 5.1 | Maillages non étoilés | 82 |
| 5.1.1 | Paramétrisation sphérique | 82 |
| 5.1.2 | Segmentation | 87 |
| 5.1.2.1 | Segmentation volumique | 87 |
| 5.1.2.2 | Fusion des représentations fréquentielles des parties | 88 |
| 5.2 | Surfaces représentées par des nuages de points | 91 |
| 5.3 | Applications | 96 |
| 5.3.1 | Transfert de texture géométrique | 98 |
| 5.3.2 | Correction locale de surface | 100 |

| | |
|--|------------|
| 5.3.3 Compression | 101 |
| Chapitre 6 Conclusions et Perspectives | 103 |
| Annexe A La base des harmoniques sphériques | 107 |
| Bibliographie | 109 |
| Publications | 121 |
| Résumé | 123 |
| Abstract | 123 |

Table des figures

| | | |
|------|---|----|
| 1.1 | Représentation d'une tasse par un maillage triangulaire et par voxel. | 2 |
| 1.2 | Représentation d'objets 3D en harmoniques sphériques. | 5 |
| 2.1 | Le pipeline de la méthode proposée par Pauly et Gross [75]. | 11 |
| 2.2 | Les étapes principales de la méthode de Kazhdan [49]. | 13 |
| 2.3 | Le système de coordonnées sphériques. | 14 |
| 2.4 | La partie réelle des premiers termes de Y_l^m | 16 |
| 2.5 | Le développement d'une fonction sphérique en harmoniques sphériques. | 18 |
| 2.6 | Les étapes de la méthode proposée par Zhou et al. [110] | 19 |
| 2.7 | La paramétrisation sphérique d'un maillage de genre zéro. | 20 |
| 2.8 | Représentation multirésolution de la fonction f | 21 |
| 2.9 | Calcul du descripteur de forme en harmoniques sphériques. | 22 |
| 2.10 | Les coordonnées différentielles. | 25 |
| 2.11 | Variations des normales par les fonctions propres du Laplacien. | 27 |
| 2.12 | Le procédé de décomposition en ondelettes surfaciques. (image extraite de [65]) | 28 |
| 2.13 | La subdivision de la sphère. | 29 |
| 2.14 | La décomposition d'un polyèdre en formes géométriques plus simples. | 31 |
| 2.15 | Le calcul de l'aire et le volume d'un maillage. | 32 |
| 3.1 | L'intersection du volume du maillage et une sphère. | 40 |
| 3.2 | La décomposition simpliciale du volume du maillage M | 42 |
| 3.3 | Les cas d'intersections de la sphère S_r et un tétraèdre $PABC$ | 44 |
| 3.4 | Les cas d'intersections de la sphère S_r et un tétraèdre $PABC$ | 45 |
| 3.5 | Paramétrisation du triangle sphériques. | 46 |

| | | |
|------|--|----|
| 3.6 | Deux cas spéciaux pour θ et φ . | 47 |
| 3.7 | La méthode de Monte Carlo en 2D. | 50 |
| 3.8 | Un triangle sphérique et son triangle euclidien correspondant. | 52 |
| 3.9 | La représentation des modèles en harmoniques sphériques. | 56 |
| 3.10 | L'indexation 3D. | 57 |
| 3.11 | Le descripteur de forme est invariable à la rotation mais n'est pas bijectif | 59 |
| 4.1 | La fonction sphérique et sa décomposition angulaire. | 62 |
| 4.2 | La représentation d'un objet étoilé utilisant les HSs. | 65 |
| 4.3 | L'orientation et la position du triangle par rapport à P . | 65 |
| 4.4 | Le positionnement et l'orientation du triangle. | 67 |
| 4.5 | Exemples d'objets étoilés représentés par les HSs. | 68 |
| 4.6 | L'évaluation de Monte Carlo sur le triangle et sur ses arêtes. | 69 |
| 4.7 | Réduction de calcul sur les arêtes de maillage. | 71 |
| 4.8 | La distance à un plan à travers de directions différentes. | 73 |
| 4.9 | Une comparaison entre l'évaluation sur les arêtes et sur les tri- angles | 79 |
| 4.10 | Le modèle de Max Planck à différents niveaux de détails. | 79 |
| 5.1 | Paramétrisation locale de sommets décimés sur le maillage sim- plifié. | 84 |
| 5.2 | Exemples de la paramétrisation sphérique de maillages de genre zéro. | 84 |
| 5.3 | Une comparaison entre notre approche et celle de Zhou et al. [110]. | 86 |
| 5.4 | La représentation du modèle de Bunny en harmoniques sphé- riques. | 86 |
| 5.5 | La représentation de modèles de genre zéro en harmoniques sphé- riques. | 86 |
| 5.6 | Les <i>manifolds</i> stables de points maximums décomposent le vo- lume délimité par le maillage. | 87 |
| 5.7 | Des exemples de segmentation de maillages 3D. | 88 |
| 5.8 | L'opérateur de l'union vs l'opérateur de mélange | 90 |
| 5.9 | Représentation d'objets 3D en utilisant les harmoniques sphé- riques (exemple 1). | 92 |

| | | |
|------|---|-----|
| 5.10 | Représentation d'objets 3D en utilisant les harmoniques sphériques (exemple 2). | 92 |
| 5.11 | Application au nuage de points non étoilé | 93 |
| 5.12 | Exemple de la représentation de la surface par une fonction implicite. | 95 |
| 5.13 | Reconstruction de surface (exemple 1). | 96 |
| 5.14 | Reconstruction de surface (exemple 2). | 97 |
| 5.15 | Reconstruction de surface (exemple 3). | 97 |
| 5.16 | Transfert de texture géométrique (exemple 1). | 99 |
| 5.17 | Transfert de texture géométrique (exemple 2). | 99 |
| 5.18 | Réparation de la discontinuité trouvée sur la figure de Igea. | 100 |
| A.1 | La représentation graphiques du premiers terms de P_l^m . | 108 |

Chapitre 1

Introduction

Les progrès des outils d'acquisition, de modélisation, et de visualisation d'objets 3D ont provoqué l'augmentation du nombre de modèles 3D disponibles sur le WEB ou dans des bases spécialisées. Le traitement efficace des objets géométriques exige - comme dans tous les autres domaines de l'informatique - la conception des structures de données appropriées. Pour chaque problème spécifique dans le traitement de géométrie, nous pouvons identifier un ensemble d'opérations par lesquelles le calcul est dominé et par conséquent nous devons choisir une représentation appropriée qui soutient l'exécution efficace de ces opérateurs.

Dans la littérature, de nombreux travaux ont donc contribué au développement de méthodes efficaces pour représenter et manipuler ces objets 3D. Nous pouvons distinguer différents types de représentations d'objets 3D, parmi lesquelles les représentations combinatoires du type maillage, les représentations algébriques et les représentations discrétisées du type voxel.

- **Représentation par surface polyédrale.** Dans cette catégorie, les modèles sont représentés par leur frontière [11, 19] composée d'un ensemble de facettes polygonales planaires. Ces polygones sont limités par un ensemble d'arêtes, chacune définie par ses deux extrémités. Les maillages triangulaires constituent la forme la plus populaire de surfaces polyédrales (cf. la figure 1.1(a)).
- **Représentation algébrique.** Dans la catégorie des surfaces algébriques, on trouve notamment les surfaces implicites qui sont décrites par une équation implicite de type $f(x, y, z) = 0$.
- **Représentation par voxel.** C'est une représentation de l'objet par une

union de régions unitaires et élémentaires disjointes [79, 57], appelées voxels (cf. la figure 1.1(b)). À la différence de la représentation par frontières, elle est particulièrement utile pour représenter les données volumiques. L'exactitude de cette représentation dépend de la taille des voxels.

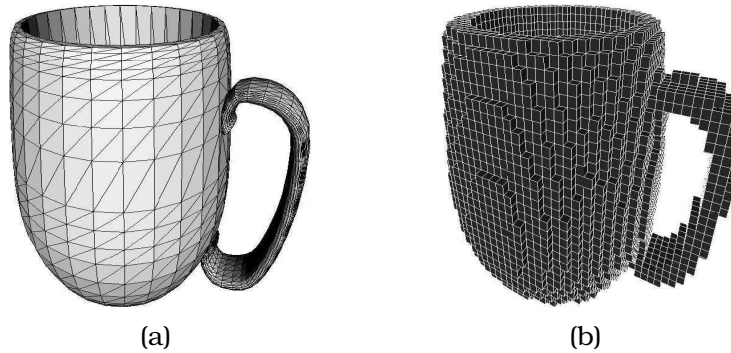


FIG. 1.1 – Représentation d'une tasse par un maillage triangulaire (a) et par voxel (b). (images extraites de [8])

La conversion d'une représentation par voxel ou d'une surface implicite en une représentation par surface polyédrale peut être faite par application de la technique du *Marching Cubes* [60].

Les représentations maillées et implicites des objets facilitent la manipulation d'objets 3D. Cependant, ces représentations ne sont pas toujours satisfaisantes dans certaines applications, comme par exemple le filtrage. Certaines représentations ont été proposées qui s'intéressent plus particulièrement à la décomposition fréquentielle d'objets 3D. Elles sont utilisées dans une variété d'applications comme par exemple, la représentation multirésolution, la reconnaissance de forme, le filtrage, etc. Le travail présenté dans cette thèse s'inscrit dans cette problématique.

1.1 Représentations fréquentielles

On assiste ces dernières années à un regain d'intérêt pour les représentations multirésolution et le filtrage de surfaces. L'approche la plus utilisée est la construction de représentations fréquentielles utilisant la décomposition d'un signal représentant l'objet dans des bases de fonctions [59, 109]. Les basses fréquences du signal correspondent aux traits grossiers de l'objet alors que les

hautes fréquences correspondent aux détails plus fins et au bruit. Les composantes correspondant aux basses fréquences suffisent pour représenter et capturer la forme globale de l'objet.

La plupart des méthodes spectrales ont un cadre commun, qui peut être, en gros, résumé comme suit :

1. Utilisation d'un domaine de paramétrisation des formes 3D, dont le choix dépend de l'application.
2. Détermination d'un ensemble de fonctions de base orthogonales.
3. Calcul des produits scalaires entre une fonction définissant l'objets et ces fonctions de base.

Ces produits scalaires définissent le spectre du développement de la fonction donnée par rapport à cet ensemble de fonctions de base. Grâce à la propriété d'orthogonalité de ces dernières, le développement est unique. Un ensemble de fonctions de base très utilisé est constitué des fonctions propres de l'opérateur Laplacien (cf. la section 2.1.3). Dans le cas continu, ces fonctions propres correspondent aux exponentielles de Fourier dans le cas des domaines planaires et aux harmoniques sphériques dans le cas des domaines sphériques.

En raison de leur contribution à des applications variées (l'éclairage global [48, 9], le calcul de descripteurs de forme [28], la reconstruction de surfaces étoilées [97], et le filtrage de surfaces 3D [110], etc.), les harmoniques sphériques sont le point de départ de nos travaux. Nous nous intéressons plus particulièrement à la décomposition en harmoniques sphériques des fonctions sphériques paramétrant les objets 3D. Les méthodes décrites dans la littérature pour calculer la représentation en harmoniques sphériques de telles fonctions sont toujours basées sur une voxelisation de l'espace dans lequel est plongé l'objet. La précision de la représentation dépend alors de la taille du voxel qui est difficile à prévoir pour une précision souhaitée.

1.2 Notre contribution

Dans cette thèse, nous proposons de calculer une représentation en harmoniques sphériques directe et efficace des fonctions sphériques définissant les maillages 3D, ceci sans voxelisation préalable. Puisque le calcul des harmoniques sphériques est limité aux objets sphériques, nous nous sommes in-

téressés dans un premier temps aux objets 3D étoilés par rapport à un point. De tels objets comportent une paramétrisation sphérique naturelle. De plus, ces objets peuvent être représentés par une fonction sphérique mesurant la distance radiale des points de la surface par rapport au point d'étoilement. Nous montrons comment les coefficients du développement de cette fonction en harmoniques sphériques peuvent être calculés directement sur la description de maillage. En fait, les coefficients sont calculés par des évaluations sur les triangles du maillage. Ceci nous permet de contrôler, par avance, la précision de la représentation en harmoniques sphériques de l'objet. Nous avons ensuite poussé plus loin ce mode de calcul (calcul sans voxelisation) en montrant que les coefficients des harmoniques sphériques peuvent être calculés par des évaluations sur les arêtes du maillage. Ceci nous permet d'ajouter plus de contrôle sur la précision de la représentation ainsi qu'un gain de temps non négligeable par rapport à l'évaluation sur les triangles.

Pour les maillages non étoilés, les résultats précédents sont également valables moyennant une conversion en plusieurs maillages sphériques ou une paramétrisation sphérique préalable si l'objet est de genre zéro. Nous appliquons ensuite notre mode de calcul à la fonction sphérique associée au maillage obtenu. Pour les maillages de genre non nul, les objets sont segmentés en maillages étoilés. Puis, nous appliquons notre calcul des harmoniques sphériques à ces sous maillages. Une représentation par surface implicite est obtenue pour chacune des parties. Ces représentations seront fusionnées de façon classique (mélange) pour recomposer l'objet en entier.

Enfin, nous illustrons l'efficacité de notre représentation en harmoniques sphériques des maillages étoilés à travers un certain nombre d'applications comme la représentation des formes définies à partir de nuages de points, ainsi que le transfert de texture géométrique et la correction locale de surfaces 3D. La figure 1.2 illustre notre schéma pour calculer une représentation en harmoniques sphériques à partir d'un objet 3D.

Cette thèse est organisée comme suit. Dans le chapitre 2, nous résumons les différentes catégories de représentations fréquentielles des modèles 3D. De plus, nous présentons les approches utilisant le calcul direct des caractéristiques géométriques à partir de la description de l'objet. Dans le chapitre 3, nous profitons du fait que les maillages triangulaires 3D peuvent être décomposés volumiquement en un ensemble de tétraèdres signés. Pour calculer

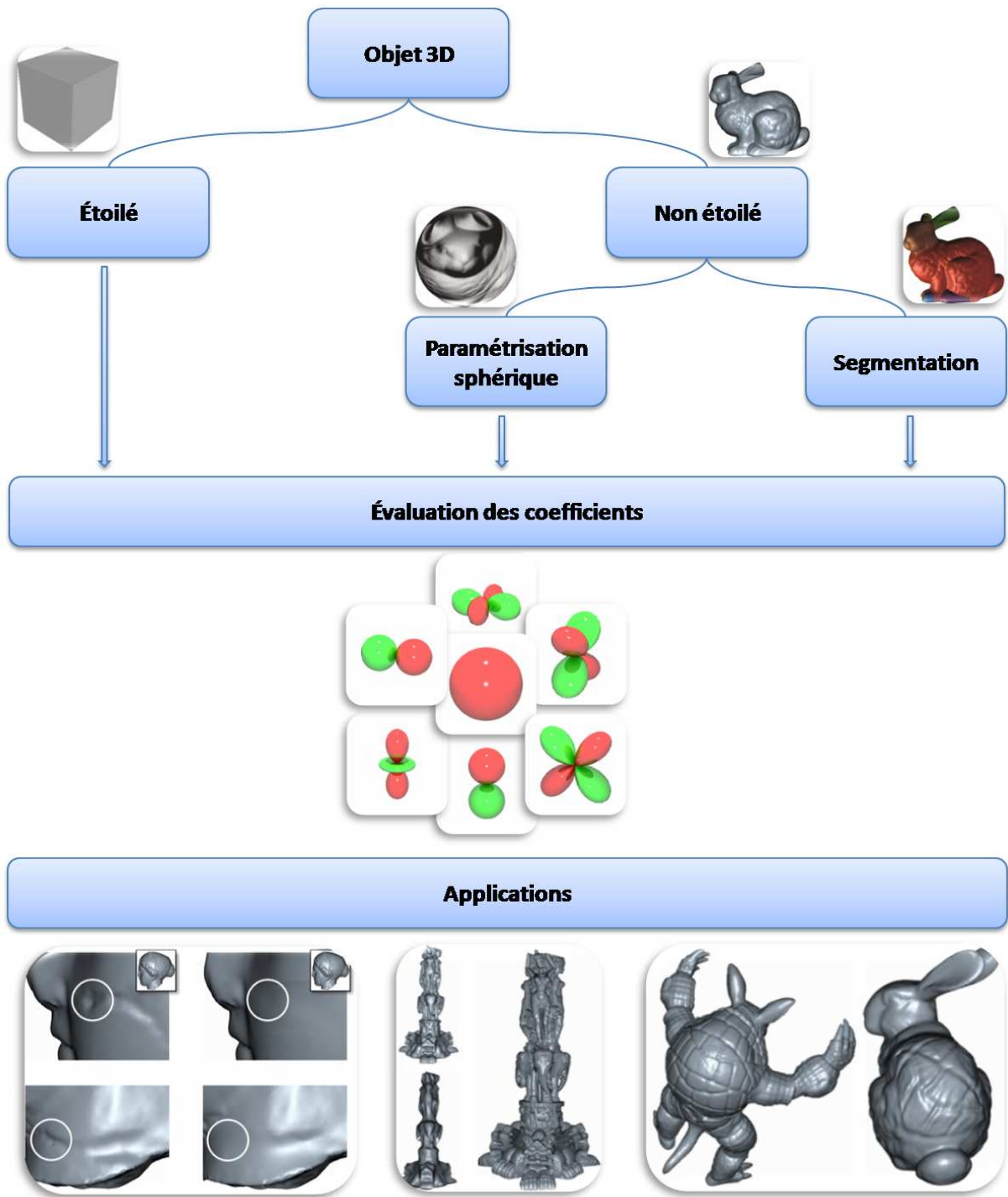


FIG. 1.2 – Représentation d'objets 3D en harmoniques sphériques.

directement sur le maillage, la transformée en harmoniques sphériques de la fonction indicatrice de l'intersection du volume de l'objet et une sphère. Nous montrons également comment utiliser ce mode de calcul dans la reconnaissance de formes 3D. Dans le chapitre 4, nous nous intéressons aux objets étoilés par rapport à un point. Dans ce cas, la fonction sphérique concernée est la fonction mesurant la distance radiale à partir du point d'étoilement. Nous montrons comment calculer le développement de cette fonction en harmoniques sphériques directement sur les triangles et sur les arêtes du maillage. Dans le chapitre 5, nous illustrons la manière par laquelle sera appliqué cette représentation fréquentielle aux objets non étoilés. Il s'agit de traduire ces objets 3D en un ou plusieurs sous domaines sphériques. Nous présentons aussi quelques applications de la représentation fréquentielle proposée. Enfin, nous concluons ces travaux dans le chapitre 6.

Chapitre 2

État de l'art

Sommaire

| | |
|---|-----------|
| 2.1 Décomposition des surfaces 3D | 9 |
| 2.1.1 Décomposition par transformée de Fourier | 10 |
| 2.1.2 Décomposition en harmoniques sphériques | 13 |
| 2.1.3 Décomposition générale par le Laplacien | 24 |
| 2.1.4 Décomposition en ondelettes sphériques | 27 |
| 2.2 Prémises d'un calcul direct | 30 |
| 2.2.1 L'aire et le volume d'un maillage | 31 |
| 2.2.2 Utilisation du calcul direct pour l'évaluation des Moments et de la transformée de Fourier | 34 |
| 2.3 Synthèse | 36 |

La décomposition fréquentielle d'un signal est intéressante pour l'analyse des différents niveaux de détails présents dans le signal et s'applique au filtrage, à la compression et à la transmission progressive. Elle est utilisée pour convertir un problème donné en autre problème équivalent plus facile à résoudre. L'idée est de décomposer le signal en une base de fonctions orthogonales. La forme globale du signal correspond aux basses et moyennes fréquences, alors que les hautes fréquences correspondent aux détails plus fins et au bruit.

La transformée de Fourier est un outil utilisé pour la décomposition dans des domaines très variés comme par exemple pour l'analyse de systèmes linéaires ou des systèmes optiques, et pour la modélisation de processus aléatoires. La transformée de Fourier est une technique mathéma-

tique permettant de déterminer le spectre de fréquences d'un signal. C'est une représentation globale du signal qui ne permet pas d'analyser le comportement fréquentiel local. Un algorithme très efficace [18] pour le calcul rapide de cette transformée a été développé en 1965. Cette méthode, la **T**ransformée de **F**ourier **R**apide TFR, sépare les fréquences paires des fréquences impaires pour diminuer le nombre d'opérations.

A la différence des médias traditionnels ayant des fonctions ou des signaux régulièrement échantillonnés et définis sur la géométrie planaire, les surfaces maillées sont le plus souvent courbes, de connectivité irrégulières et leur paramétrisation continue demeure un problème géométrique ouvert. Elles s'adaptent difficilement à l'analyse de Fourier et à la transformée de Fourier discrète. Par conséquent, le défi principal pour le traitement des signaux géométriques (DGP - "*Digital geometry processing*") est d'essayer d'étendre les méthodes opérant dans l'espace Euclidien aux paramétrisations naturelles des surfaces à variété arbitraire. Le problème reste non résolu jusqu'à présent même si de nombreuses tentatives ont eu lieu [94, 102, 110, 59].

Le filtrage de surfaces est considéré comme l'opération la plus importante dans le domaine du traitement des signaux géométriques. Un filtre est une opération très connue dans le traitement de signaux géométriques. Il atténue certaines composantes d'un signal et en laisse passer d'autres. Un filtre modifie (ou filtre) certaines parties d'un signal d'entrée dans le domaine spatial et dans le domaine fréquentiel. On peut classer les filtres à partir de la forme de leur fonction de transfert. Les filtres les plus courants sont de l'un des quatre types suivants : passe-bas, passe-haut, passe-bande ou coupe-bande.

Grâce à cette opération de filtrage, la représentation fréquentielle des surfaces a reçu une grande attention durant ces dernières années [13, 34, 96, 46]. En fait, le problème consiste à interpréter une forme 3D comme un signal, et à utiliser un ensemble de fonctions de base adapté à sa décomposition. Les filtres passe-bas peuvent être appliqués pour réduire le bruit suscité par les composants correspondants aux hautes fréquences, ou alors créer des niveaux de détails pour les surfaces 3D.

2.1 Décomposition des surfaces 3D

L'extension des méthodes de décomposition fréquentielles à la géométrie de modèles 3D a fait l'objet de plusieurs travaux au cours de ces dernières années. Conceptuellement, cette généralisation peut être accomplie par les fonctions propres du Laplacien grâce aux propriétés de l'orthogonalité de ces fonctions. Taubin [96, 95] a commencé le travail dans cette direction en proposant des méthodes spectrales de maillages irréguliers en utilisant le Laplacien discret afin d'appliquer le lissage Gaussien itératif aux maillages triangulaires. Plus tard, cette méthode a été améliorée par Desbrun et al. [20] qui ont abordé la difficulté de la discrétisation du Laplacien sur la géométrie en utilisant les changements des courbures sur la surface pour la réduction du bruit. Même si ces méthodes sont basées sur des concepts empruntés au traitement fréquentiel, elles ne calculent pas de façon explicite une représentation fréquentielle de la surface de l'objet. Par conséquent, les filtres correspondants, tels que le lissage Gaussien par exemple, doivent être développés dans le domaine spatial.

Dans cette section, nous nous sommes intéressés aux méthodes qui peuvent produire un ensemble de spectres à partir d'une surface 3D. Ces spectres peuvent être explicitement analysés et manipulés. Dans la littérature, le cadre commun de toutes les méthodes spectrales consiste à trois étapes principales :

- Choisir le domaine de paramétrisation, Ω , le plus adapté à l'application,
- Déterminer un ensemble de fonctions de base orthogonales, $\{e_i\}$, dans ce domaine de paramétrisation,
- Calculer les produits scalaires $\langle f, e_i \rangle$, appelés le spectre de fréquences, entre une fonction f définissant l'objet et l'ensemble de ces fonctions orthogonales.

Mathématiquement, les produits scalaires $\langle f, e_i \rangle$ sont définis comme une intégration sur le domaine Ω :

$$\langle f, e_i \rangle = \int_{\Omega} f \bar{e}_i d\omega \quad (2.1)$$

Le plus souvent dans la littérature, la fonction f sur laquelle sont calculés ces produits scalaires est une fonction discrétisée sur une grille régulière car on profite alors de techniques de calcul rapide similaires à la TFR. On commet alors une erreur d'approximation de la fonction qui se reporte sur le calcul des

coefficients et qui est directement liée à la résolution de la grille. Cette erreur est difficile à maîtriser directement et localement : il est difficile de connaître la résolution requise pour approximer les coefficients avec une tolérance fixée.

Selon l'ensemble de fonctions de base, nous pouvons classifier la décomposition fréquentielle de surfaces 3D en plusieurs catégories comme par exemple la décomposition par Fourier, par les harmoniques sphériques et par les vecteurs propres du Laplacien. Dans les sous sections suivantes, nous allons détailler ces catégories ainsi que leurs principes de base.

2.1.1 Décomposition par transformée de Fourier

L'analyse de modèles 3D par des représentations fréquentielles utilisant la transformée de Fourier a permis, entre autre chose, de travailler sur : la mesure de similarité entre les formes 3D [100], la reconstruction de surface [49], le filtrage de surface [75] etc.

Les techniques de traitement d'image exploitent avec succès les représentations fréquentielles pour mettre en application une variété d'algorithmes de traitement spectraux comme l'enlèvement de bruit, l'accentuation des contrastes dans une image, la détection et l'extraction de traits caractéristiques, le sur-échantillonnage et le sous-échantillonnage [29]. L'extension de cette approche aux modèles géométriques généraux rencontre des difficultés dues à un certain nombre de limitations intrinsèques de la transformée de Fourier conventionnelle. D'abord, elle exige une paramétrisation globale sur laquelle les fonctions de base sont définies. Ensuite, la plupart des algorithmes nécessitent des modèles régulièrement échantillonnés. Nous allons montrer dans cette section comment les méthodes actuelles ont surmonté ces limitations pour représenter et manipuler les surfaces 3D par la transformée de Fourier.

Pauly et Gross [75] ont représenté des nuages de points de variétés arbitraires par un ensemble de morceaux de surface. Le partitionnement de la surface est fait de telle sorte que chaque morceau soit projetable sur son plan moyen. L'ensemble de plans moyens sont considérés comme domaines de paramétrisation dans lesquels les transformées de Fourier 2D peuvent être appliquées. Les morceaux de surface peuvent être décrits par un ensemble de champs de distance régulièrement échantillonnés sur la surface. En utilisant ces morceaux de surface, les auteurs ont appliqué la transformée de Fourier discrète (TFD) aux champs de distance définis sur ces morceaux pour

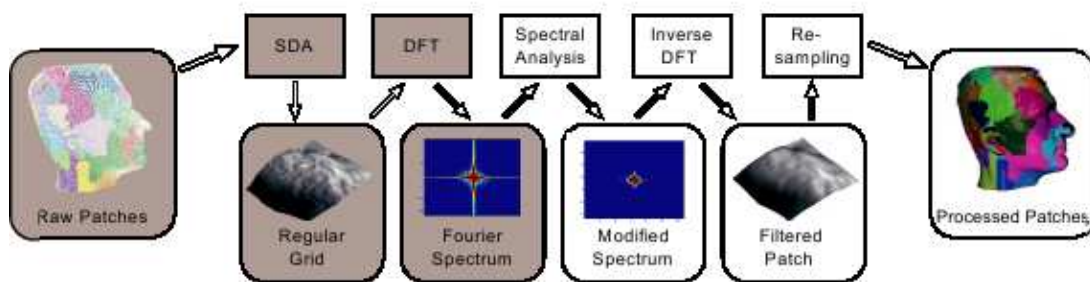


FIG. 2.1 – Le pipeline de la méthode proposée par Pauly et Gross (image extraite de [75]).

obtenir un ensemble de représentations fréquentielles locales. La figure 2.1 montre le pipeline de la méthode. Dans la première étape, le nuage de points est décomposé en un certain nombre de patchs surfaciques qui recouvrent le modèle. Un patch surfacique est défini comme une collection de points échantillonnés d'une région connexe de la surface. Le découpage du nuage de points est fait de sorte que la surface représentée par chaque patch peut être exprimée comme champ de distance sur un domaine planaire. Chaque morceau de la surface est échantillonné sur une grille régulière. Ensuite, la transformée de Fourier discrète est appliquée au champ de distance défini sur ce morceau pour obtenir une représentation spectrale locale. En utilisant les filtres spectraux appropriés, les auteurs ont pu directement manipuler le spectre de Fourier pour réaliser une variété d'effets tels que la suppression du bruit ou son accentuation.

Kazhdan [49] a utilisé une représentation fréquentielle de la fonction indicatrice d'un volume borné par un nuage de points orientés pour trouver une approximation de la surface représentative des points. Le domaine de paramétrisation dans ce cas est l'espace cubique englobant le nuage de points dans lequel les transformées de Fourier 3D peuvent être appliquées. Cette approche profite du fait qu'un ensemble de points orientés prélevés de la surface d'un modèle fournit de façon précise assez d'informations pour calculer les intégrales surfaciques. Kazhdan a utilisé la théorie de Stoke pour transformer les intégrations volumiques de la transformée de Fourier en des intégrations surfaciques sur le nuage de points. Étant donné un modèle solide M et sa fonction

indicatrice χ_M , on peut calculer les coefficients de Fourier de χ_M par :

$$\begin{aligned}\hat{\chi}_M(l, m, n) &= \int \int \int_{\mathbb{R}^3} \chi_M(x, y, z) e^{-i(lx+my+nz)} dx dy dz \\ &= \int \int \int_M e^{-i(lx+my+nz)} dx dy dz\end{aligned}\tag{2.2}$$

En utilisant la théorie de Divergence, l'intégration volumique est simplifiée par une intégration surfacique comme suit :

$$\begin{aligned}\hat{\chi}_M(l, m, n) &= \int \int \int_M e^{-i(lx+my+nz)} dx dy dz \\ &= \int_{\partial M} \langle \mathbf{F}_{l,m,n}, \vec{n} \rangle ds\end{aligned}\tag{2.3}$$

où ∂M est la surface de M , $\vec{n}(p)$ est la normale à la surface au point p et $\mathbf{F}_{l,m,n}$ est un champ vectoriel satisfaisant la condition suivante :

$$(\nabla \cdot \mathbf{F}_{l,m,n})(x, y, z) = e^{-i(lx+my+nz)}\tag{2.4}$$

Le point intéressant de cette méthode est que le calcul de la représentation fréquentielle du modèle peut être appliqué directement à un nuage de points munis des normales. Dans cette approche, les données en entrée sont constituées d'un ensemble de points orientés. Les coefficients de Fourier $\hat{\chi}_M$ de la fonction χ peuvent être calculés en utilisant l'approximation de Monte Carlo :

$$\hat{\chi}_M(l, m, n) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \langle \mathbf{F}_{l,m,n}(p_j), \vec{n}_j \rangle\tag{2.5}$$

Cependant, l'auteur utilise une voxelisation du nuage de points pour convertir cette représentation fréquentielle en une formulation implicite. A partir de cette formulation implicite, une surface approximant l'ensemble de points par l'utilisation de la technique de *marching cubes* [64] est obtenue. La figure 2.2 illustre les étapes principales de la méthode en 2D.

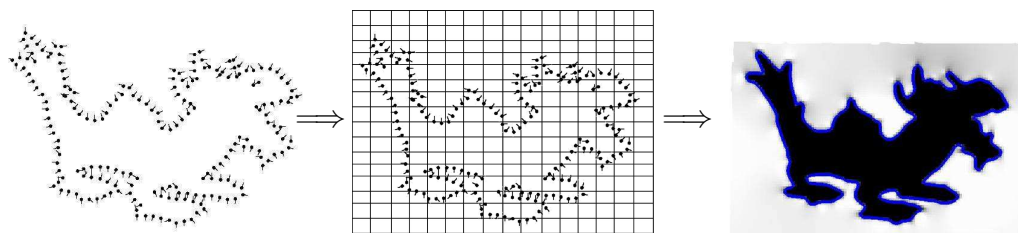


FIG. 2.2 – Les étapes principales de la méthode de Kazhdan (images extraites de [49]).

2.1.2 Décomposition en harmoniques sphériques

Comme la transformée de Fourier, la transformée en harmoniques sphériques a fait l'objet de nombreuses études dans le domaine de l'informatique graphique. Elle a été utilisée dans des applications variées comme l'éclairage global [32], le calcul de descripteurs de forme [51, 50], la reconstruction de la surface approximant un ensemble de points étoilé par rapport à un point [97], la représentation fréquentielle et filtrage de surfaces 3D [68, 110], etc. La décomposition en harmoniques sphériques peut être appliquée aux domaines non sphériques en utilisant une paramétrisation sphérique. Celle-ci est utilisée en particulier pour les formes 3D décrites par des maillages triangulaires [110]. Les méthodes courantes pour calculer la représentation en harmoniques sphériques de fonctions sphériques, dépendantes de l'application, échantillonnent souvent ces fonctions sur une grille 2D régulière ou une grille 3D entourant la sphère (voxelisation). Enfin, un algorithme est appliqué sur cette grille régulière pour évaluer les coefficients des harmoniques sphériques [36, 67, 92]. Dans cette partie, nous allons détailler quelques méthodes de représentation en harmoniques sphériques des modèles.

Nous rappelons d'abord quelques définitions mathématiques utilisées dans cette thèse. Nous allons présenter les notions de base du système de coordonnées sphériques ainsi que les harmoniques sphériques. Nous allons montrer ensuite comment les fonctions sphériques sont décomposées sur la base des harmoniques sphériques, cette décomposition s'appelle *la transformée en harmoniques sphériques*, THS.

2.1.2.1 Le système de coordonnées sphériques

Le système de coordonnées sphériques est un système permettant la représentation des figures géométriques dans l'espace tridimensionnel en utilisant trois coordonnées (r, θ, φ) ; où r est la distance de l'origine, $\theta \in [0, \pi]$ est l'angle

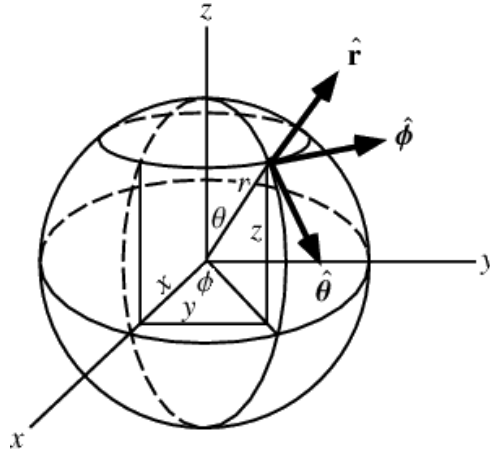


FIG. 2.3 – Le système des coordonnées sphériques. Chaque figure géométrique dans \mathbb{R}^3 est représentée par trois coordonnées (r, θ, φ) .

avec l'axe z et $\varphi \in [0, 2\pi[$ est l'angle avec l'axe x dans le plan xy . θ et φ sont parfois appelés les angles co-latitudinal et azimutal respectivement, (cf. la figure 2.3). Les trois vecteurs principaux sont :

$$\hat{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix} \quad \hat{\theta} = \begin{bmatrix} \cos \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \cos \theta \\ -\sin \theta \end{bmatrix} \quad \hat{\varphi} = \begin{bmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Ces vecteurs de base sont orthogonaux, c'est à dire :

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}} = \hat{\theta} \cdot \hat{\theta} = \hat{\varphi} \cdot \hat{\varphi} = 1 \quad (2.7)$$

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\theta} = \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\varphi} = \hat{\theta} \cdot \hat{\varphi} = 0 \quad (2.8)$$

Pour évaluer numériquement ou symboliquement les intégrations dans chaque système de coordonnées, il est très important de définir les éléments différentiels de base tels que le gradient, le jacobien et les éléments de longueur et d'aire etc. On rappelle ici ces principaux éléments dans le système de coordonnées sphériques.

L'élément de longueur est :

$$ds = dr\hat{r} + r d\theta\hat{\theta} + r \sin \theta d\varphi\hat{\varphi} \quad (2.9)$$

L'élément d'aire est :

$$da = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \hat{r} \quad (2.10)$$

Le jacobien est :

$$J \left(\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \varphi)} \right) = r^2 \sin \theta \quad (2.11)$$

Le gradient est :

$$\nabla = \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \hat{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (2.12)$$

Le Curl d'un champ vectoriel $\mathbf{F} = (\mathbf{F}_r, \mathbf{F}_\theta, \mathbf{F}_\varphi)$ est :

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial(\sin \theta \mathbf{F}_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial \mathbf{F}_\theta}{\partial \varphi} \right] \\ \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \mathbf{F}_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial(r \mathbf{F}_\varphi)}{\partial r} \right] \\ \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(r \mathbf{F}_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial \mathbf{F}_r}{\partial \theta} \right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{r} & \hat{\theta} & \hat{\varphi} \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Les coordonnées angulaires θ et φ permettent également de localiser un point q sur la sphère d'unité \mathbb{S}^2 .

2.1.2.2 Les harmoniques sphériques

Les harmoniques sphériques sont la partie angulaire de la solution de l'équation de Laplace, $\nabla^2 f = 0$, dans le système de coordonnées sphériques (cf. Annexe A). Dans ce dernier, l'équation de Laplace est écrite comme suit :

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (2.14)$$

Les harmoniques sphériques sont définis comme suit [15, 37] :

$$\{Y_l^m(\theta, \varphi) : m \in \mathbb{Z}, |m| \leq l \in \mathbb{N}\} \quad (2.15)$$

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = (-1)^m k(l, m) P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi} \quad (2.16)$$

où P_l^m est le polynôme de Legendre associé de degré l et d'ordre m [103] :

$$P_l^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^l l!} (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2-1)^l \quad (2.17)$$

et $k(l, m)$ est la fonction de normalisation :

$$k(l, m) = (-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} \quad (2.18)$$

La figure 2.4 montre une représentation graphique de la partie réelle des premiers termes Y_l^m , $0 \leq l \leq 2$. Alors que le tableau 2.1 donne la représentation analytique des premiers harmoniques sphériques.

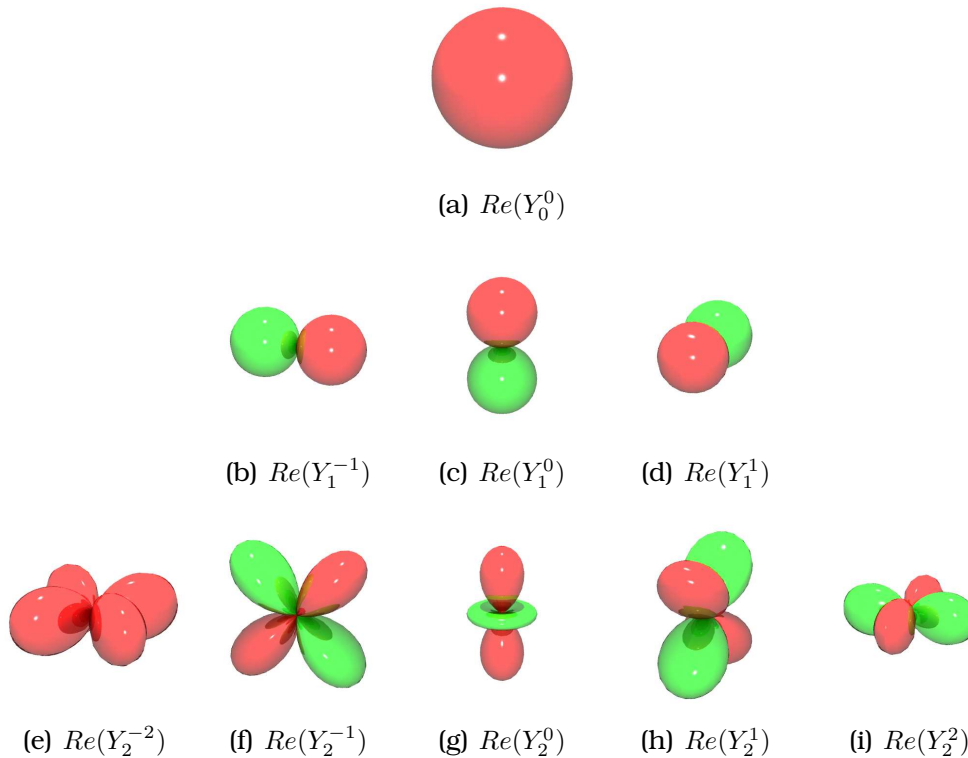


FIG. 2.4 – La partie réelle de quelques premiers termes de Y_l^m . La couleur rouge représente les valeurs positives et la couleur verte représente les valeurs négatives.

$$\begin{aligned}
Y_0^0(\theta, \varphi) &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{\pi}} \\
Y_1^{-1}(\theta, \varphi) &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \sin \theta e^{-i\varphi} \\
Y_1^0(\theta, \varphi) &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{\pi}} \cos \theta \\
Y_1^1(\theta, \varphi) &= \frac{-1}{2} \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \sin \theta e^{i\varphi} \\
Y_2^{-2}(\theta, \varphi) &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2 \theta e^{-2i\varphi} \\
Y_2^{-1}(\theta, \varphi) &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{-i\varphi} \\
Y_2^0(\theta, \varphi) &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{5}{\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1) \\
Y_2^1(\theta, \varphi) &= \frac{-1}{2} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{i\varphi} \\
Y_2^2(\theta, \varphi) &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2 \theta e^{2i\varphi} \\
Y_3^0(\theta, \varphi) &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{7}{\pi}} (5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta)
\end{aligned}$$

TAB. 2.1 – L'expression analytique de quelques premiers harmoniques sphériques.

Décomposition en harmoniques sphériques Les harmoniques sphériques constituent une base orthonormée dans l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{S}^2)$ ¹ où \mathbb{S}^2 est la sphère unité. On considère l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{S}^2)$ correspondant à l'ensemble des fonctions sphériques de carré intégrables sur \mathbb{S}^2 . En effet :

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi Y_l^m(\theta, \varphi) \overline{Y_{l'}^{m'}}(\theta, \varphi) \sin(\theta) d\theta d\varphi = \delta_{l,l'} \delta_{m,m'} \quad (2.19)$$

où $\delta_{u,v}$ est la fonction delta de Kronecker :

$$\delta_{u,v} = \begin{cases} 1 & \text{si } u = v; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.20)$$

¹L'espace de Hilbert est un espace vectoriel linéaire muni d'un produit scalaire dont l'espace normé est complet. C'est à dire que toute séquence d'éléments qui converge, converge vers un élément de l'espace.

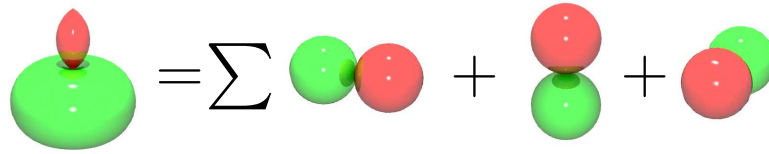


FIG. 2.5 – Le développement d'une fonction sphérique en harmoniques sphériques.

Étant donné une fonction sphérique² $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$; f peut être exprimée par une combinaison linéaire des harmoniques sphériques comme suit :

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l c_{l,m} Y_l^m(\theta, \varphi) \quad (2.21)$$

où les coefficients $c_{l,m}$, appelés coefficients harmoniques d'ordre (l, m) , sont le produit scalaire $\langle f, Y_l^m \rangle$ et sont égaux à :

$$c_{l,m} = k(l, m) \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(\theta, \varphi) P_l^m(\cos \theta) e^{-im\varphi} \sin(\theta) d\theta d\varphi \quad (2.22)$$

Les coefficients harmoniques $c_{l,m}$ sont complexes. Ils sont reliés entre eux par la relation suivante :

$$c_{l,-m} = (-1)^m \overline{c_{l,m}} \quad (2.23)$$

Ceci permet de faire la moitié du travail nécessaire autrement. La figure 2.5 montre un exemple de développement d'une fonction sphérique comme somme de quelques harmoniques sphériques. Les harmoniques sphériques de degré l génèrent un sous espace de dimension $2l + 1$ dans $L^2(\mathbb{S}^2)$ correspondant aux fonctions sphériques de largeur de bande l .

La transformée en harmoniques sphériques discrète Selon le théorème d'échantillonnage de Nyquist, une fonction sphérique f ayant une largeur de bande limitée β peut être reconstruite sans crénelage par au moins $4\beta^2$ échantillons. De ce fait, le calcul de l'intégrale dans l'équation 2.22 est réduit à une somme finie en utilisant un échantillonnage régulier dans les directions

²Sans perte de généralité, nous allons traiter dans cette section les fonctions sphériques scalaires. L'extension vers les dimensions supérieures est directe.

azimutales et polaires :

$$c_{l,m} = \frac{\sqrt{2\pi}}{2\beta} \sum_{j=0}^{2\beta-1} \sum_{k=0}^{2\beta-1} a_j^\beta f(\theta_j, \varphi_k) P_l^m(\cos \theta_j) e^{-im\varphi_k} \quad (2.24)$$

où $(\theta_j, \varphi_k) = (\frac{(2j+1)\pi}{4\beta}, \frac{2k\pi}{2\beta})$ sont les points d'échantillonnage, et a_j^β est un poids correspondant au terme $\sin \theta$ dans l'intégrale.

Donc, la fonction f ayant une largeur de bande β peut être déterminée par les β^2 coefficients de son développement en harmoniques sphériques. La complexité originale du problème est en $O(\beta^4)$.

2.1.2.3 Application de la THS discrète à l'analyse de formes 3D

Zhou et al. [110] ont présenté une nouvelle approche pour filtrer la surface des maillages de variétés arbitraires à l'aide des harmoniques sphériques. Leur contribution principale est un algorithme robuste de paramétrisation sphérique. Cet algorithme permet de paramétrer une surface donnée de genre zéro en trois signaux sphériques correspondant aux coordonnées des points sur la surface. Ils supposent que les maillages d'entrée sont fermés et de genre zéro. Les surfaces de genre non zéro sont d'abord coupées manuellement en surfaces de genre zéro. Un maillage avec des trous peut être manipulé comme

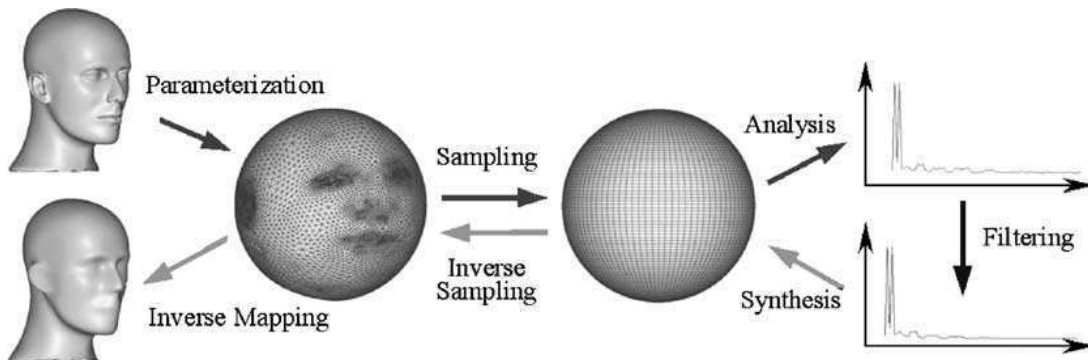


FIG. 2.6 – Les étapes de la méthode proposée par Zhou et al. (image extraite de [110]).

fermé par l'insertion des triangles additionnels dans chaque trou. Comme montré dans la figure 2.6, leur méthode du filtrage de surface se résume en trois étapes suivantes :

- **Paramétrisation sphérique.** Le maillage d'entrée est d'abord simplifié

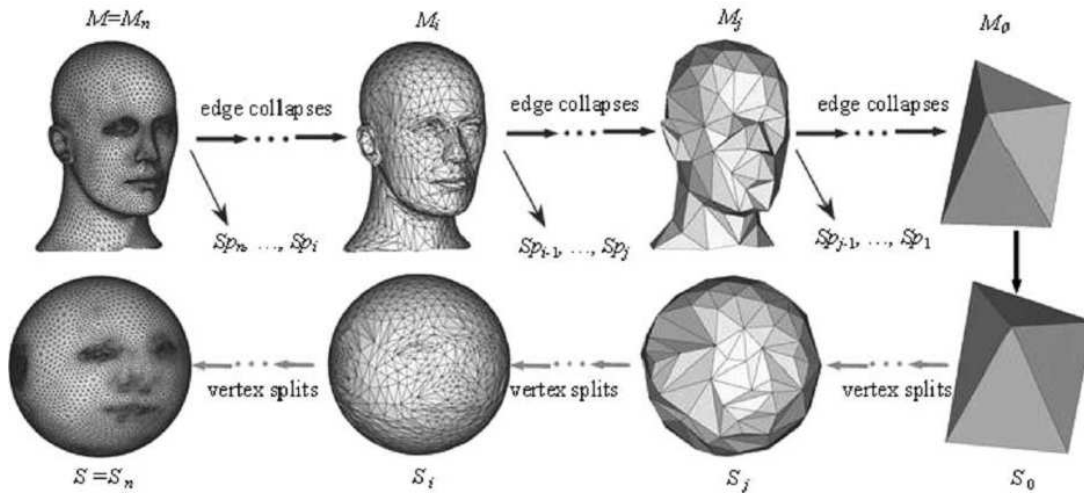


FIG. 2.7 – La paramétrisation sphérique d'un maillage de genre zéro (image extraite de [110]).

en un polyèdre convexe, qui sera projeté sur la sphère. Les sommets décimés sont ensuite rajoutés sur la sphère dans l'ordre inverse dans lequel ils sont supprimés (cf. la figure 2.7). Chaque fois qu'un point décimé est ajouté sur la sphère, la validité des maillages sphériques intermédiaires est maintenue, i.e les triangles de ces maillages ne se superposent pas sur la sphère. Enfin, la paramétrisation sphérique associe pour chaque point sur la surface du maillage initial un point sur la sphère. En construisant cette paramétrisation sphérique d'un maillage de genre zéro, la surface du maillage est transformée en trois signaux sphériques. Chaque signal correspond à une des trois coordonnées cartésiennes x , y ou z . Cette paramétrisation sera développée plus en détails dans la section 5.1.1.

- **L'échantillonnage.** Pour utiliser la THS rapide, il est nécessaire d'échantillonner régulièrement les trois signaux sphériques dans des directions azimutales et polaires.
- **Analyse et synthèse en harmoniques sphériques.** Le signal sphérique régulièrement échantillonné est décomposé en un ensemble de spectres de fréquences en utilisant la THS rapide, et un nouveau signal régulier peut être synthétisé à partir de ces spectres.

Puisque les maillages de genre non zéro ne sont pas topologiquement équivalents à la sphère, des opérations supplémentaires sont nécessaires pour manipuler ces maillages avant le traitement. Comme étape de prétraitement, Zhou

et al. [110] coupent les maillages de genre non zéro au niveau de quelques courbes fermées définies par l'utilisateur afin de produire un nouveau maillage ayant la même topologie qu'un sous ensemble de la sphère. Par la suite, leur algorithme de paramétrisation sphérique et leurs techniques de filtrage sont directement appliqués pour traiter de tels maillages de genre zéro.

Le problème des méthodes utilisant une paramétrisation sphérique d'une forme 3D dans le but d'utiliser les harmoniques sphériques réside dans le fait que la transformée en harmoniques sphériques ignore la corrélation entre les coordonnées x , y , et z sur la sphère. De plus, la discrétisation régulière sur la paramétrisation sphérique peut sous échantillonner quelques régions importantes sur la sphère.

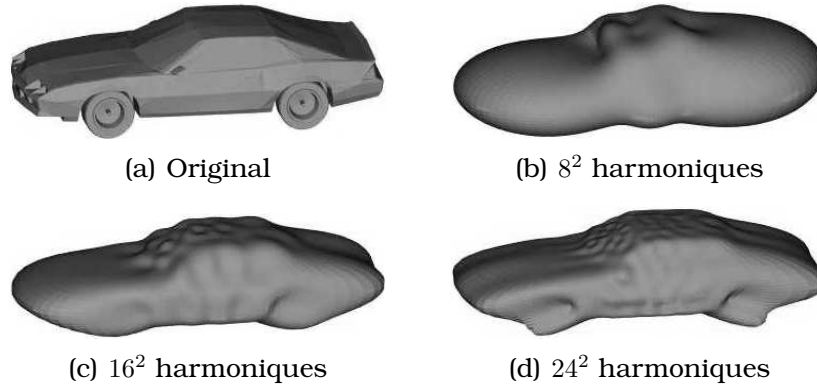


FIG. 2.8 – Représentation multirésolution de la fonction f (image extraite de [83]).

Saupe et al. [83, 101] considèrent la transformée en harmoniques sphériques d'une fonction définie à partir d'un maillage 3D pour générer un vecteur caractéristique de ce maillage. Dans une première étape, la forme 3D est caractérisée par une fonction définie sur la sphère. En notant $\{T_i\}$ l'ensemble des triangles du maillage, la fonction sphérique f associée au modèle $I = \cup_i T_i$ est définie sur la sphère unité comme suit :

$$f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(u) = \max_r \{r \geq 0 | p = \vec{O} + r \vec{ou} \in I\}$$

Cette fonction $f(u)$ mesure l'extension radiale de l'objet dans les directions données par $\vec{ou} \in \mathbb{S}^2$. Saupe et al. ont utilisé les harmoniques sphériques pour décomposer la fonction f comme une combinaison linéaire $\sum_{l \geq 0} \sum_{|m| \leq l} c_{lm} Y_l^m$.

Ici, c_{lm} sont les coefficients harmoniques. Ceux-ci sont calculés par échantillonnage régulier sur la sphère aux points :

$$u_{ij} = (\cos \varphi_i \sin \theta_j, \sin \varphi_i \sin \theta_j, \cos \theta_j) \quad (2.25)$$

où $\varphi_i = \frac{2i\pi}{n}$, $\theta_j = \frac{(2j+1)\pi}{2n}$ et n est choisi suffisamment grand. Dans le cas d'une surface étoilée par rapport au centre de la sphère, ces coefficients peuvent être utilisés pour reconstruire une approximation de l'objet à différents niveaux de détails, (Figure 2.8).

Funkhouser et al. [28] se sont également intéressés à la reconnaissance de formes utilisant les harmoniques sphériques. Ils considèrent l'intersection de la surface avec des sphères de rayon différents et réutilisent la transformée en harmoniques sphériques des fonctions indicatrices de ces intersections. Un descripteur de forme 3D est ensuite extrait à partir de la transformée en harmoniques sphériques de ces fonctions indicatrices [50]. Ce descripteur a montré une plus grande efficacité par rapport aux autres méthodes de reconnaissance de forme [100, 71, 83, 69, 78, 106, 108]. Les auteurs ont amélioré leur descripteur de forme par l'intégration de la symétrie du modèle [51]. Les étapes principales pour le calcul du descripteur pour un ensemble de polygones sont montrées dans la figure 2.9 :

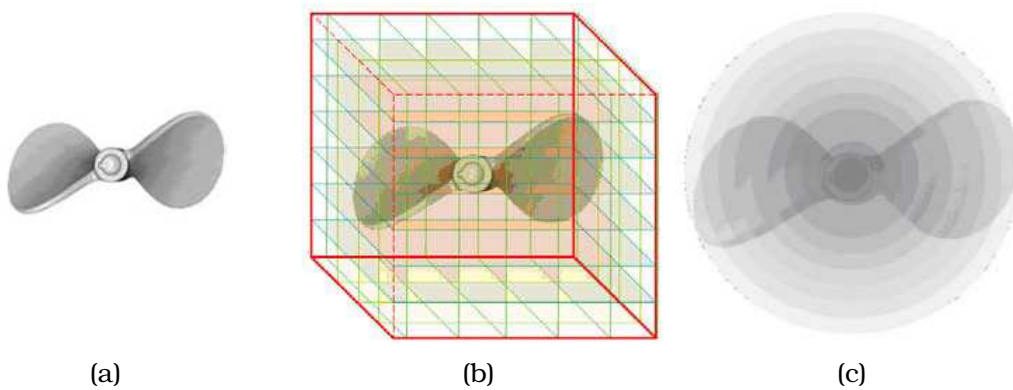


FIG. 2.9 – Calcul du descripteur de forme en harmoniques sphériques. (a) Le modèle original. (b) La version discrétisée du modèle. (c) L'intersection avec la sphère.

1. tout d'abord, la surface polygonale est discrétisée dans une grille de voxels de taille $2R \times 2R \times 2R$ centrée au centre de masse et englobant l'objet. La discrétisation est faite dans les directions des axes principaux

x , y et z . La valeur de 1 est attribuée à une cellule si cette dernière intersecte au moins un polygone de la surface, et la valeur de 0 est attribuée autrement. Le modèle est mis à l'échelle et transformé de telle sorte que le centre de masse coïncide avec le point (R, R, R) et que la sphère englobante du modèle a un rayon égal à R .

2. La grille de voxels est traitée comme une fonction binaire, χ , définie sur l'ensemble des points situés à une distance inférieure ou égale à R du centre de masse. La fonction χ est égale à 1 pour tous les voxels ayant la valeur 1, et zéro sinon. La fonction χ est représentée dans les coordonnées sphériques comme :

$$\chi(r, \theta, \varphi) = \text{Voxel}(r \cos \varphi \sin \theta + R, r \sin \varphi \sin \theta + R, r \cos \theta + R) \quad (2.26)$$

où $r \in [0, R]$, $\theta \in [0, \pi]$ et $\varphi \in [0, 2\pi]$.

3. En restreignant la fonction χ aux différents rayons, on obtient une collection de fonctions binaires sphériques $\chi_r(\theta, \varphi) = \chi(r, \theta, \varphi)$, $r \in \{0, 1, \dots, R\}$.
4. En utilisant les harmoniques sphériques, le développement de chaque χ_r est exprimé comme somme de ses différentes fréquences :

$$\chi_r = \sum_l^\beta \sum_{m=-l}^{m=l} c_{lm}^r Y_l^m \quad (2.27)$$

où β est la bande passante et le composant fréquentiel de degré l dans ce développement est :

$$\gamma_r^l = \sum_{m=-l}^{m=l} c_{lm}^r Y_l^m \quad (2.28)$$

5. En combinant les composants fréquentiels γ_r^l correspondant aux différents rayons, on obtient un descripteur géométrique bidimensionnel en harmoniques sphériques dans la forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \|\gamma_{r_1}^0\| & \|\gamma_{r_1}^1\| & \cdots & \|\gamma_{r_1}^\beta\| \\ \|\gamma_{r_2}^0\| & \|\gamma_{r_2}^1\| & \cdots & \|\gamma_{r_2}^\beta\| \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \|\gamma_{r_n}^0\| & \|\gamma_{r_n}^1\| & \cdots & \|\gamma_{r_n}^\beta\| \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

où n est le nombre des sphères.

Cependant, la discrétisation des modèles introduit des erreurs numériques incontrôlables relatives à la taille du voxel dans les calculs des coefficients c_{lm}^r .

2.1.3 Décomposition générale par le Laplacien

L'opérateur Laplacien ∇^2 est un opérateur, dans l'espace euclidien, continu et différentiel de deuxième ordre applicable aux fonctions définies et dérivables dans \mathbb{R}^n . Il est défini comme la divergence du gradient $\nabla^2 = (\text{Div Grad})$. Par conséquent, il est égal à la somme de toutes les dérivées partielles deuxièmes non mixtes. Par exemple, étant donnée une fonction $f(x, y, z)$, le Laplacien de cette fonction dans \mathbb{R}^3 est égal à :

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (2.30)$$

La généralisation de l'opérateur Laplacien aux fonctions définies sur les surfaces (ou plus généralement sur les variétés Riemanniennes) est l'opérateur de Laplace-Beltrami. Il est pareillement défini comme la divergence du gradient. Le gradient d'une fonction f dans ce cas est donné par :

$$\nabla f = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j} \right) \frac{\partial f}{\partial x^i} \quad (2.31)$$

où g^{ij} est l'inverse du tenseur métrique, et défini par

$$g_{ik} g^{kj} = \delta_i^j \quad (2.32)$$

Donc, la forme de l'opérateur de Laplace-Beltrami appliqué à une fonction scalaire est donnée par [82] :

$$\nabla^2 f = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x^i} \left(g g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{1}{\sqrt{|g|}} f \right) \right) \quad (2.33)$$

où g est le déterminant de g_{ij} .

L'ensemble des fonctions propres de ce opérateur est orthogonales et complet. Nous pouvons ainsi décomposer les fonctions définies sur les surfaces grâce à cet ensemble de fonctions propres. Dans les domaines planaires, les fonctions propres de l'opérateur Laplace-Beltrami sont les fonctions exponen-

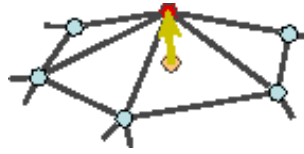


FIG. 2.10 – Les coordonnées différentielles.

tielles de Fourier. Elles sont également les harmoniques sphériques dans les domaines sphériques.

Étant donné un graphe G et A sa matrice d'adjacence, Taubin [96] a proposé une discrétisation uniforme de l'opérateur Laplace-Beltrami L comme suit :

$$L = I - DA \quad (2.34)$$

où D est une matrice diagonale telle que $D_{ii} = \frac{1}{d_i}$ et d_i est la valence de sommet i . Le premier vecteur propre du L est $(1, 1, \dots, 1)$ et sa valeur propre correspondante est 0. Le deuxième vecteur propre est appelé le vecteur de Fiedler [59]. Ce vecteur propre a plusieurs propriétés, entre elles il est un vecteur de permutation fournissant un ordre naturel des sommets du maillage [42]. L'opérateur L permet également de coder les coordonnées cartésiennes de chaque sommet $v_i = (v_{ix}, v_{iy}, v_{iz})$ en coordonnées laplaciennes $\delta_i = (\delta_{ix}, \delta_{iy}, \delta_{iz})$:

$$\delta_i = v_i - \frac{1}{d_i} \sum_{j \in N(i)} v_j$$

où $N(i)$ est le premier voisinage de v_i , (cf. la figure 2.10). Les coordonnées laplaciennes sont parfois appelées les coordonnées différentielles. Ces coordonnées sont utilisées souvent dans le domaine de l'informatique graphique pour plusieurs objectifs tels que l'édition de maillage [91], le filtrage de maillages irréguliers [96] et les représentations différentielles de maillages [30, 88]. Cependant, on ne peut pas appliquer une analyse fréquentielle aux coordonnées différentielles. Par conséquent, toutes les opérations doivent être effectuées dans le domaine spatial.

Karni et Gotsman [46] ont présenté une méthode pour représenter les maillages triangulaires par les vecteurs propres de l'opérateur L . Leur objectif dans ce travail était la compression spectrale de maillage. Cette compression est basée sur un partitionnement du maillage. La compression est réalisée par la décomposition, ou projection, des fonctions de la géométrie,

$\mathbf{x} = (v_{1x}, \dots, v_{nx})$, $\mathbf{y} = (v_{1y}, \dots, v_{ny})$ et $\mathbf{z} = (v_{1z}, \dots, v_{nz})$, de ces sous-maillages sur les vecteurs propres de l'opérateur L :

$$\mathbf{x} = \alpha_1^{\mathbf{x}} e_1 + \alpha_2^{\mathbf{x}} e_2 + \dots + \alpha_n^{\mathbf{x}} e_n \quad (2.35)$$

$$\mathbf{y} = \alpha_1^{\mathbf{y}} e_1 + \alpha_2^{\mathbf{y}} e_2 + \dots + \alpha_n^{\mathbf{y}} e_n \quad (2.36)$$

$$\mathbf{z} = \alpha_1^{\mathbf{z}} e_1 + \alpha_2^{\mathbf{z}} e_2 + \dots + \alpha_n^{\mathbf{z}} e_n \quad (2.37)$$

où n est le nombre des sommets et e_i sont les vecteurs propres de L . Par cette décomposition, ils obtiennent des descriptions fréquentielles locales du maillage. Cependant, les calculs explicites des vecteurs propres sont très coûteux et instables quand le nombre de sommets dans chaque partition est élevé. Dans [47], Karni et Gotsman ont minimisé le calcul de vecteurs propres de Laplacien en approximant ces vecteurs par ceux d'un maillage régulier. Cependant, les vecteurs de base sont toujours des vecteurs dépendants seulement de la connectivité de maillage et pas de la géométrie.

Sorkine et Cohen-Or [89] ont présenté une technique d'approximation de la forme des maillages triangulaires irréguliers. Leur méthode approxime la géométrie du maillage par une combinaison linéaire de vecteurs de base qui sont des fonctions de la connectivité et des indices de quelques sommets dans le maillage. Pareillement à la technique présentée par Karni et Gotsman [46], les vecteurs de base sont des fonctions dans la connectivité de maillage seulement et pas de la géométrie. Dans [90], la méthode précédente est améliorée par la production des vecteurs de base relatifs à la géométrie et à la connectivité du maillage en même temps.

Lévy [59] a étudié un type spécifique de fonctions de base hiérarchiques, appelé les Harmoniques Variétés ou *Manifold Harmonics*, défini par les fonctions propres de l'opérateur de Laplace-Beltrami. Sur des objets plus généraux, ceci définit une base de fonctions bien adaptée à la géométrie et à la topologie de l'objet. Une fois la base des fonctions propres calculée, elle peut être utilisée pour représenter une variété de fonctions sur la surface. La figure 2.11 montre comment un signal (ici la normale) peut être compressé par cette base. Les vecteurs des normales sur le lapin sont bien approximés par 100 coefficients. Cette représentation du signal est intéressante d'un point de vue du traitement de signal (par exemple, le filtrage peut être fait en temps réel, puisqu'une convolution est remplacée par un produit dans l'espace de fréquence).

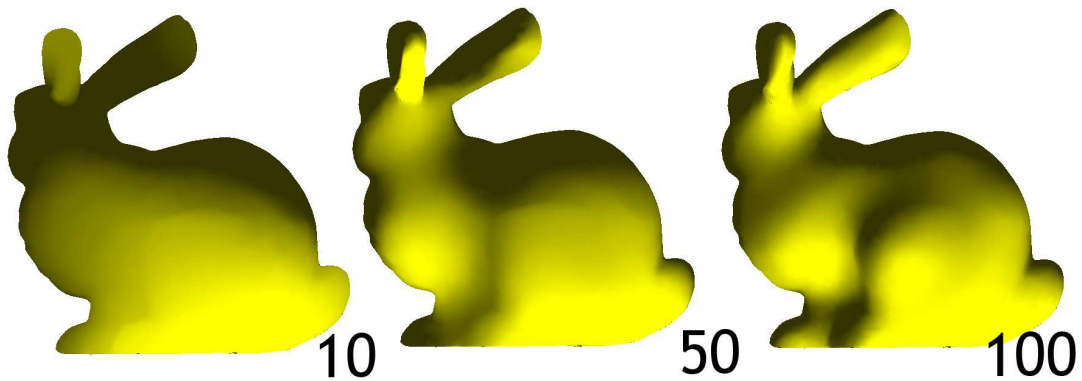


FIG. 2.11 – Reconstruction d'un signal (ici la normale) en utilisant les fonctions propres de base. Les variations des normales sur le lapin sont bien approximées par 100 coefficients [59].

C'est similaire à la manière par laquelle les transformées de Fourier peuvent approximer les fonctions sur le plan ou sur la sphère, avec la différence que la base des fonctions est adaptée à l'objet sur lequel les fonctions doivent être définies. Cependant, ce n'est pas une manière efficace de compresser un signal, puisque la représentation exige également 100 coefficients par sommet pour représenter les fonctions de base.

2.1.4 Décomposition en ondelettes sphériques

Pour finir, nous présentons ici la méthode de décomposition spectrale en ondelettes sphériques utilisées dans la littérature. Comme la transformée en harmoniques sphériques, les ondelettes sphériques permettent une analyse du comportement spectral des fonctions définies sur une sphère.

L'une des limitations importantes de l'analyse de Fourier classique est son incapacité à localiser les portions de la fonction dans lesquelles les variations sont rapides, ni celles où ces variations sont lentes. Les ondelettes remédient à cette limitation en fournissant des informations sur la localité des oscillations des fonctions. La construction classique est limitée aux domaines simples comme les intervalles et rectangles.

Dans le procédé de décomposition en ondelettes surfaciques [65], un maillage de base (par exemple un icosaèdre) est subdivisé et déformé pour qu'il épouse la surface à approximer. Le processus de subdivision consiste simplement à partager chaque triangle du maillage en quatre nouveaux triangles. Ces opé-

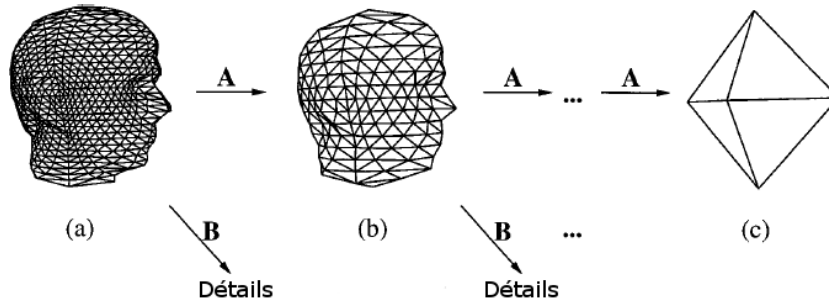


FIG. 2.12 – Le procédé de décomposition en ondelettes surfaciques. (image extraite de [65])

rations sont itérées jusqu'à la précision souhaitée. L'analyse multirésolution est ensuite réalisée à l'aide de deux filtres A et B pour chaque niveau de résolution (cf. la figure 2.12) et la reconstruction est assurée par les deux filtres de synthèse P et Q . Les ondelettes surfaciques constituent un outil puissant pour l'analyse multirésolution. Toutefois, dans le processus de simplification, l'inconvénient majeur est la fusion systématique des faces par groupes de 4. Si le maillage ne permet pas de telles fusions sur son intégralité, un rééchantillonnage du maillage devient obligatoire et conduit à un maillage ayant plus de faces que l'original [24]. Dans les ondelettes de seconde génération, pour chaque niveau de résolution le maillage grossier et les détails sont obtenus respectivement par projection sur une base de fonctions d'échelles et d'ondelettes. La phase de construction de ces ondelettes appelée *lifting* [93]. Les ondelettes de seconde génération a remédié à la limitation de topologie de maillage par une phase de remaillage afin de construire un maillage semi-régulier approchant l'objet initial et possédant une topologie propice à l'application d'une décomposition en ondelettes.

Schröder et Sweldens [84] ont présenté une méthode pour décomposer les fonctions scalaires, définies sur la sphère, en ondelettes sphériques. En effet, l'extension de la décomposition classique en ondelettes aux domaines sphériques est faite par la création d'une subdivision multirésolution sur la sphère (cf. la figure 2.13). Grâce à cette méthode, chaque niveau de subdivision (ou bien chaque niveau de détails) $\kappa(j)$ est un sous ensemble du niveau supérieur $\kappa(j+1)$. Les fonctions d'échelle $\{\varphi_{j,k} | j \geq 0, k \in \kappa(j)\}$ sont ensuite définies pour l'ensemble de points $\{p_{j,k} | j \geq 0, k \in \kappa(j)\}$ comme suit :

$$p_{j,k} = p_{j+1,k} \implies \forall k, k' \in \kappa(j) : \varphi_{j,k}(p_{j,k'}) = \delta_{k,k'}$$

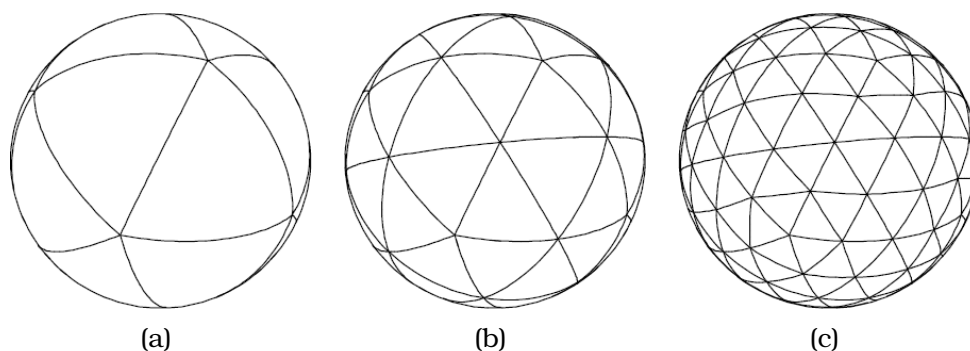


FIG. 2.13 – La subdivision de la sphère en commençant par l’icosaèdre (a) et ses subdivisions consécutives comme (b) et (c).

Les ondelettes sont donc données par $\psi_{j,m}(p) = \varphi_{j+1,m}(p)$, pour plus de détails sur les ondelettes sphériques, nous conseillons la lecture de [84].

Nous allons parler maintenant de la représentation à l’aide des ondelettes des fonctions sphériques associées aux objets 3D. Praun et Hoppe [76] ont présenté un algorithme robuste pour la paramétrisation sphérique qui applique la surface d’un objet de genre zéro à un domaine sphérique. Ce domaine sphérique permet à son tour d’appliquer la surface sur un octaèdre ou sur un octaèdre déplié sur le plan. Ce dernier est appelé l’image de la géométrie. La transformée classique en ondelettes est appliquée à cette image. Le but de ce travail est la compression des objets 3D [40]. Praun et Hoppe ont également appliqué l’algorithme de la transformée en ondelettes sphériques [84] aux fonctions définies sur la sphère à l’aide de la paramétrisation sphérique des objets.

D’une manière similaire, Jin et al. [43] ont proposé une méthode pour tauter un maillage 3D. La méthode est basée sur une paramétrisation sphérique [110] de ce maillage, puis sur la représentation en ondelettes sphériques des fonctions définies à partir de cette paramétrisation sphérique.

Dans toutes les méthodes précédentes, l’utilisation d’un échantillonnage régulier de la paramétrisation sphérique conforme peut aboutir à un sous échantillonnage de régions importantes de la surface. Pour éviter cette inconvénient, la paramétrisation sphérique devrait être isométrique. L’état de l’art présenté par Floater et Hormann [27] montre la difficulté de mettre au point un algorithme de paramétrisation isométrique.

2.2 Limites des calculs basés sur une voxelisation et prémisses d'un calcul direct

Certaines applications nécessitent le calcul de caractéristiques importantes d'une surface maillée comme, le volume borné par ce maillage, les moments volumiques, ou les coefficients de la transformée de Fourier volumique de l'espace délimité par ce maillage. Ces applications peuvent être par exemple, la recherche et la récupération des modèles 3D dans une base de données [72], où encore l'analyse de forme [78]. Intuitivement, nous pouvons calculer ces caractéristiques en transformant le maillage du modèle en sa représentation volumique définie par voxels [17, 104, 52]. Les caractéristiques seront ensuite calculées dans cet espace de voxels. Cependant, la voxelisation d'un maillage entraîne des erreurs numériques relatives à la taille de voxel. De plus, il est très difficile de prévoir la taille de voxel satisfaisant une précision souhaitée. En conséquence, il est plus efficace de calculer ces caractéristiques directement à partir de la représentation du maillage [58].

Lien [63] a introduit des principes mathématiques pour évaluer les opérations coûteuses dans la conception géométrique assistée par ordinateur. L'auteur s'est aperçu qu'un bon nombre de caractéristiques géométriques fréquemment utilisées s'expriment comme une intégration volumique d'une certaine fonction f définie sur le maillage M :

$$I = \int_M f(x, y, z) dv \quad (2.38)$$

Puisque l'opérateur d'intégration est un opérateur linéaire, le calcul direct sur un polyèdre peut être évalué en prenant une décomposition de ce dernier en des formes géométriques plus simples dont l'union représente ce polyèdre lui-même. La figure 2.14 montre une décomposition d'un polyèdre 2D en une union des triangles. Ainsi, une intégrale sur un polyèdre peut être calculée facilement en le décomposant systématiquement en un ensemble de simplexes et en sommant les résultats obtenus sur chacun d'eux. Cette méthode est analytiquement exacte mais en pratique l'exactitude du résultat est limitée par celle de l'arithmétique flottante. On peut noter que la complexité de cette méthode est linéairement proportionnelle au nombre de sommets du polyèdre.

Pour effectuer le calcul direct, nous devons diviser les calculs sur les formes

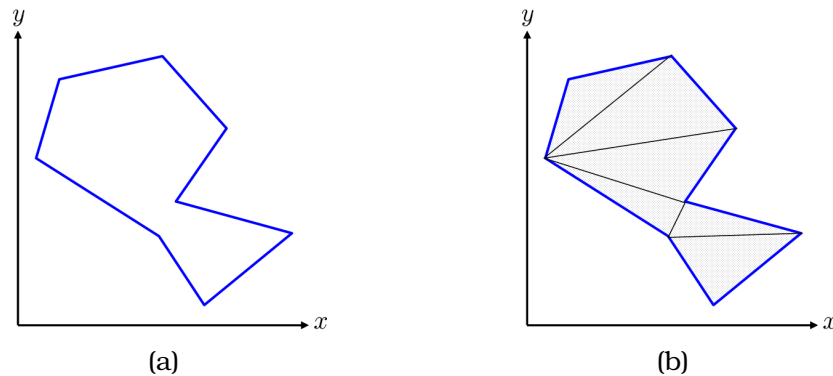


FIG. 2.14 – La décomposition d'un polyèdre 2D en formes géométriques plus simples (des triangles dans ce cas).

élémentaires du maillage qui sont des triangles en 2D et des tétraèdres en 3D. Dans ce cas, la complexité des calculs est proportionnelle au nombre de formes élémentaires qui est, en général, beaucoup plus petit que le nombre de voxels dans une représentation volumique équivalente. Zhang et Chen [107] ont utilisé cette observation pour calculer l'aire et le volume d'un maillage triangulaire ainsi que les moments volumiques et les coefficients de Fourier de la fonction indicatrice de ce maillage. Nous allons résumer dans les deux sous sections cette approche pour mieux comprendre l'approche que nous avons utilisée dans les méthodes décrites aux chapitres 3 et 4.

2.2.1 L'aire et le volume d'un maillage

Le calcul du volume d'un modèle 3D n'est pas un travail trivial. Une première approche consiste à convertir le modèle en une image 3D binaire discrète définie comme un ensemble de voxels. La valeur de '1' ou '0' est attribuée à chaque voxel pour indiquer si ce point est à l'intérieur ou à l'extérieur de l'objet. Le nombre de voxels à l'intérieur de l'objet, ou d'une manière équivalente, l'addition de toutes les valeurs de voxels dans l'espace discret, peut être considérée comme approximation du volume du modèle. Cependant, il est très difficile de prévoir la résolution de l'image binaire 3D satisfaisant une précision souhaitée.

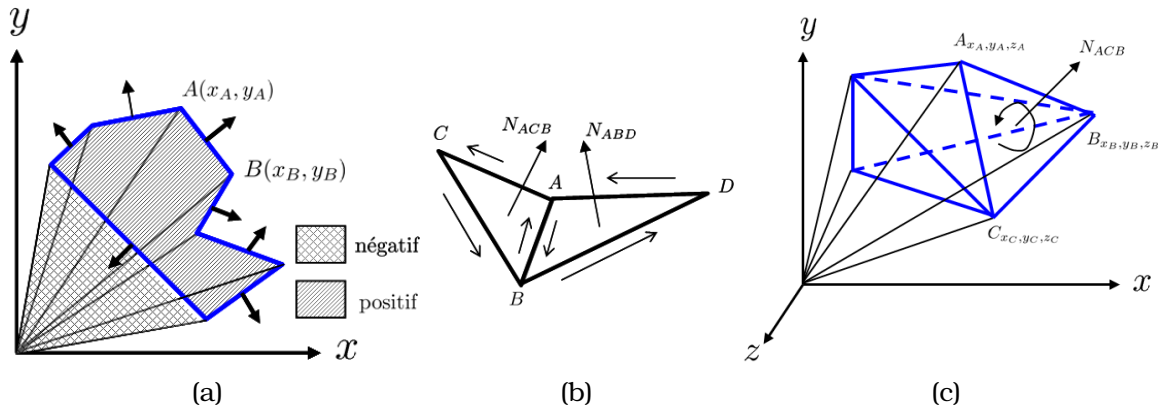


FIG. 2.15 – (a) L'aire de maillage 2D. (b) L'ordre des sommets dans les triangles d'un maillage 3D. (c) Les tétraèdres induits par les triangles du maillage.

2.2.1.1 L'aire du maillage 2D

Dans ce paragraphe, nous expliquons l'approche qui calcule directement l'aire d'un maillage 2D. Un maillage 2D est simplement une forme 2D définie par un polygone. Comme il est montré dans la figure 2.15(a), considérons un maillage 2D avec les lignes en gras représentant ses bords. Bien que l'on puisse discrétiser cet espace dans une image binaire 2D et calculer l'aire du maillage en comptant les pixels à l'intérieur du polygone, les temps de calcul restent linéaires par rapport au nombre de pixels intersectant le maillage. Nous allons montrer que ce calcul peut être fait de manière exacte et en temps linéaire par rapport au nombre de bords dans le maillage qui est beaucoup moins élevé que nombre de pixels correspondants.

Puisqu'on connaît tous les sommets et bords du polygone, on peut calculer la normale pour chaque bord facilement. Par exemple, la normale de l'arête AB dans la figure 2.15(a) s'exprime de la manière suivante :

$$\vec{N}_{AB} = \frac{-(y_B - y_A)\hat{x} + (x_B - x_A)\hat{y}}{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}} \quad (2.39)$$

où (x_A, y_A) et (x_B, y_B) sont les coordonnées des sommets A et B , respectivement, et \hat{x} et \hat{y} sont les vecteurs unitaires des axes principaux. Ici, la normale est définie comme un vecteur normalisé, perpendiculaire à l'arête correspondante et orientée vers l'extérieur.

Après avoir déterminé les normales, on construit un ensemble de triangles en reliant tous les sommets du maillage à l'origine. Chaque arête et l'origine

forment un triangle qui sert de forme élémentaire pour le calcul. Nous attribuons un signe à l'aire des triangles selon la position de l'origine par rapport à l'arête et à la direction de la normale correspondante. Si l'origine est du même côté que la direction de la normale alors l'aire sera considérée comme négative sinon, on dira qu'elle est positive. Par exemple, l'aire du triangle OAB (cf. la figure 2.15(a)) est :

$$|\mathbf{Aire}(OAB)| = \left| \frac{1}{2}(-x_B y_A + x_A y_B) \right| \quad (2.40)$$

Le signe de $\mathbf{Aire}(OAB)$ est identique au signe du produit intérieur $\vec{OA} \cdot \vec{N}_{AB}$, ceci est positif dans ce cas.

L'aire totale du maillage peut être calculée en sommant ces aires signées. C'est-à-dire,

$$\mathbf{Aire}_{total} = \sum_i \mathbf{Aire}(i) \quad (2.41)$$

où la sommation est réalisée sur tous les triangles élémentaires. Le résultat de l'équation 2.41 est garanti être positif quelque soit la position de l'origine.

2.2.1.2 Le volume du maillage 3D

La procédure ci-dessus peut être étendue au cas 3D. Avant de calculer le volume, un certain prétraitement sur le modèle doit être appliqué pour assurer que tous les polygones sont des triangles. Cette triangulation est maintenant une méthode très classique, bien maîtrisée et utilisée dans de nombreux domaines. La direction de la normale d'un triangle peut être déterminée par l'ordre des sommets et de la règle de main droite, 2.15(b). Il est très facile de satisfaire la condition de cohérence des normales. Pour chaque couple de triangles voisins, si le bord commun est parcouru dans les deux sens, alors les normales des ces deux triangles sont cohérentes. Par exemple, dans la figure 2.15(b), AB est le bord commun des triangles ACB et ABD . Dans le triangle ACB , la direction est de B à A , et dans le triangle ABD , la direction est de A à B , ainsi \vec{N}_{ACB} et \vec{N}_{ABD} sont cohérentes.

Dans le cas 3D, la forme élémentaire pour le calcul est le tétraèdre. Pour chaque triangle, on relie chacun de ses sommets à l'origine pour former un tétraèdre (Figure 2.15(c)).

Comme dans le cas 2D, nous attribuons un signe au volume des tétraèdres

selon la position de l'origine par rapport au triangle et à la direction de la normale correspondante. Si l'origine est du même côté que la direction de la normale alors que le volume sera considéré comme négatif sinon, on dira qu'il est positif. Dans la figure 2.15(c), le triangle ACB a la normale N_{ACB} . Le volume du tétraèdre $OACB$ est :

$$|V_{OACB}| = \left| \frac{1}{6}(-x_C y_B z_A + x_B y_C z_A + x_C y_A z_B - x_A y_C z_B - x_B y_A z_C + x_A y_B z_C) \right| \quad (2.42)$$

car l'origine O est sur le côté opposé de N_{ACB} , le signe de ce tétraèdre est positif. Le signe peut également être calculé par le produit intérieur $\vec{OA} \cdot \vec{N}_{ACB}$. Le volume total du maillage peut être calculé en terme de ces volumes signés. C'est-à-dire,

$$\mathbf{Volume}_{total} = \sum_i \mathbf{Volume}(i) \quad (2.43)$$

où la sommation est réalisée sur tous les tétraèdres élémentaires.

2.2.2 Utilisation du calcul direct pour l'évaluation des Moments et de la transformée de Fourier

L'algorithme ci-dessus s'applique à chaque fois qu'une décomposition en formes élémentaires dont les caractéristiques sont calculables de manière explicite. Par exemple, toutes les caractéristiques qui ont la forme d'une intégration sur l'espace intérieur de l'objet peuvent être calculées avec cet algorithme. Ceci inclut les moments, la transformée de Fourier, la transformation par ondelettes, et beaucoup d'autres. Mais la difficulté consiste à évaluer ces caractéristiques pour les formes élémentaires.

Les moments volumiques d'un maillage 3D sont définis comme suit :

$$M_{pqr} = \iiint x^p y^q z^r \chi(x, y, z) dx dy dz \quad (2.44)$$

où $\chi(x, y, z)$ est la fonction indicatrice du maillage :

$$\chi(x, y, z) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x, y, z) \in \text{maillage} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.45)$$

et p, q, r sont les ordres du moment. Les moments centraux peuvent être obtenus facilement à partir de l'équation 2.44. Puisque l'intégration peut être

réécrite comme somme des intégrations sur chaque forme élémentaire :

$$M_{pqr} = \sum_i s_i \iiint x^p y^q z^r \chi_i(x, y, z) dx dy dz \quad (2.46)$$

où $\chi_i(x, y, z)$ est la fonction indicatrice de la forme élémentaire i , et s_i est le signe du volume de cette forme élémentaire.

La même approche peut être utilisée pour calculer un certain nombre de moments de deuxième ordre pour les triangles et les tétraèdres qui sont intensivement utilisés. Ci-dessous, quelques exemples pour les moments d'un tétraèdre :

$$M_{000} = \frac{1}{6}(-x_3 y_2 z_1 + x_2 y_3 z_1 + x_3 y_1 z_2 - x_1 y_3 z_2 - x_2 y_1 z_3 + x_1 y_2 z_3) \quad (2.47)$$

$$M_{100} = \frac{1}{4}(x_1 + x_2 + x_3)M_{000} \quad (2.48)$$

$$M_{200} = \frac{1}{10}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3)M_{000} \quad (2.49)$$

Pour plus d'exemple, voir [4].

Dans le paragraphe suivant, nous présentons l'utilisation du calcul direct pour la transformée de Fourier. La transformée de Fourier de la fonction indicatrice d'un maillage 3D est définie par :

$$\hat{\chi}(u, v, w) = \iiint e^{-i(xu+yv+zw)} \chi_{x,y,z} dx dy dz \quad (2.50)$$

Puisque la transformée de Fourier est également une intégration sur l'espace à l'intérieur du maillage, elle peut également être calculée en décomposant l'intégration en des intégrations sur chaque forme élémentaire. La forme explicite de la transformée de Fourier d'un tétraèdre est donné par :

$$\begin{aligned}
\hat{\chi}(u, v, w) = M_{000} * & \\
& \left(\frac{i * e^{i(u x_1 + v y_1 + w z_1)}}{(u x_1 + v y_1 + w z_1)(u x_1 - u x_2 + v y_1 - v y_2 + w z_1 - w z_2)(u x_1 - u x_3 + v y_1 - v y_3 + w z_1 - w z_3)} \right. \\
& + \frac{i * e^{i(u x_2 + v y_2 + w z_2)}}{(u x_2 + v y_2 + w z_2)(u x_2 - u x_1 + v y_2 - v y_1 + w z_2 - w z_1)(u x_2 - u x_3 + v y_2 - v y_3 + w z_2 - w z_3)} \\
& + \frac{i * e^{i(u x_3 + v y_3 + w z_3)}}{(u x_3 + v y_3 + w z_3)(u x_3 - u x_1 + v y_3 - v y_1 + w z_3 - w z_1)(u x_3 - u x_2 + v y_3 - v y_2 + w z_3 - w z_2)} \\
& \left. - \frac{i}{(u x_1 + v y_1 + w z_1)(u x_2 + v y_2 + w z_2)(u x_3 + v y_3 + w z_3)} \right) \tag{2.51}
\end{aligned}$$

Comme les moments de base et les coefficients de la transformée de Fourier d'une forme élémentaire sont donnés explicitement, le calcul ci-dessus est très efficace. La complexité est donc en $O(n)$, où n est le nombre d'arêtes ou de triangles dans le maillage. Les formules données dans cette section sont une extension de travail commencé par Lien et Kajiya [62].

L'algorithme proposé n'a pas encore atteint sa forme idéale. Il est encore difficile d'obtenir la forme explicite des moments d'ordre supérieur pour les triangles et les tétraèdres notamment.

2.3 Synthèse

Dans ce chapitre, nous avons résumé les différentes catégories de représentations fréquentielles des modèles 3D. De plus, nous avons présenté les approches utilisant le calcul direct des caractéristiques géométriques à partir de la description de l'objet.

La décomposition générale A l'aide du Laplacien la décomposition fréquentielle d'objets 3D est réalisée par décomposer les fonctions définies sur la géométrie du maillage grâce aux vecteurs propres du Laplacien. Néanmoins, l'évaluation des vecteurs propres de la version discrète du Laplacien reste toujours l'obstacle principal de ce genre de méthodes. Par contre, le problème peut être simplifié dans certains domaines. Dans les domaines planaires, les fonctions propres de l'opérateur de Laplace-Beltrami sont les exponentielles de Fourier. Ainsi, elles correspondent aux harmoniques sphériques dans les domaines sphériques. Les transformées en harmoniques sphériques sont parfois appe-

lées analyse de Fourier sur la sphère. L'utilisation de ces fonctions propres accélère le temps de la décomposition car les fonctions propres du Laplacien dans ce cas là sont bien définies. Dans les sous sections 2.1.1 et 2.1.2, nous avons résumé les représentations fréquentielles par Fourier et par les harmoniques sphériques.

La représentation par Fourier L'extension de l'analyse par Fourier sur la géométrie des objets permet de profiter des algorithmes développés pour les images 2D. Néanmoins, l'échantillonnage de la surface sur une grille 2D régulière - comme dans [75] - peut ignorer des régions importantes sur la surface. Ainsi peut-il sur-échantillonner des régions moins détaillées. De la même manière, la discrétisation des objets sur une grille régulière 3D - la voxelisation - introduit des erreurs numériques dans les calculs de coefficients de la représentation fréquentielle. En plus, il est très difficile de déterminer par avance la taille des voxels qui satisfait une précision souhaitée.

Décomposition en harmoniques sphériques La paramétrisation sphériques permet de définir des fonctions sphériques sur la géométrie de l'objet. Cependant, pour satisfaire une précision définie par l'utilisateur avec moins d'échantillonnage, nous avons besoin d'une paramétrisation sphérique plus lisse que celle utilisée dans cette méthode. De plus, l'utilisation de trois fonctions pour représenter les coordonnées x, y, z - comme proposent Zhou et al [110] - ignore la corrélation entre les trois coordonnées dans le voisinage local sur la surface de l'objet. D'autre part, la discrétisation des modèles sur une grille 3D - comme propose Funkhouser et al. [28] - introduit des erreurs numériques relatives à la taille du voxel dans les calculs des coefficients c_{lm}^r des harmoniques sphériques. En fait, il est très difficile de prévoir la taille des voxels convenable qui satisfait une précision souhaitée. D'ailleurs, quand la taille de voxel est petite, la complexité de la méthode augmente énormément.

Le calcul direct Il est très important d'essayer calculer les caractéristiques géométriques directement à partir de la description de la surface. Cependant, les caractéristiques géométriques compliquées ne sont pas bien exploitées. Par exemple, il n'est pas facile de trouver la forme explicite des moments de grand ordre pour les forme élémentaires.

Chapitre 3

THS d'une tranche sphérique d'un objet 3D

Sommaire

| | |
|---|-----------|
| 3.1 Définition de la tranche sphérique | 40 |
| 3.2 Décomposition simpliciale | 42 |
| 3.3 Intersection avec la sphère | 43 |
| 3.4 Les coefficients harmoniques d'un triangle sphérique | 45 |
| 3.4.1 Cas spéciaux | 46 |
| 3.5 Évaluation numérique et contrôle de l'erreur | 48 |
| 3.5.1 La méthode de Monte Carlo | 48 |
| 3.5.2 Évaluation sur le triangle sphérique | 52 |
| 3.5.3 Une mesure de l'erreur | 54 |
| 3.6 Résultats | 55 |

Grâce aux développements des techniques de numérisation, modélisation et de visualisation de formes 3D, on peut désormais trouver des modèles 3D sur le web et dans certaines bases de données, en plus des textes et des images 2D généralement utilisés. Les formes 3D sont souvent représentées par des maillages 3D. Le maillage 3D est une approximation de la surface par des primitives géométriques simples, des polygones. La description du maillage contient des informations sur les deux composantes principales du maillage, sa géométrie et sa connectivité. La géométrie correspond à une liste de points ; les sommets des polygones. Cette liste décrit les coordonnées tridimensionnelles (x, y, z) des points. La connectivité décrit comment les points sont reliés

entre eux pour assembler les facettes. Les maillages à base de simplexes - les triangles pour la représentation de surfaces plongées en 3D, les tétraèdres pour la représentation de volumes - sont actuellement les plus répandus.

Il peut être nécessaire de calculer certaines caractéristiques importantes des surfaces 3D : par exemple, le calcul du volume, des moments volumiques, les coefficients de la transformée de Fourier de la fonction indicatrice du volume délimité (cf. la section 2.2). Ces caractéristiques peuvent être utilisées dans plusieurs applications : la recherche de similarité et la récupération de modèles 3D dans une base de données [28], ainsi que l'identification et l'analyse de formes 3D [78].

Dans ce chapitre, nous allons montrer que nous pouvons calculer les coefficients de la transformée en harmoniques sphériques de la fonction indicatrice représentant l'intersection d'une sphère et le volume délimité par un maillage 3D directement à partir de la donnée des triangles composants le maillage. Dans ce cas, la fonction sphérique concernée est la fonction indicatrice de l'intersection du maillage et une sphère S_r . Nous commencerons d'abord par expliquer la distribution de calcul sur les formes élémentaires du maillage. Nous présenterons ensuite l'évaluation numérique de ce calcul à l'aide de la méthode de Monte Carlo.

3.1 Définition de la tranche sphérique

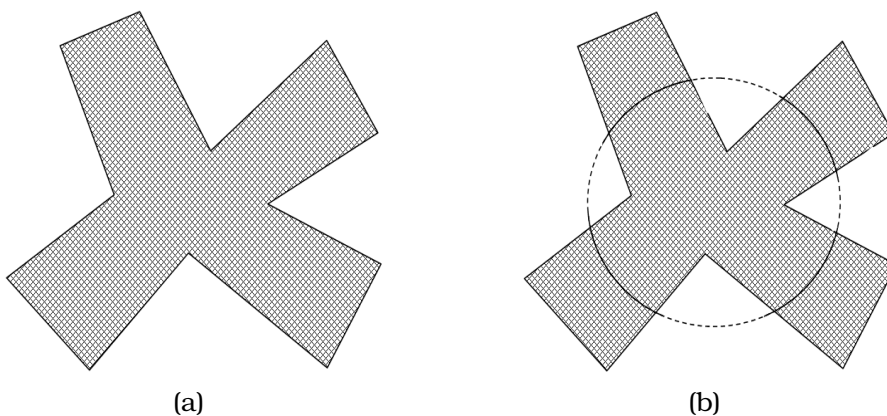


FIG. 3.1 – L'intersection du volume du maillage et une sphère. (a) Le volume du maillage M . (b) L'intersection avec la sphère.

Étant donné une surface fermée, approximée par un maillage M , plongée

dans l'espace \mathbb{R}^3 , on considère le volume solide V borné par M (cf. la figure 3.1(a)). On considère ensuite l'intersection de V avec la sphère S_r de rayon r et centrée en un point fixe P (cf. la figure 3.1(b)). L'intersection $M_r = V \cap S_r$ est une région sphérique. Supposons que χ_r est la fonction indicatrice de M_r :

$$\chi_r : S_r \longrightarrow \{0, 1\}$$

$$\chi_r(p) = \begin{cases} 1 & \text{si } p \in M_r \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.1)$$

Nous pouvons approximer cette fonction indicatrice χ_r par une combinaison linéaire des harmoniques sphériques $Y_l^m(\theta, \varphi)$. Théoriquement, cette somme s'écrit donc comme suit :

$$\chi_r(\theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{|m| \leq l} c_{lm}^r Y_l^m(\theta, \varphi) \quad (3.2)$$

Cette expansion correspond à une décomposition fréquentielle de χ_r . En pratique, les coefficients de grands ordres correspondent aux détails fins de l'objet et du bruit. On peut donc filtrer la décomposition et supprimer ces détails en limitant la somme à une largeur de bande β :

$$\tilde{\chi}_r(\theta, \varphi) \approx \mathbf{round} \left(\sum_{l=0}^{\beta} \sum_{|m| \leq l} c_{lm}^r Y_l^m(\theta, \varphi) \right) \quad (3.3)$$

où $\mathbf{round}(u)$ est la valeur arrondie de u .

Une collection de telles approximations ($\tilde{\chi}_r$) de la fonction indicatrice χ_r , pour plusieurs valeurs de r , s'est avérée utile comme descripteur de forme pour rechercher et identifier les objets tridimensionnels [50, 28, 83].

Nous allons montrer comment nous pouvons calculer rapidement et précisément les coefficients de la représentation de la fonction χ_r en harmoniques sphériques. Grâce à ces calculs, l'évaluation de chaque coefficient c_{lm}^r est de complexité $O(n)$, où n est le nombre de triangles du maillage M . Pour obtenir la représentation filtrée de la fonction χ_r en harmoniques sphérique, il y a aussi une dépendance au nombre de coefficients à calculer (i.e. une dépendance en β).

3.2 Décomposition simpliciale

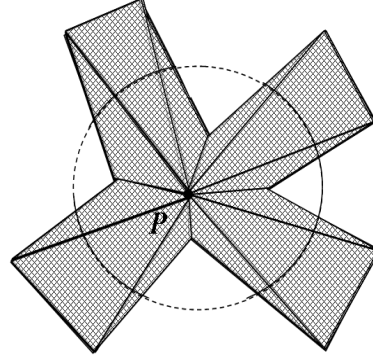


FIG. 3.2 – La décomposition simpliciale du volume du maillage M .

Le volume V peut être défini comme une union signée de tétraèdres, chaque tétraèdre étant défini par un triangle du maillage M et un point P fixé (cf. la figure 3.2). Supposons que les orientations des triangles sont consistantes, c'est-à-dire que le bord partagé, par chaque couple de triangles voisins, a deux directions différentes. Le tétraèdre est dit négatif si la normale du triangle est orientée du côté du point P et positif sinon.

Supposons que $\{H_k, k = 1, \dots, n\}$ dénote l'ensemble de tétraèdres signés. Nous divisons $\{H_k\}$ en deux sous-ensembles $\{H_i^+\}$ et $\{H_j^-\}$ correspondant à l'ensemble des tétraèdres positifs et à l'ensemble des tétraèdres négatifs respectivement. Le volume signé V borné par le maillage triangulaire M peut être représenté comme suit :

$$V = \left(\bigcup_i H_i^+ \right) - \left(\bigcup_j H_j^- \right) \quad (3.4)$$

Plus formellement, ceci signifie qu'un point est dans V si la somme des signes de tous les tétraèdres qu'il occupe est positive et en dehors de V sinon. Zhang et al. [107] ont montré que cette décomposition peut être utilisée pour calculer des moments volumiques globaux sur V comme somme signée de moments volumiques correspondants calculés sur chaque tétraèdre de cette décomposition volumique (cf. la section 2.2.2) :

$$\mathbf{moment}(V) = \sum_k \text{sign}(H_k) \times \mathbf{moment}(H_k). \quad (3.5)$$

Nous nous sommes inspirés de cette propriété pour calculer la transformée en harmoniques sphériques de la fonction indicatrice χ_r . Pour cela, nous allons montrer que l'intersection $M_r = V \cap S_r$ est une somme signée des triangles sphériques $\{T_k; k = 1, \dots, s_n\}$ induits par les intersections de S_r avec les tétraèdres de V . Donc, χ_r s'écrit comme suit :

$$\chi_r(\theta, \varphi) = \sum_k \text{sign}(T_k) \chi_{T_k}^r(\theta, \varphi) \quad (3.6)$$

où $\chi_{T_k}^r$ est la restriction de la fonction indicatrice χ_r sur le triangle sphérique T_k et $\text{sign}(T_k)$ est le même signe du tétraèdre dont T_k est issu. Nous allons voir que plusieurs triangles sphériques peuvent être issus d'un même tétraèdre. Ainsi les coefficients $c_{l,m}^r$ de la transformée en harmoniques sphériques de χ_r sont donnés par :

$$c_{l,m}^r = \sum_k \text{sign}(T_k) c_{l,m}^r|_{T_k} \quad (3.7)$$

où $c_{l,m}^r|_{T_k}$ sont les coefficients de la transformée en harmoniques sphériques de la fonction indicatrice partielle $\chi_{T_k}^r$ des triangles sphériques T_k , et sont calculés par :

$$c_{l,m}^r|_{T_k} = \int \int_{\mathbb{S}^2} \chi_{T_k}^r(\theta, \varphi) \overline{Y_l^m}(\theta, \varphi) \sin(\theta) d\theta d\varphi \quad (3.8)$$

Cette équation montre que la forme élémentaire pour le calcul des coefficients des harmoniques sphériques est le triangle sphérique. Donc, afin de calculer ces coefficients harmoniques de la fonction indicatrice χ_r , il est suffisant de calculer les coefficients correspondants de la fonction indicatrice $\chi_{T_k}^r$ pour chaque triangle sphérique T_k .

3.3 Intersection avec la sphère

La décomposition de M_r en une union signée des triangles sphériques est obtenue à partir de l'intersection de la sphère S_r avec l'ensemble des tétraèdres signés $\{H_k\}$. Étant donné un triangle ABC du maillage M , il y a quatre cas généraux pour l'intersection de S_r avec le tétraèdre $PABC$, rappelons que P est le centre de la sphère.

Dans le premier cas, les trois sommets A , B et C du triangle sont à l'intérieur de la sphère S_r . Alors, le tétraèdre $PABC$ n'a aucune contribution sur la

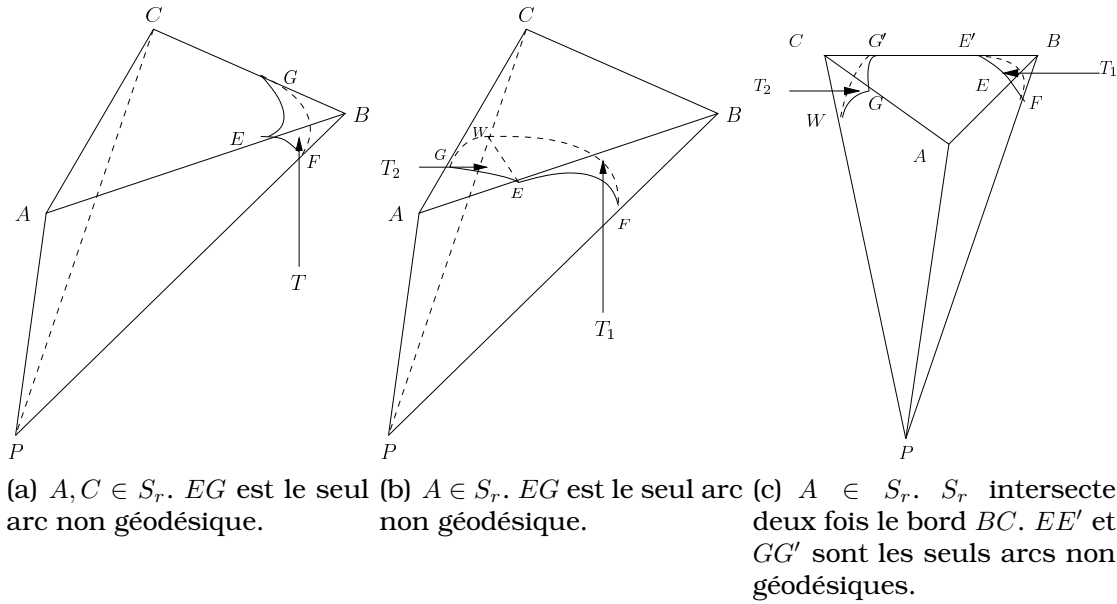


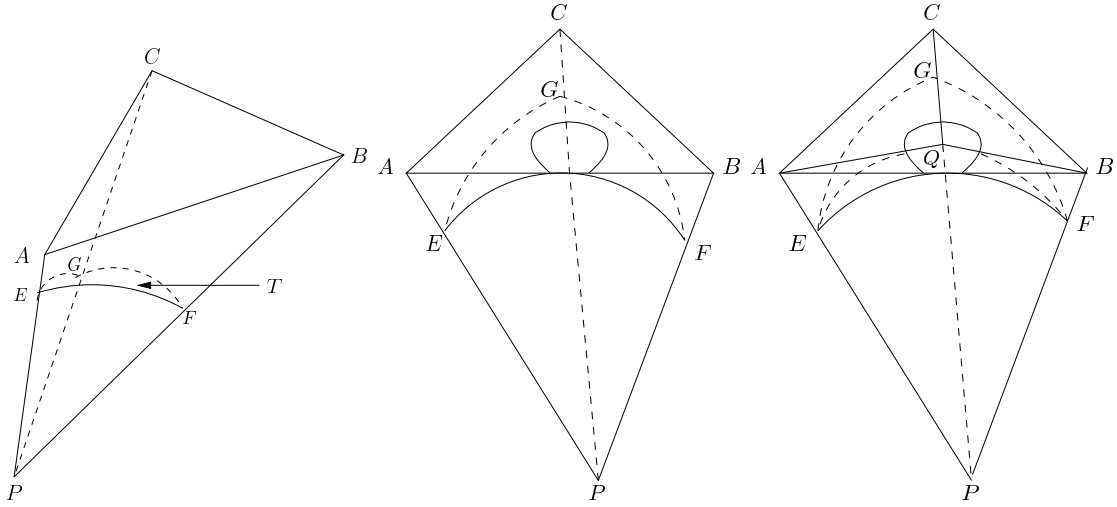
FIG. 3.3 – Les cas d'intersections de la sphère S_r et un tétraèdre $PABC$.

sphère S_r car il n'y a pas d'intersection avec la sphère S_r .

Dans le deuxième cas (cf. la figure 3.3(a)), un des trois sommets du triangle est à l'extérieur de la sphère S_r . Supposons que c'est le sommet B . L'intersection du tétraèdre $PABC$ avec la sphère S_r est un triangle sphérique EFG dont les trois sommets sont ceux de l'intersection entre S_r avec les bords \overline{AB} , \overline{PB} et \overline{CB} . Nous pouvons également noter que les arcs \widehat{EF} et \widehat{GF} sont géodésiques alors que l'arc \widehat{EG} ne l'est pas.

Dans le troisième cas, deux des trois sommets du triangle sont à l'extérieur de la sphère S_r . Supposons que ce sont les sommets C et B qui se trouvent en dehors de S_r . Donc S_r intersecte le tétraèdre $PABC$ soit en quatre points (cf. la figure 3.3(b)), soit en six points (cf. la figure 3.3(c)). Dans les deux situations nous pouvons voir l'intersection comme une union de deux triangles sphériques $T_1 \cup T_2$. Dans la situation de quatre points d'intersection, $T_1 = EFW$ et $T_2 = EWG$. Dans l'autre situation, $T_1 = EFE'$ et $T_2 = WGG'$. Dans les deux cas, il n'y a que deux arcs non géodésiques au maximum.

Dans le quatrième cas (cf. la figure 3.4(a)), les trois sommets A , B et C du triangle sont tous à l'extérieur de la sphère S_r . Donc S_r intersecte le tétraèdre $PABC$ en trois points E , F et G . Ces trois points forment un triangle sphérique T dont les trois arcs, \widehat{EF} , \widehat{FG} et \widehat{GE} , sont tous géodésiques. A cause de la concavité de la sphère S_r , une partie du triangle ABC pourrait être à l'intérieur



(a) $A, B, C \notin S_r$. Tous les arcs sont géodésiques. (b) $A, B, C \notin S_r$. Cependant ABC intersecte la sphère.

FIG. 3.4 – Les cas d'intersections de la sphère S_r et un tétraèdre $PABC$.

de S_r (cf. la figure 3.4(b)). Dans cette situation, le triangle sphérique T ne se trouve pas entièrement à l'intérieur du tétraèdre $PABC$. Pour traiter ce cas, considérons un point $Q \in ABC$ se trouvant à l'intérieur de la sphère S_r . Alors le tétraèdre $PABC$ peut être vu comme union de trois tétraèdres, $PABQ$, $PBCQ$ et $PCAQ$. Chacun de ces trois tétraèdres peut être traité comme décrit dans le deuxième cas (cf. les figures 3.3(b) et 3.3(c)). Nous pouvons également noter que ces trois tétraèdres produisent des triangles sphériques contenant au maximum un arc non géodésique pour chacun.

3.4 Les coefficients harmoniques d'un triangle sphérique

Dans cette section, nous décrivons le calcul des coefficients harmoniques d'un triangle sphérique T . La description est donnée en toute généralité pour un triangle sphérique quelconque. Nous verrons ensuite les éventuels cas particuliers.

Afin de trouver les coefficients $c_{l,m}^r|_T$ pour la fonction caractéristique χ_T^r , nous devons évaluer l'intégrale :

$$c_{l,m}^r|_T = \int \int_{S^2} \chi_T^r(\theta, \varphi) \overline{Y_l^m}(\theta, \varphi) \sin(\theta) d\theta d\varphi \quad (3.9)$$

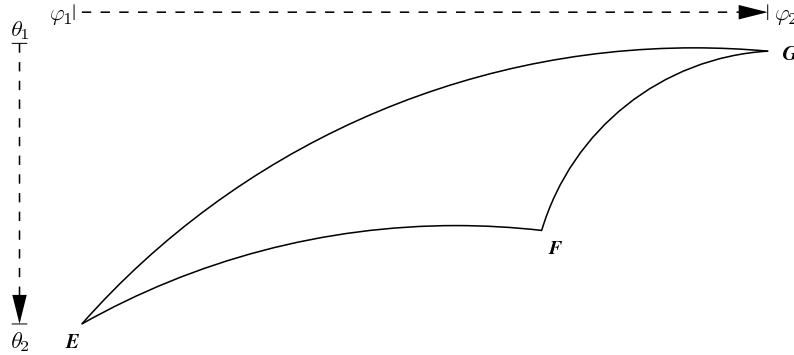


FIG. 3.5 – Paramétrisation du triangle sphériques.

où Y_l^m sont les harmoniques sphériques de degré l et d'ordre m , $l \geq 0$, $|m| \leq l$, $\theta \in [0 \ \pi]$ est l'angle polaire avec l'axe z et $\varphi \in [0 \ 2\pi[$ est l'angle azimutal avec l'axe x dans le plan xy (cf. la figure 2.3).

L'intégration réalisée dans l'équation 3.9 peut être ramenée de \mathbb{S}^2 au triangle sphérique T sur lequel la fonction indicatrice χ_T^r est non nulle. Ainsi $c_{l,m}^r|_T$ est réduit à :

$$\begin{aligned} c_{l,m}^r|_T &= \int \int_T \overline{Y}_l^m(\theta, \varphi) \sin(\theta) d\theta d\varphi \\ &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{\theta_1(\varphi)}^{\theta_2(\varphi)} \overline{Y}_l^m(\theta, \varphi) \sin(\theta) d\theta d\varphi \end{aligned} \quad (3.10)$$

θ et φ correspondent à une paramétrisation du triangle EFG (cf. la figure 3.5).

Bien que l'expression directe des harmoniques sphériques sur un triangle sphérique puisse paraître simple, les paquetages symboliques offerts par Matlab ou Mathematica n'offrent pas la possibilité de calculer l'intégration exprimée en équation 3.10 au delà de l'ordre $l = 24$. De plus, la relation entre θ et φ sur les frontières du domaine de l'intégration est non linéaire. Nous proposons donc une approche numérique générale, que nous décrivons plus tard dans la section 3.5.

3.4.1 Cas spéciaux

Dans cette sous-section, nous décrivons trois cas spéciaux de triangle sphérique. Dans le premier cas, le triangle sphérique traverse le grand demi-cercle $\varphi = 0$ (cf. la figure 3.6(a)). Dans ce cas, les limites de φ ne sont pas dans l'ordre correct si on intègre de $\varphi_1 = \min(\varphi)$ à $\varphi_2 = \max(\varphi)$. Pour résoudre ce

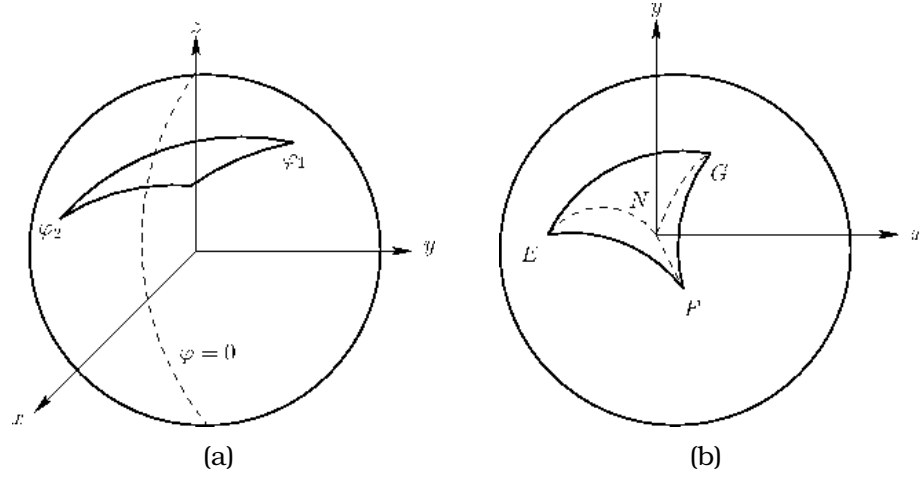


FIG. 3.6 – Deux cas spéciaux pour θ et φ . (a) Le triangle sphérique traverse le grand demi-cercle $\varphi = 0$. (b) Le triangle sphérique contient un des deux points de singularité sur la sphère, le pôle nord ou le pôle sud.

problème, nous inversons les limites de φ et intégrons comme suit :

$$c_{l,m}^r|_T = \int_{\varphi_2}^{2\pi} \int_{\theta_1(\varphi)}^{\theta_2(\varphi)} \bar{Y}_l^m(\theta, \varphi) \sin(\theta) d\theta d\varphi + \int_0^{\varphi_1} \int_{\theta_1(\varphi)}^{\theta_2(\varphi)} \bar{Y}_l^m(\theta, \varphi) \sin(\theta) d\theta d\varphi \quad (3.11)$$

Dans le deuxième cas, le triangle sphérique contient un des deux points de singularité sur la sphère, le pôle nord ou le pôle sud (θ correspond à 0 ou π respectivement). Les limites de θ peuvent mener à des résultats incorrects. Sans perte de généralité, considérons le triangle sphérique contenant le pôle nord N . Pour résoudre ce problème, nous divisons le triangle $T = EFG$ en trois triangles sphériques $T_1 = NEF$, $T_2 = NFG$ et $T_3 = NGE$ et puis nous calculons la somme des intégrations sur chacun de ces triangles sphériques individuellement (cf. la figure 3.6(b)).

Dans des cas rares, le triangle sphérique peut être dégénéré. Ce cas se produit lors de l'intersection de la sphère S_r avec un tétraèdre dégénéré dont les quatre sommets sont coplanaires, c'est-à-dire ayant un volume nul. Le triangle sphérique dans ce cas est réduit à un arc géodésique sur la sphère. Ainsi, l'intégration surfacique sur la sphère pour cet arc est 0 ($\theta_1(\varphi) = \theta_2(\varphi)$ dans l'équation 3.10). Ceci est cohérent avec le fait que ce tétraèdre n'a aucune contribution au volume du modèle.

3.5 Évaluation numérique et contrôle de l'erreur

Dans cette section, nous allons montrer comment il est possible d'évaluer les intégrations de coefficients des harmoniques sphériques présentées dans ce chapitre à l'aide de la méthode de Monte Carlo. Après un bref rappel de la stratégie de ces méthodes, nous présenterons ensuite leur utilisation pour évaluer les coefficients $c_{l,m}^r|_T$ sur le triangle sphérique T .

3.5.1 La méthode de Monte Carlo

Les méthodes de Monte Carlo tirent leur nom du fait qu'elles font appel à des nombres aléatoires pour résoudre un problème. Ce sont des méthodes de nature statistique, et elles constituent un outil mathématique très général, dont le champ d'application est très vaste. Les problèmes résolus sont, entre autres : intégration d'équation différentielle, inversion de matrice, transport de particules (tels que neutrons, électrons, photons), mécanique des fluides, mathématiques financières, etc. [10, 16]

Pour chaque application, ou suivant la nature du problème envisagé, la méthode de Monte Carlo employée a ses propres caractéristiques; le "seul" point commun entre elles est l'utilisation de nombres aléatoires pour décrire le caractère stochastique des phénomènes ou pour résoudre des problèmes plus complexes ne pouvant être traités directement de manière efficace (par exemple, intégration d'équation différentielle avec des conditions aux limites non-homogènes).

3.5.1.1 Méthode de Monte Carlo en 1D

Dans le cas 1D, supposons que l'intégrale à approcher par Monte Carlo est :

$$I = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} g(x) dx \quad (3.12)$$

en écrivant I sous la forme

$$I = (\alpha_2 - \alpha_1) \mathbb{E}(g(U)) \quad (3.13)$$

et en approchant $\mathbb{E}(g(U))$. Ici, U est une variable aléatoire suivant une distribution uniforme sur $]\alpha_1, \alpha_2[$ et $\mathbb{E}(g(U))$ représente l'espérance mathématique de

la variable aléatoire $g(U)$. Pour ce faire, on utilise la *loi des grands nombres* : si $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, indépendantes de U , et de distribution uniforme sur $] \alpha_1, \alpha_2[$ alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(U_i) = \mathbb{E}(g(U)) \quad (3.14)$$

En autres termes, si u_1, \dots, u_n sont des nombres tirés au hasard uniformément dans $] \alpha_1, \alpha_2[$, $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(u_i)$ est une approximation de $\frac{I}{(\alpha_2 - \alpha_1)}$. L'écart type σ est égale à :

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g^2(u_i) - I_n^2} \quad (3.15)$$

Algorithme 3.1 Évaluation par la méthode Monte Carlo en 1D.

ENTRÉE: g : fonction à intégrer sur $] \alpha_1, \alpha_2[$; n : nombre de tirages uniforme au hasard sur $] \alpha_1, \alpha_2[$;

SORTIES: $Q \approx \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} g dx$ et l'écart type σ

- 1: $i \leftarrow 1$;
 - 2: $S \leftarrow 0$;
 - 3: $T \leftarrow 0$;
 - 4: **tantque** $i \leq n$ **faire**
 - 5: $U(i) \leftarrow \alpha_1 + (\alpha_2 - \alpha_1) \text{rand}()$;
 - 6: $S \leftarrow S + g(U(i))$;
 - 7: $T \leftarrow T + g(U(i)) * g(U(i))$;
 - 8: **fin tantque**
 - 9: $M_1 \leftarrow S/n$;
 - 10: $M_2 \leftarrow T/n$;
 - 11: $Q \leftarrow (\alpha_2 - \alpha_1) * M_1$;
 - 12: $\sigma \leftarrow (M_2 - M_1 * M_1)^{\frac{1}{2}}$
 - 13: **Retourner** Q et σ
-

Algorithme 3.1 montre les étapes principales pour évaluer une intégration sur un domaine 1D. L'algorithme accepte comme paramètres les informations relatives à l'intégration ainsi que le nombre de tirages à évaluer par la méthode. Les sorties de l'algorithme sont une approximation de l'intégration et la tolérance de l'évaluation.

3.5.1.2 Méthode de Monte Carlo en 2D

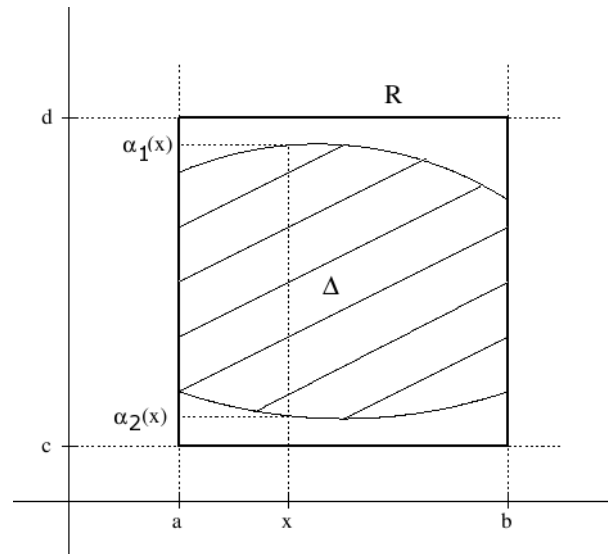


FIG. 3.7 – La méthode de Monte Carlo en 2D. Le domaine Δ est encadré par le domaine rectangulaire $R = [a, b] \times [c, d]$.

Supposons à présent que l'intégrale à approcher par Monte Carlo est

$$I = \int \int_{\Delta} f(x, y) dx dy \quad (3.16)$$

avec f fonction définie et continue sur Δ . Lorsque f est non bornée, on suppose que l'intégrale de f comme celle de f^2 existe. Le domaine d'intégration Δ , ouvert et borné, est défini ainsi :

$$\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, a < x < b, \alpha_1(x) < y < \alpha_2(x)\},$$

les fonctions $\alpha_1(x)$ et $\alpha_2(x)$ étant définies et continues sur $[a, b]$ à valeurs réelles. Comme illustré dans la figure 3.7, on plonge le domaine Δ dans le rectangle $R = [a, b] \times [c, d]$ avec

$$c \leq \min_{x \in [a, b]} \alpha_1(x)$$

et

$$d \leq \min_{x \in [a, b]} \alpha_2(x)$$

et on prolonge la fonction f par 0 sur le complémentaire de Δ dans R . Soit f^*

Algorithme 3.2 Évaluation par la méthode Monte Carlo en 2D.

ENTRÉE: f : fonction à intégrer sur Δ ; a, b : bornes de l'intervalle correspondant à la variable x ; α_1, α_2 : fonctions définies sur $[a, b]$ et intervenant dans la définition de Δ ; n : nombre de tirages uniforme au hasard sur $R = [a, b] \times [c, d]$;

SORTIES: $Q \approx \int \int_{\Delta} f dx dy$ et l'écart type σ

- 1: $c \leftarrow \min\{\alpha_1(x), a \leq x\}$;
- 2: $d \leftarrow \max\{\alpha_2(x), a \leq x\}$;
- 3: $i \leftarrow 1$;
- 4: $S \leftarrow 0$;
- 5: $T \leftarrow 0$;
- 6: **tantque** $i \leq n$ **faire**
- 7: $U(i) \leftarrow a + (b - a) \text{rand}()$;
- 8: $V(i) \leftarrow c + (d - c) \text{rand}()$;
- 9: $S \leftarrow S + f^*(U(i), V(i))$;
- 10: $T \leftarrow T + f^*(U(i), V(i)) * f^*(U(i), V(i))$;
- 11: **fin tantque**
- 12: $M_1 \leftarrow S/n$;
- 13: $M_2 \leftarrow T/n$;
- 14: $Q \leftarrow (b - a) * (d - c) * M_1$;
- 15: $\sigma \leftarrow (M_2 - M_1 * M_1)^{\frac{1}{2}}$
- 16: **Retourner** Q et σ

ce prolongement. Ainsi l'intégrale I peut-elle s'écrire :

$$I = \int \int_R f^*(x, y) dx dy = \text{aire}(R) \mathbb{E}(f^*(U)) \quad (3.17)$$

avec U variable aléatoire suivant une loi uniforme sur R et $\mathbb{E}(f^*(U))$ l'espérance mathématique de la variable aléatoire $f^*(U)$. L'analyse mathématique se poursuit comme suit, les n tirages uniformes étant faits sur le rectangle R . Alors

$$I_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f^*(u_i) \quad (3.18)$$

est, pour n assez grand, une bonne approximation de $\frac{I}{\text{aire}(R)}$. De la même

façon, l'écart type $\sigma = \sqrt{\text{Var}(f^*(U))}$ est approximé par :

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f^2(u_i) - I_n^2} \quad (3.19)$$

Algorithme 3.2 montre les étapes principales pour évaluer une intégration sur un domaine 2D. L'algorithme accepte comme paramètres les informations relatives à l'intégration ainsi que le nombre de tirages à évaluer par la méthode. Les sorties de l'algorithme sont une approximation de l'intégration et la tolérance associée à l'évaluation au sens de l'écart type σ . Nous avons modifié cet algorithme pour qu'il accepte la tolérance de l'évaluation comme paramètre au lieu du nombre de tirages. La sortie de l'algorithme se réduit dans ce cas à l'approximation de l'intégration. Du fait de cette modification, l'algorithme génère des tirages tant qu'il n'a pas encore atteint la tolérance souhaitée.

3.5.2 Évaluation sur le triangle sphérique

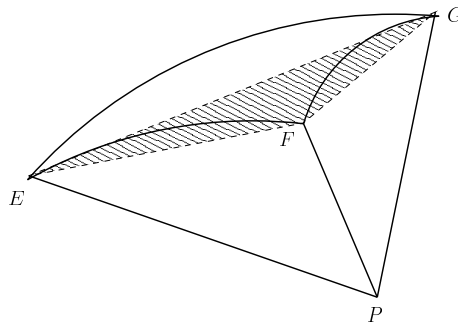


FIG. 3.8 – Un triangle sphérique et son triangle euclidien correspondant.

Nous allons montrer ici comment nous pouvons évaluer les coefficients $c_{l,m}^r|_T$ à l'aide de la méthode de Monte Carlo. Un triangle sphérique $T = EFG$ borné par des arcs géodésiques (et qui est plus petit que son complémentaire sur la sphère) peut être paramétré par le triangle euclidien partageant les mêmes sommets (cf. la figure 3.8). Par conséquent, la projection radiale du triangle sphérique T sur son triangle euclidien correspondant peut être utilisée comme paramétrisation de l'intégration sur le triangle sphérique T . La fonction que nous voulons intégrer est :

$$\chi_T^r(\theta, \varphi) \overline{Y_l^m}(\theta, \varphi) \sin(\theta) \quad (3.20)$$

où χ_T^r vaut 1 pour tous les points dans EFG et 0 autrement. En fait, chaque point q sur le triangle euclidien EFG peut être écrit comme suit :

$$q = \lambda_1 E + \lambda_2 F + (1 - \lambda_1 - \lambda_2)G \quad 0 \leq \lambda_1 \leq 1 \quad 0 \leq \lambda_2 \leq 1 \quad 0 \leq \lambda_1 + \lambda_2 \leq 1 \quad (3.21)$$

Nous pouvons paramétrer (θ, φ) par (λ_1, λ_2) en utilisant la conversion des coordonnées cartésiennes en coordonnées sphériques comme suit :

$$\theta_{\lambda_1, \lambda_2} = \arctan \frac{\sqrt{x_{\lambda_1, \lambda_2}^2 + y_{\lambda_1, \lambda_2}^2}}{z_{\lambda_1, \lambda_2}} \quad (3.22)$$

$$\varphi_{\lambda_1, \lambda_2} = \arctan \frac{y_{\lambda_1, \lambda_2}}{x_{\lambda_1, \lambda_2}} \quad (3.23)$$

Par conséquent, l'intégration sur un triangle sphérique borné par des arcs géodésiques devient :

$$c_{l,m}^r|_T = \int_0^1 \int_0^1 \chi(\theta_{\lambda_1, \lambda_2}, \varphi_{\lambda_1, \lambda_2}) \overline{Y}_l^m(\theta_{\lambda_1, \lambda_2}, \varphi_{\lambda_1, \lambda_2}) \sin(\theta_{\lambda_1, \lambda_2}) J \left(\frac{\partial(\theta_{\lambda_1, \lambda_2}, \varphi_{\lambda_1, \lambda_2})}{\partial(\lambda_1, \lambda_2)} \right) d\lambda_1 d\lambda_2 \quad (3.24)$$

où $J \left(\frac{\partial(\theta_{\lambda_1, \lambda_2}, \varphi_{\lambda_1, \lambda_2})}{\partial(\lambda_1, \lambda_2)} \right)$ est le jacobien de $(\theta_{\lambda_1, \lambda_2}, \varphi_{\lambda_1, \lambda_2})$ par rapport à (λ_1, λ_2) . L'équation 3.24 est évaluée en utilisant la méthode de Monte Carlo présentée dans la sous section précédente. Les exemples présentés dans cette partie ont été évalués en utilisant la méthode de Monte Carlo implantée dans la bibliothèque scientifique de GNU, GSL [2] avec 10^3 comme taille maximale de l'espace d'itération.

L'évaluation numérique a les avantages suivants :

- elle maintient implicitement la dépendance entre θ et φ ,
- elle peut calculer des coefficients harmoniques d'ordres élevés.

L'évaluation numérique décrite dans cette section peut traiter non seulement le cas où le triangle sphérique possède une frontière qui n'est pas géodésique (cf. les figures 3.3(a), 3.3(b) et 3.3(c)), mais aussi le triangle sphérique à qui manque une partie intérieure (cf. la figure 3.4(b)) sans le découper en plus petits triangles sphériques. En fait, la fonction à intégrer, dans l'équation 3.24, est évaluée à 0 pour les points qui ne se trouvent pas à l'intérieur du tétraèdre. Le test d'appartenance au tétraèdre est ce qui est fait par la fonction χ_T^r . Une vue d'ensemble de notre méthode est récapitulée par l'algorithme 3.3.

Algorithme 3.3 Une vue d'ensemble de notre méthode

ENTRÉE: Un maillage triangulaire M , une sphère S_r de rayon r et de centre P ;

SORTIES: $c_{l,m}^r$ et l'écart type σ

- 1: $T \leftarrow$ l'ensemble des triangles de M ;
- 2: $H \leftarrow$ l'ensemble des tétraèdres induits par P et T ;
- 3: $c_{l,m}^r \leftarrow 0$;
- 4: **pour tout** $h \in H$ **faire**
- 5: $\Gamma \leftarrow$ l'ensemble de triangles sphériques provenant de $h \cap S_r$, cf. les figures 3.3 et 3.4
- 6: **pour tout** $t \in \Gamma$ **faire**
- 7: $c_{l,m}^r \leftarrow c_{l,m}^r + \text{sign}(h) \times c_{l,m}^r|_t$,
- 8: \blacktriangleright où $c_{l,m}^r|_t$ décrit dans l'équation 3.24 et évalué par la méthode de Monte Carlo.
- 9: **fin pour**
- 10: **fin pour**
- 11: **Retourner** $c_{l,m}^r$ ainsi que l'écart type σ sur $c_{l,m}^r$

3.5.3 Une mesure de l'erreur

Nous avons présenté comment évaluer les coefficients des harmoniques sphériques à l'aide de la décomposition simpliciale du maillage. Cependant, pour des applications de filtrage, nous avons besoin de savoir le nombre de coefficients à calculer pour respecter une certaine erreur par rapport à la fonction de départ. Pour cela, nous avons introduit une mesure d'erreur ϵ entre la fonction indicatrice χ_r et son approximation $\tilde{\chi}_r$. La mesure de l'erreur ϵ est définie comme la distance L^∞ entre les deux fonctions sur les points d'échantillonnage p_i de la méthode de Monte Carlo sur la sphère S_r :

$$\epsilon = \max_{i=1}^n \|\chi_r(p_i) - \tilde{\chi}_r(p_i)\| \quad (3.25)$$

$$\epsilon = \max_{i=1}^n \left\| \chi_r(\theta_i, \varphi_i) - \sum_{l=0}^{\beta} \sum_{m=-l}^l c_{l,m}^r Y_l^m(\theta_i, \varphi_i) \right\| \quad (3.26)$$

où (θ_i, φ_i) sont les coordonnées sphériques de point p_i sur la sphère S_r . Nous pouvons considérer cette mesure de l'erreur comme une fonction de la bande passante β . Quand la bande passante β augmente, la mesure de l'erreur ϵ diminue. De ce fait, la tolérance de l'évaluation des coefficients doit être raisonnable par rapport à l'ordre de la mesure de l'erreur souhaitée ϵ .

3.6 Résultats

Nous illustrons ici l'utilisation de notre méthode de calcul pour calculer la transformée en harmoniques sphériques d'un ensemble de tranches sphériques d'objets 3D. Nous pouvons utiliser la transformée en harmoniques sphériques pour l'ensemble des fonctions χ_r sur les maillages 3D dans plusieurs applications. Soit N le nombre de sphères utilisées. La figure 3.9 montre la représentation des modèles 3D par un ensemble de coefficients des harmoniques sphériques et N sphères. Les objets sont visualisés de la façon suivante : on fait un échantillonnage régulier de la sphère avec des points P_i , on calcule la valeur $\tilde{\chi}_r(P_i)$ pour tout i . Si $\tilde{\chi}_r(P_i) = 0$ alors le point n'est pas affiché sinon on l'affiche. Dans les groupes des figures (3.9(a), 3.9(b), 3.9(c)), (3.9(d), 3.9(e), 3.9(f)) et (3.9(f), 3.9(h), 3.9(i)), l'échelle de l'erreur ϵ est fixée à 0.005, 0.002 et 0.001 respectivement. L'échelle de l'erreur est prise comme le taux entre ϵ et la diagonale de la boîte englobante du maillage. La valeur maximale de β correspondante sur l'ensemble des sphères est 32, 130 et 200 respectivement. La tolérance de l'évaluation des coefficients des harmoniques sphériques est fixée dans ces exemples à 95%. En fait, la qualité de cette représentation dépend du nombre de sphères utilisées et de la largeur du spectre calculé et du nombre de points utilisés dans la méthode de Monte Carlo pour évaluer les coefficients des harmoniques sphériques. Cependant, la présence de la discrétisation dans le rayon r fait que cette représentation est visuellement un peu loin d'être une représentation alternative des modèles 3D. Par contre, cet ensemble de fonction χ_r est considéré comme un bon candidat pour la reconnaissance de forme 3D.

Le but de la reconnaissance de formes 3D est de trouver une représentation numérique des formes pour lesquelles un index peut être construit (cf. la figure 3.10). A l'inverse des données textuelles ou alphanumériques, les objets 3D ne sont pas décrits par un alphabet et ne peuvent être répertoriés dans un dictionnaire. Il faut donc décrire ces objets tridimensionnels à l'aide de descripteurs de bas niveau comme la forme ou de haut niveau comme le contexte. Un descripteur doit idéalement avoir les propriétés suivantes :

- facile à indexer ;
- rapide à calculer ;
- de faible volume de stockage ;
- invariant par similarité (translation, symétrie, rotation, homothétie...);

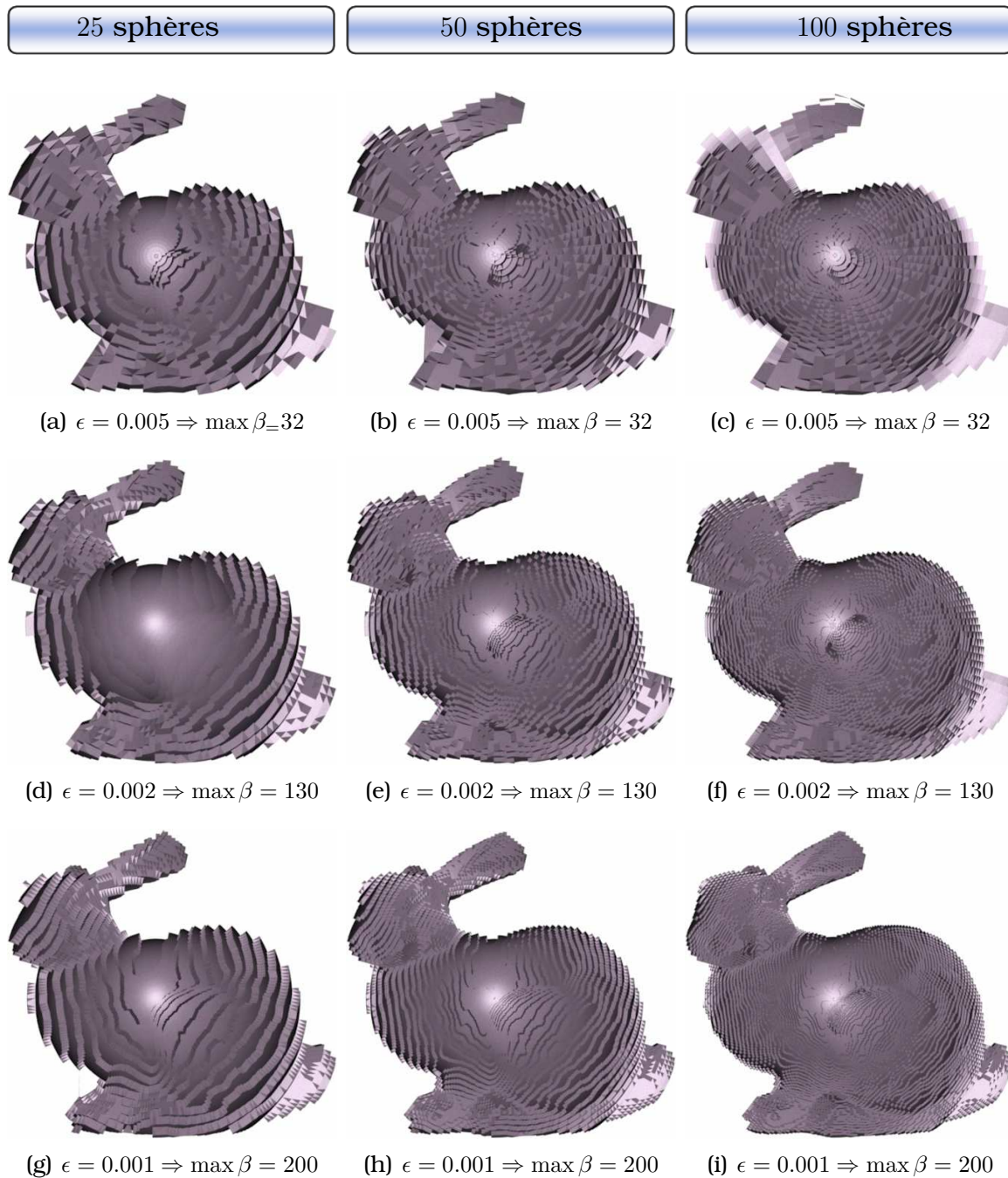


FIG. 3.9 – La représentation du modèle de Bunny en utilisant les harmoniques sphériques et un ensemble de sphères. Le nombre de sphères utilisées est 25, 50, 100. Dans les groupes des figures (a, b, c), (d, e, f) et (g, h, i), l'échelle de l'erreur ϵ est fixée à 0.005, 0.002 et 0.001 respectivement. L'échelle de l'erreur est prise comme le taux entre ϵ et la diagonale de la boîte englobante du maillage. La valeur maximale de β correspondante sur l'ensemble des sphères est 32, 130 et 200 respectivement.

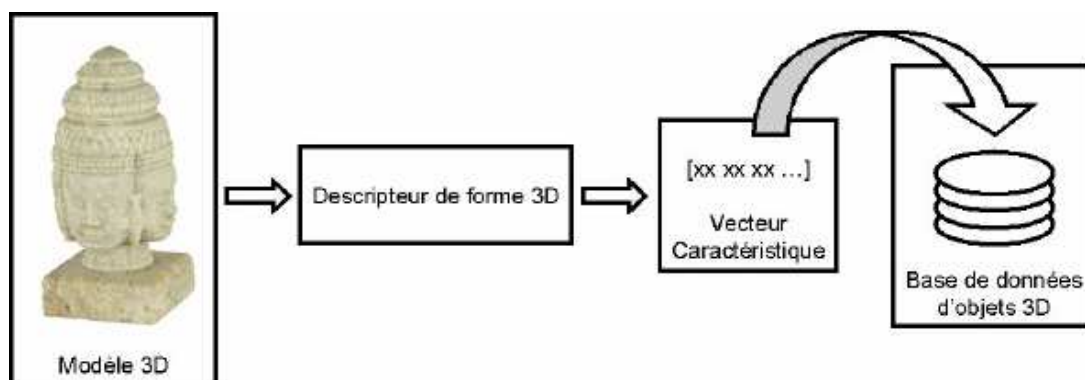


FIG. 3.10 – L’indexation 3D consiste à coder de manière compacte l’information relative à un modèle 3D afin d’optimiser les recherches dans les bases de données d’objets 3D. (image extraite de [98])

- insensible au bruit et aux caractéristiques petites et/ou superflues ;
- indépendant de la représentation 3D ;
- robuste aux dégénérescences topologiques ;
- capable d’opérer avec des niveaux de résolution différents.

Les approches basées sur les histogrammes de courbure [105] ou les EGI (Extended Gaussian Images) [41, 45] décrivent de manière très locale la géométrie des objets et de ce fait sont très sensibles aux modifications du maillage (bruit sur la position des sommets, décimation, etc.). Inversement les approches globales basées sur les distributions de forme [71] décrivent la forme des objets 3D de manière trop imprécise pour être des outils de recherche pertinents. Le lecteur intéressé par un état de l’art exhaustif peut se référer à [106].

Les harmoniques sphériques apparaissent comme une solution très prometteuse. L’idée est de décomposer les modèle 3D en une série des fonctions χ_r définies sur des sphères concentriques et d’éliminer la phase (l’information liée à l’orientation de l’objet) en utilisant les harmoniques sphériques pour chacune de ces fonctions. C’est-à-dire, chaque fonction χ_r est décrite par sa quantité d’énergie qu’elle contient aux différentes fréquences. Puisque cette quantité ne change pas quand la fonction est tournée autour de l’origine, ce descripteur est invariable à la rotation.

Par la restriction de la décomposition en harmoniques sphériques à l’ensemble des harmoniques sphériques ayant la fréquence l , on obtient un sous espace V_l :

$$V_l = \text{Span}(V_l^{-l}, V_l^{-l+1}, \dots, V_l^{l-1}, V_l^l) \quad (3.27)$$

- V_l est la représentation du groupe de rotation. C'est-à-dire, pour chaque fonction $f \in V_l$ et chaque rotation \mathfrak{R} , $\mathfrak{R}(f) \in V_l$.
- V_l est irréductible. C'est-à-dire, on ne peut pas trouver V_l' et V_l'' tel que $V_l = V_l' \oplus V_l''$ où V_l' et V_l'' sont aussi deux représentations du groupe de rotation.

Le premier point présente une manière pour décomposer les fonctions sphériques en des composants invariables à la rotation. Alors que le deuxième point garantit que cette décomposition est optimale.

Les énergies de la fonction sphérique χ_r sont représentées par :

$$\mathbf{Energie}(\chi_r) = \{\|\gamma_r^0\|, \|\gamma_r^1\|, \dots\} \quad (3.28)$$

où γ_r^l sont les composants fréquentiels de χ_r :

$$\gamma_r^l(\theta, \varphi) = \sum_{m=-l}^{m=l} c_{l,m}^r Y_l^m(\theta, \varphi) \quad (3.29)$$

Donc, le descripteur de forme d'un objet 3D est donné en terme des harmoniques sphériques et N sphères par :

$$\begin{bmatrix} \|\gamma_{r_1}^0\| & \|\gamma_{r_1}^1\| & \dots & \|\gamma_{r_1}^\beta\| \\ \|\gamma_{r_2}^0\| & \|\gamma_{r_2}^1\| & \dots & \|\gamma_{r_2}^\beta\| \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \|\gamma_{r_N}^0\| & \|\gamma_{r_N}^1\| & \dots & \|\gamma_{r_N}^\beta\| \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

Maintenant, nous allons montrer la liste de comparaisons entre quelques modèles 3D. Le tableau 3.1 montre la comparaison entre quelques modèles 3D ainsi que leurs versions simplifiées et pivotées autour des axes par des angles aléatoires. Ces chiffres sont obtenus en calculant la distance euclidienne \mathbb{L}^2 entre les descripteurs de formes 3D. La comparaison montre que le descripteur de forme par les harmoniques sphériques ne perd pas son efficacité quand l'orientation du modèle ou le nombre de points change. Par contre ce descripteur de forme n'est pas bijectif. C'est-à-dire, nous pouvons trouver deux objets différents ayant le même descripteur de forme (cf. la figure 3.11).

En fait, l'utilisation des harmoniques sphériques dans l'application de reconnaissance de forme 3D est déjà existe [28]. Par contre, l'évaluation des coefficients des harmoniques sphériques est faite par une voxelisation préa-

| Modèle \ Modèle | Bunny | Bunny1 | Dragon | Dragon1 | Buddha | Buddha1 |
|-----------------|-------|--------|--------|---------|--------|---------|
| Bunny | 0.000 | 0.036 | 0.318 | 0.320 | 0.496 | 0.502 |
| Bunny1 | 0.036 | 0.000 | 0.329 | 0.331 | 0.504 | 0.509 |
| Dragon | 0.318 | 0.329 | 0.000 | 0.013 | 0.461 | 0.467 |
| Dragon1 | 0.320 | 0.331 | 0.013 | 0.000 | 0.458 | 0.464 |
| Buddha | 0.496 | 0.504 | 0.461 | 0.458 | 0.000 | 0.022 |
| Buddha1 | 0.502 | 0.509 | 0.467 | 0.464 | 0.022 | 0.000 |

TAB. 3.1 – La liste de comparaisons entre quelques modèles 3D. Les modèle Bunny1 (948 facettes), Dragon1 (11102 facettes) et Buddha1 (15536 facettes) sont des versions simplifiées des modèles de Bunny (69451 facettes), Dragon (871414 facettes) et Buddha (1087716 facettes) respectivement. Tous les modèles simplifiés sont ensuite subis des rotation d'angles aléatoires.

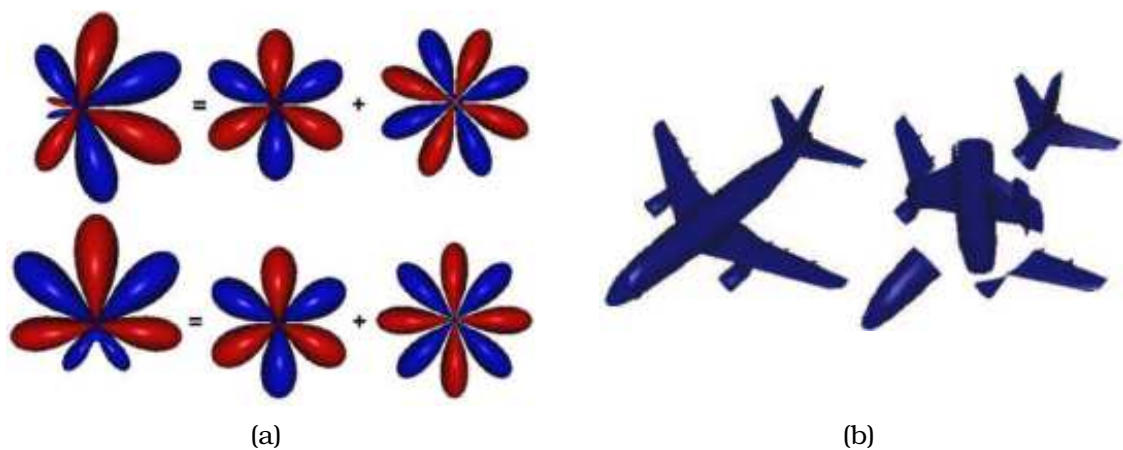


FIG. 3.11 – Le descripteur de forme est invariable à la rotation mais n'est pas bijectif. (a) La fonction sphérique (en bas) est créée en tournant un des composants de la fonction sphérique au dessus. Les deux fonctions ont le même descripteur de forme. (b) L'objet à droite est obtenu en tournant la partie intérieure de l'objet à gauche. Le deux objets ont le même descripteur de forme.

table de l'objets 3D.

Chapitre 4

Représentation de maillages étoilés par les harmoniques sphériques

Sommaire

| | |
|--|-----------|
| 4.1 La fonction sphérique et sa décomposition angulaire | 62 |
| 4.2 Calcul de la THS décomposée sur les triangles | 64 |
| 4.2.1 Orientation et position du triangle par rapport au centre | 66 |
| 4.2.2 Choix optimal de la sphère | 67 |
| 4.3 Extension du calcul de la THS sur les arêtes | 69 |
| 4.3.1 Motivation | 69 |
| 4.3.2 La théorie du Curl | 70 |
| 4.3.3 Le calcul des HSs | 72 |
| 4.4 Évaluation numérique | 77 |

Dans le chapitre précédent, nous avons montré comment nous pouvons distribuer le calcul de la transformée en harmoniques sphériques de la fonction indicatrice, d'une tranche sphérique d'un volume délimité par un maillage, directement sur les triangles composant ce maillage. Le calcul consiste à évaluer une somme signée d'harmoniques sphériques calculés à partir d'un ensemble de triangles sphériques correspondant à une décomposition de la tranche sphérique. Dans ce chapitre, nous allons plutôt nous intéresser au moyen de paramétriser les maillages 3D par des fonctions sphériques fréquentielles. Dans un premier temps, nous allons spécifiquement nous intéresser

aux maillages étoilés par rapport à un point puisque tels maillages comportent une paramétrisation sphérique naturelle. Nous présenterons un algorithme rapide et précis pour calculer directement la décomposition en harmoniques sphériques de la paramétrisation sphérique d'un tel maillage. Les calculs seront effectués dans un premier temps sur les triangles puis nous montrerions comment aller plus loin dans le calcul par effectuer la décomposition des calculs sur les arêtes du maillage seulement et non plus sur les triangles du maillage.

4.1 La fonction sphérique et sa décomposition angulaire

Soit M un maillage étoilé par rapport à un point P . Ce maillage comporte une paramétrisation sphérique naturelle par rapport au point P (cf. la figure 4.1(a)). Cette paramétrisation est simplement la projection du maillage M sur

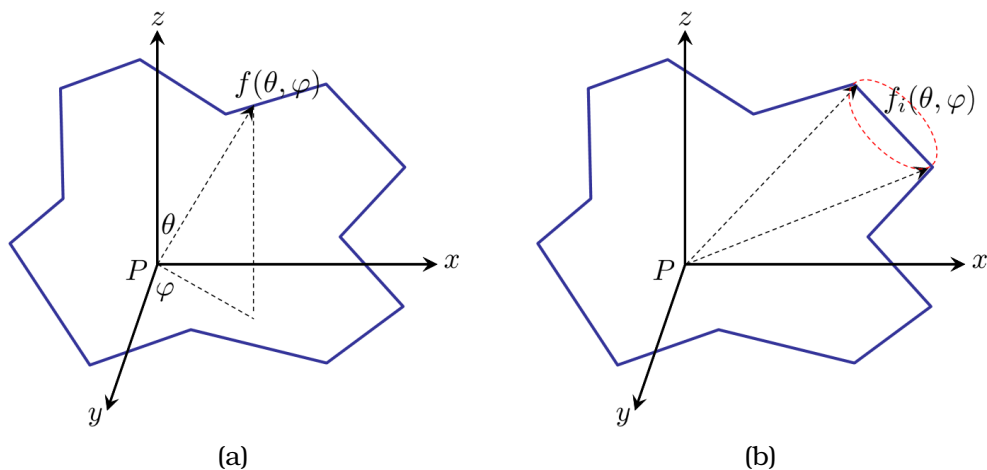


FIG. 4.1 – Un maillage étoilé par rapport à un point P comporte une paramétrisation sphérique naturelle par rapport à P . (a) La fonction sphérique définissant le maillage étoilé. (b) La décomposition angulaire de cette fonction sphérique en des fonctions partielles.

la sphère \mathbb{S}^2 . Considérons le point P comme centre du système des coordonnées sphériques. La fonction sphérique f mesure la distance radiale du point P au point d'intersection p entre le rayon (θ, φ) issu de P et la surface de M .

Donc, la fonction $f : \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^+$ peut être écrite simplement par suit :

$$f(\theta, \varphi) = \|\overline{pP}\| \quad (4.1)$$

(θ, φ) sont les coordonnées angulaires de p . De la même manière que la fonction f a été définie, on peut définir la fonction f_i permettant de paramétrer le triangle $T_i \in T$ du maillage M (cf. la figure 4.1(b)). C'est-à-dire que chaque fonction f_i est égale à la valeur de f pour tous les points appartenant au triangle $T_i \in T$ et à zéro sinon :

$$f_i(\theta, \varphi) = \chi_i(\theta, \varphi)f(\theta, \varphi) \quad (4.2)$$

où χ_i est la fonction indicatrice du triangle T_i .

Les projections des triangles T_i sur la sphère \mathbb{S}^2 peuvent être considérées comme partitionnement du domaine de définition de la fonction sphérique f . En conséquence, la fonction sphérique f peut être décomposée sur ces sous domaines comme suit :

$$\begin{aligned} f(\theta, \varphi) &= \sum_{T_i \in T} \chi_i(\theta, \varphi)f(\theta, \varphi) \\ &= \sum_{T_i \in T} f_i(\theta, \varphi) \end{aligned} \quad (4.3)$$

L'expansion de chaque fonction $f_i(\theta, \varphi)$ en harmoniques sphériques est donnée par :

$$f_i(\theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l c_{l,m}^i Y_l^m(\theta, \varphi) \quad (4.4)$$

Par conséquent, l'expansion de la fonction sphérique f peut être réécrite comme suit :

$$\begin{aligned} f(\theta, \varphi) &= \sum_{T_i \in T} \left(\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l c_{l,m}^i Y_l^m(\theta, \varphi) \right) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left(\sum_{T_i \in T} c_{l,m}^i \right) Y_l^m(\theta, \varphi) \end{aligned} \quad (4.5)$$

Si on désigne par $c_{l,m}$ les coefficients de la décomposition en harmoniques sphériques de la fonction f :

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l c_{l,m} Y_l^m(\theta, \varphi) \quad (4.6)$$

On obtient donc :

$$c_{l,m} = \sum_{T_i \in \mathcal{T}} c_{l,m}^i \quad (4.7)$$

Chaque coefficient $c_{l,m}$ de la transformée en harmoniques sphériques de la fonction f est égal à la somme des coefficients correspondants $c_{l,m}^i$ dans la transformée en harmoniques sphériques des fonctions f_i . Chaque coefficient $c_{l,m}^i$ est calculé par :

$$c_{l,m}^i = \int \int_{T_i} f_i(\theta, \varphi) \overline{Y_l^m}(\theta, \varphi) \sin(\theta) d\theta d\varphi \quad (4.8)$$

La dernière équation évalue les coefficients $c_{l,m}^i$ comme intégration surfacique sur le triangle T_i . Dans les sections suivantes, nous allons montrer comment nous pouvons évaluer ces coefficients afin d'obtenir une représentation fréquentielle d'objets étoilés par un ensemble de coefficients des harmoniques sphériques.

4.2 Calcul de la THS décomposée sur les triangles

Les coefficients des harmoniques sphériques dans l'expansion de la fonction sphérique f_i est exprimés comme une double intégration sur le triangle T_i (cf. l'équation 4.8). Les calculs symboliques induits par ces intégrations ne sont pas capables d'aboutir à des résultats exacts. Ceci est dû à la difficulté d'intégration des expressions analytiques des harmoniques sphériques. De plus, nous n'avons pas de forme analytique pour la fonction f . Pareillement à la section 3.5, nous proposons évaluer ces coefficients à l'aide de la méthode de Monte Carlo. Dans ce cas, le domaine de l'évaluation est les triangles sphériques issus de la projection des triangles du maillage sur la sphère. Pour automatiser le choix de la bande passante, nous pouvons réutiliser la mesure de l'erreur présentée dans la section 3.5.3 :

$$\epsilon = \max_{i=1}^n \|f(v_i) - \tilde{f}(v_i)\| \quad (4.9)$$

où $\{v_i\}_{i=1}^n$ sont les sommets du maillage et \tilde{f} est l'approximation de la fonction f utilisant la bande passante β . La figure 4.2 montre la représentation d'un objet étoilé à différents niveaux de détails en utilisant les harmoniques sphé-

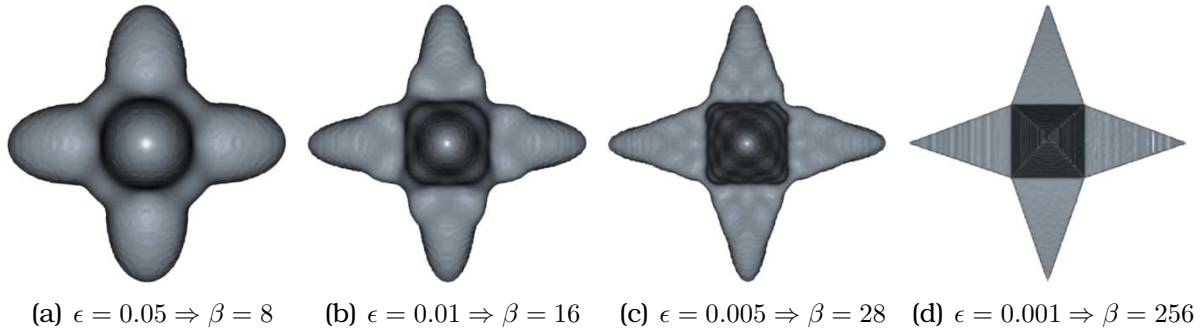


FIG. 4.2 – La représentation d'un objet étoilé à différents niveaux de détails utilisant les harmoniques sphériques.

riques. Ces représentations sont obtenues par évaluation des coefficients des harmoniques sphériques par la méthode de Monte Carlo sur les triangles T_i composant le maillage. La tolérance de l'évaluation de chaque coefficient est fixée à 95%.

Limitant le calcul des coefficients des harmoniques sphériques au niveau d'un triangle, la bande passante satisfaisant une précision géométrique donnée dépend des deux facteurs suivants :

- La position du triangle par rapport à P (cf. la figure 4.3(a)),
- L'angle de l'orientation du triangle par rapport à P (cf. la figure 4.3(b)).

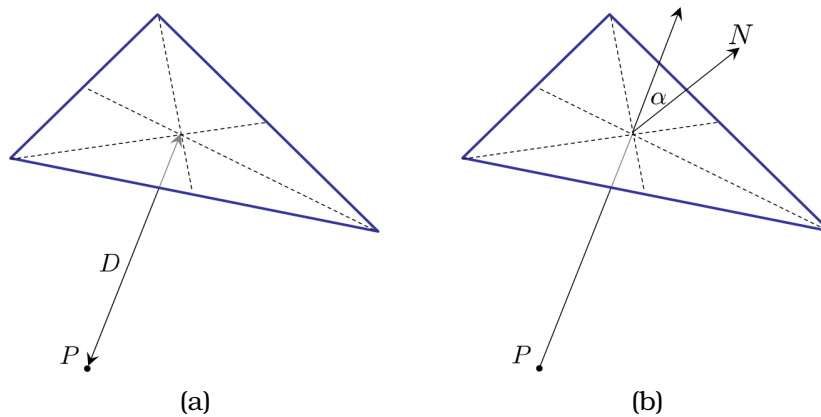


FIG. 4.3 – L'orientation et la position du triangle par rapport à P . (a) La position d'un triangle est mesurée par la distance D entre le centroïde de ce triangle et le point P . (b) L'orientation est mesurée par l'angle α suspendu entre la normale de triangle et la droite connectant P et le centroïde de ce triangle.

Dans la sous section suivante, nous expliquons ces deux facteurs et leur influence sur la bande passante β .

4.2.1 Orientation et position du triangle par rapport au centre

L'évaluation des coefficients $c_{l,m}^i$ de la transformée en harmoniques sphériques de la fonction f_i est effectués sur le triangle sphérique correspondant au secteur de projection du triangle T_i sur la sphère. La taille de ce secteur dépend de la position du triangle T_i par rapport à P . Elle dépend également de l'orientation de T_i par rapport à P .

La position du triangle par rapport au point P . La position du triangle par rapport au point P est mesurée par la distance D entre le centroïde³ du triangle et le points P . En effet, quand cette distance augmente, la taille du secteur de projection du triangle diminue.

Orientation de triangle par rapport au point P . L'orientation d'un triangle par rapport au point P est mesurée par l'angle α entre la normale du triangle et la droite connectant le centroïde de ce triangle et P . Quand cet angle d'orientation augmente, la taille du secteur de projection du triangle sur la sphère diminue.

Pour garder la même précision géométrique, nous devons compenser la distorsion dû au décroissement du secteur de projection sur la sphère. La figure 4.4 montre l'influence de la position et l'orientation d'un triangle sur la bande passante satisfaisant une précision géométrique donnée. Nous commençons par un triangle ayant une distance initiale D et un angle d'orientation $\alpha = 0$. Nous avons fixé α et augmenté D (la courbe bleue). Nous avons ensuite fixé D et augmenté α (la courbe rouge). Nous pouvons également noter que l'angle d'orientation a plus d'influence sur la bande passante que la distance du centre de la sphère P .

Le bon choix de la sphère de projection garantit une bonne orientation des triangles par rapport au centre de la sphère. Dans la sous section suivante, nous proposons une méthode qui nous permet de bien choisir le centre de sphère de projection pour que les triangle du maillage soient bien orientés par rapport au centre de sphère.

³Le centroïde d'un triangle est l'intersection des trois bissectrices de ce triangle.

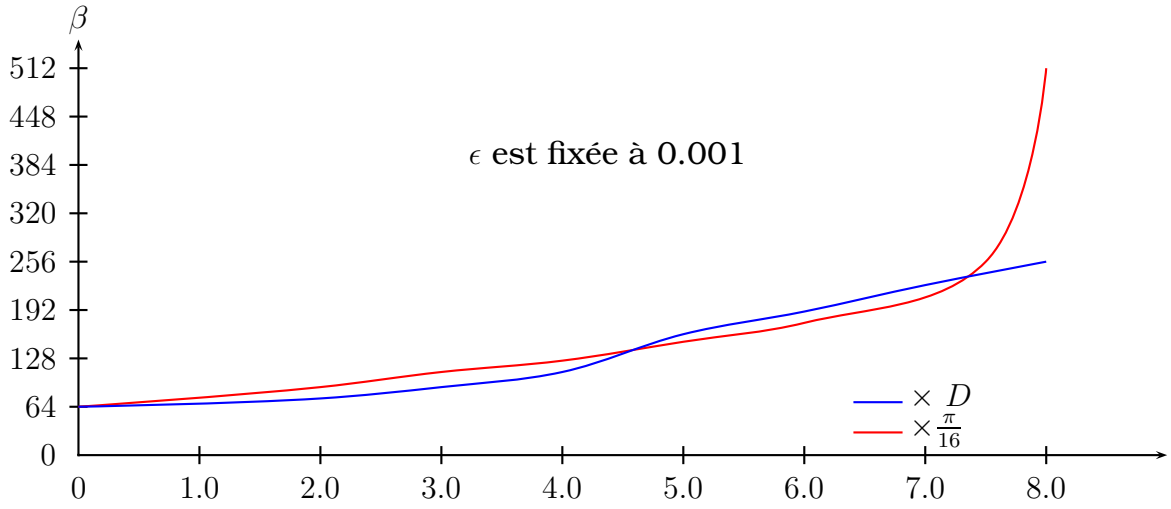


FIG. 4.4 – L'influence du positionnement et l'orientation d'un triangle sur la bande passante satisfaisant une précision géométrique donnée. L'angle d'orientation a plus d'influence sur la bande passante que la distance de l'origine P .

4.2.2 Choix optimal de la sphère

Dans la sous section précédente, nous avons montré que la précision géométrique de la décomposition en harmoniques sphériques de la fonction f_i dépend de deux facteurs relatifs au centre. Le problème est qu'un centre ne sera jamais bon pour tous les triangles. Dans cette sous section, nous optimisons la position du centre pour qu'il approxime le mieux l'ensemble de sommets au sens des moindres carré.

Une sphère est caractérisée par son centre (x_0, y_0, z_0) et son rayon r_0 . Tous les points $p = (x, y, z)$ sur la sphère satisfont l'équation :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r_0^2 \quad (4.10)$$

Étant donné un ensemble de point $\{p_i\}_{i=1}^n$, nous cherchons la sphère qui approxime bien l'ensemble de points. L'équation générale de la sphère nous permet de définir une fonction de minimisation ψ comme suit :

$$\psi(p_i) = r_i^2 - r_0^2 = (x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2 + (z_i - z_0)^2 - r_0^2 \quad 1 \leq i \leq n \quad (4.11)$$

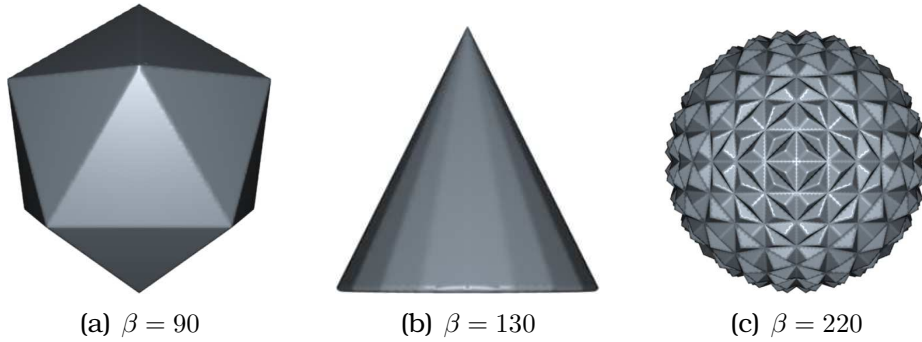


FIG. 4.5 – Quelques exemples de maillages étoilés représentés par les harmoniques sphériques avec une précision géométrique $\epsilon = 0.001$. Les centres des sphères sont choisis de façon adaptée à la géométrie des sommets des maillages.

Ainsi

$$\psi(p_i) = -2(x_i x_0 + y_i y_0 + z_i z_0) + (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - r_0^2) + (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) \quad 1 \leq i \leq n \quad (4.12)$$

La fonction de minimisation ψ est un polynôme quadratique dans les inconnues x_0 , y_0 , z_0 et r_0 . Pour linéariser cette expression, nous introduisons la quantité $\rho = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - r_0^2$. La fonction de minimisation ψ est donc :

$$\psi(p_i) = -2(x_i x_0 + y_i y_0 + z_i z_0) + \rho + (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) \quad 1 \leq i \leq n \quad (4.13)$$

La minimisation de la fonction ψ peut être mise sous la forme matricielle $AX = B$ où les variables A , X et B sont définies comme suit :

$$A = \begin{bmatrix} 2x_1 & 2y_1 & 2z_1 & -1 \\ 2x_2 & 2y_2 & 2z_2 & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2x_n & 2y_n & 2z_n & -1 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ \rho \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 \\ x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 \\ \dots \\ x_n^2 + y_n^2 + z_n^2 \end{bmatrix}$$

Les inconnues de ce système d'équations sont x_0 , y_0 , z_0 et ρ . Nous avons résolu ce système d'équation linéaire par la méthode des moindres carrés. A partir des valeurs de x_0 , y_0 , z_0 et ρ , nous pouvons calculer facilement la valeur de r_0 . Cela nous permet de choisir le centre de la sphère de façon adaptée à la géométrie des sommets du maillage. La figure 4.5 montre des exemples des objets étoilés représentés par les harmoniques sphériques. Le centre de la sphère est adaptivement choisi pour que les triangles du maillages soient bien

orientés par rapport au centre de la sphère.

4.3 Extension du calcul de la THS sur les arêtes

Dans la section précédente, nous avons montré comment évaluer les coefficients $c_{l,m}^i$ par une intégration 2D sur le triangle T_i . Nous avons ensuite montré comment choisir un centre d'étoilement globalement le plus adapté à la géométrie des sommets du maillage et à l'orientation des triangles du maillage. Dans cette section, nous montrons comment aller plus loin dans le calcul des coefficients $c_{l,m}^i$. Nous allons montrer que l'évaluation de ces coefficients peut être effectuée par des intégrations 1D sur les bords du triangle T_i . Pour ce faire, nous exploitons le théorème de Curl (cf. la section 4.3.2).

4.3.1 Motivation

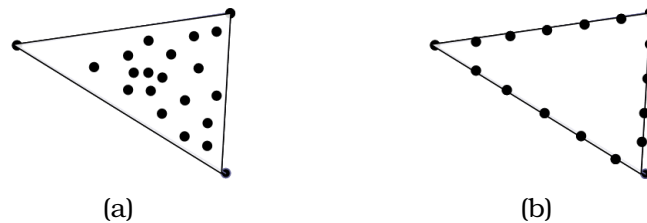


FIG. 4.6 – L'évaluation de Monte Carlo sur les triangles (a) et sur ses arêtes (b).

Comme expliqué dans la section 3.5.1, l'évaluation numérique des intégrales sur les triangles est effectuée par génération de points aléatoires sur des triangles sphériques (cf. la figure 4.6(a)). Pour avoir une évaluation suffisamment précise, la méthode d'évaluation numérique doit générer assez de points aléatoires. De plus, ces points doivent être distribués uniformément sur le triangle. L'évaluation des coefficients $c_{l,m}^i$ par des intégrations sur les arêtes du maillage réduit la dimensionnalité du problème à des intégrations 1D sur des arcs géodésiques de la sphère. Sur ces arcs géodésiques, la méthode d'évaluation numérique générera un nombre de points beaucoup moins pour obtenir une certaine densité de points qu'elle n'en générera sur un triangle (cf. la figure 4.6(b)). De plus, la génération de points uniformément distribués sur

des arêtes est directe à l'aide de l'équation paramétrique de l'arête :

$$p = v_i + \lambda(v_j - v_i) \quad \lambda \in [0 \ 1] \quad (4.14)$$

où v_i et v_j sont les deux extrémités de l'arête $\overline{v_i v_j}$.

Pour réduire l'évaluation des coefficients des harmoniques sphériques à des intégration sur les bords des triangles, nous nous appuyons sur la théorie du Curl dont le résumé est présenté dans la sous section suivante. Nous allons ensuite montrer comment adapter les intégrations correspondant aux coefficients des harmoniques sphériques pour qu'on puisse appliquer la théorie du Curl.

4.3.2 La théorie du Curl

Dans le calcul vectoriel, le Curl est un opérateur qui mesure la quantité de rotation d'un champ vectoriel ainsi que la direction de cette rotation. Le Curl d'un vecteur \mathbf{F} est défini comme la limite du rapport entre l'intégrale surfacique du produit vectoriel de \mathbf{F} avec la normale \mathbf{n} d'une surface fermée S , et le volume V borné par cette surface quand le volume tend vers zéro :

$$\text{Curl}(\mathbf{F}) = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_S \mathbf{n} \times \mathbf{F} dS$$

En mathématiques le Curl est noté par : $\text{Curl}(\mathbf{F}) = \nabla \times \mathbf{F}$. C'est-à-dire qu'il peut être exprimé comme le produit vectoriel entre l'opérateur de gradient et le champ \mathbf{F} .

Théorème 4.1. *Étant donné une fonction vectorielle 3D \mathbf{F} et un domaine surfacique S , la théorie de Curl constate que :*

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{d}\mathbf{a} = \int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot \mathbf{d}\mathbf{s} \quad (4.15)$$

où l'intégration à gauche est une intégration surfacique sur le domaine S et l'intégration à droite est une intégration linéaire sur les frontières de S .

La théorie de Curl s'inscrit dans les théories fondamentales de calcul fournissant des méthodes pour exprimer l'intégration d'une fonction sur l'intérieur d'une région comme une intégration sur sa frontière (cf. la figure 4.7).

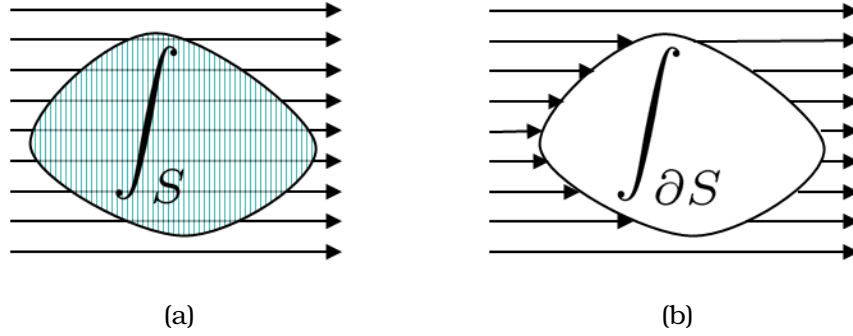


FIG. 4.7 – La théorie du Curl exprime l'intégration sur la région S (a) par une intégration sur sa frontière ∂S (b).

Dans le système de coordonnées sphériques (cf. la sous section 2.1.2.1), le Curl d'une fonction vectorielle $\mathbf{F} = (\mathbf{F}_r, \mathbf{F}_\theta, \mathbf{F}_\varphi)$ est défini comme :

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial(\sin \theta \mathbf{F}_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial \mathbf{F}_\theta}{\partial \varphi} \right] \\ \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \mathbf{F}_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial(r \mathbf{F}_\varphi)}{\partial r} \right] \\ \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(r \mathbf{F}_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial \mathbf{F}_r}{\partial \theta} \right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{r}} & \hat{\theta} & \hat{\varphi} \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

Par ailleurs, les éléments d'aire et de longueur sont donnés par :

$$d\mathbf{a} = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \hat{\mathbf{r}} \quad (4.17)$$

$$d\mathbf{s} = dr \hat{\mathbf{r}} + r d\theta \hat{\theta} + r \sin \theta d\varphi \hat{\varphi} \quad (4.18)$$

Rappelons que les trois vecteurs principaux $\hat{\mathbf{r}}$, $\hat{\theta}$ et $\hat{\varphi}$ définissent un repère orthonormés :

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\theta} = \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\varphi} = \hat{\theta} \cdot \hat{\varphi} = 0 \quad (4.19)$$

Nous obtenons donc :

$$(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{a} = r \left[\frac{\partial(\sin \theta \mathbf{F}_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial \mathbf{F}_\theta}{\partial \varphi} \right] d\theta d\varphi \quad (4.20)$$

Par conséquent, dans le système de coordonnées sphériques, la théorie du Curl s'écrit comme suit :

$$\int_S r \left[\frac{\partial(\sin \theta \mathbf{F}_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial \mathbf{F}_\theta}{\partial \varphi} \right] d\theta d\varphi = \int_{\partial S} [\mathbf{F}_r dr + r \mathbf{F}_\theta d\theta + r \sin \theta \mathbf{F}_\varphi d\varphi] \quad (4.21)$$

4.3.3 Le calcul des HSs

Nous allons maintenant montrer comment adapter les intégrations correspondant aux coefficients $c_{l,m}^i$ pour qu'on puisse appliquer la théorie de Curl.

Pour calculer les coefficient des harmoniques sphériques $c_{l,m}^i$ par intégration linéaire sur les arêtes du triangle $T_i \in T$ en exploitant l'équation 4.21, nous avons besoin d'une fonction vectorielle $\mathbf{F}^i = (\mathbf{F}_r^i, \mathbf{F}_\theta^i, \mathbf{F}_\varphi^i)$ satisfaisant l'égalité suivante :

$$(\nabla \times \mathbf{F}^i) \cdot \mathbf{da} = f_i(\theta, \varphi) \overline{Y_l^m}(\theta, \varphi) \sin(\theta) d\theta d\varphi \quad (4.22)$$

Toute fonction vectorielle satisfaisant l'équation 4.22 permettra d'obtenir une même évaluation des coefficients $c_{l,m}^i$. Nous allons montrer qu'il est en particulier possible de trouver un champ vectoriel de la forme $\mathbf{F}^i = (0, \mathbf{F}_\theta^i, 0)$. Cela signifie que les lignes du champs sont géodésiques et dans la direction de $\hat{\theta}$. Ceci nous permet de simplifier l'expression de la théorie du Curl. Par conséquent, sur la sphère de l'unité ($r = 1$), l'équation ci-dessus se réduit à :

$$(\nabla \times \mathbf{F}^i) \cdot \mathbf{da} = -\frac{\partial \mathbf{F}_\theta^i}{\partial \varphi} d\theta d\varphi = f_i(\theta, \varphi) \overline{Y_l^m}(\theta, \varphi) \sin(\theta) d\theta d\varphi \quad (4.23)$$

Soit

$$-\frac{\partial \mathbf{F}_\theta^i}{\partial \varphi} = f_i(\theta, \varphi) \overline{Y_l^m}(\theta, \varphi) \sin(\theta) \quad (4.24)$$

En intégrant les deux coté par rapport à φ , on obtient donc

$$\mathbf{F}_\theta^i = -\int f_i(\theta, \varphi) k_{l,m} P_l^m(\cos \theta) \sin(\theta) e^{-im\varphi} d\varphi \quad (4.25)$$

$$= -k_{l,m} P_l^m(\cos \theta) \sin(\theta) \int f_i(\theta, \varphi) e^{-im\varphi} d\varphi \quad (4.26)$$

Étant données u et v deux fonctions, la forme générale de l'intégration par partie assure que :

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Considérons que m est non nulle. Par application de l'intégration par partie aux fonction $u = f_i(\theta, \varphi)$ et $dv = e^{-im\varphi} d\varphi$, nous obtenons donc :

$$\begin{aligned} du &= \frac{\partial f_i(\theta, \varphi)}{\partial \varphi} d\varphi \\ v &= \frac{-1}{im} e^{-im\varphi} \end{aligned}$$

Par conséquent, la substitution dans l'équation 4.26 donne :

$$\mathbf{F}_\theta^i = \frac{f_i k_{l,m} P_l^m(\cos \theta) \sin(\theta) e^{-im\varphi}}{im} - \frac{k_{l,m} P_l^m(\cos \theta) \sin(\theta)}{im} \int e^{-im\varphi} \frac{\partial f_i}{\partial \varphi} d\varphi \quad (4.27)$$

Utilisant cette expression de \mathbf{F}_θ^i et la théorie du Curl, l'évaluation de coefficient $c_{l,m}^i$ équivaut à :

$$c_{l,m}^i = \int \int_{T_i} (\nabla \times \mathbf{F}^i) \cdot d\mathbf{a} \quad (4.28)$$

Alors,

$$c_{l,m}^i = \int_{\partial T_i} \mathbf{F}_\theta^i \cdot d\mathbf{s} \quad (4.29)$$

où ∂T_i est la frontière du triangle T_i . Ainsi nous pouvons calculer les coefficients des harmoniques sphérique $c_{l,m}^i$ en appliquant la théorie du Curl à la fonction vectorielle \mathbf{F}^i . Le calcul des coefficients $c_{l,m}^i$ se ramène à une intégration 1D de \mathbf{F}^i sur les bords du triangle T_i . Cependant, l'intégrale à droite de l'équation 4.27 n'est pas facile à calculer et doit être simplifiée. Dans ce qui suit, nous allons montrer comment simplifier cette intégrale.

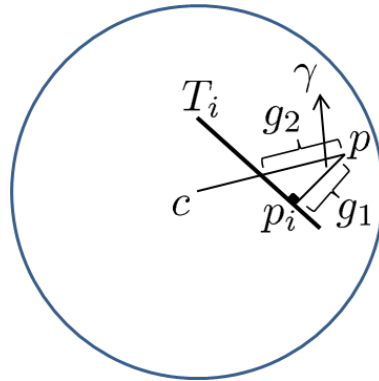


FIG. 4.8 – g_1 mesure la distance de p au plan contenant T_i dans la direction orthogonale alors que g_2 mesure la distance de p à ce plan dans la direction \hat{r} .

Supposons que les quantités g_1 et g_2 sont définies comme suit (cf. la figure 4.8) :

$$g_1(p) = \overrightarrow{pp_i} \cdot \mathbf{n}_i \quad (4.30)$$

$$g_2(p) = r - f_i(\theta, \varphi) \quad p = (r, \theta, \varphi) \quad (4.31)$$

g_1 mesure la distance de p au plan contenant T_i dans la direction orthogonale alors que g_2 mesure la distance de p à ce plan dans la direction \hat{r} . Le gradient

de g_1 est égal à la normale \mathbf{n}_i :

$$\nabla g_1 = \mathbf{n}_i \quad (4.32)$$

De plus, on a

$$g_1 = g_2 \cos \gamma \quad (4.33)$$

où $\cos \gamma = \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{n}_i$. Ainsi

$$\nabla g_1 = \nabla g_2 \cos \gamma + g_2 \nabla \cos \gamma \quad (4.34)$$

Cependant, pour tous les points p appartenant à T_i , la quantité $g_2(p)$ est nulle. Alors :

$$\nabla g_1 = \nabla g_2 \cos \gamma \quad (4.35)$$

Ainsi

$$\nabla(r - f_i) \times (\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{n}_i) = \mathbf{n}_i \quad (4.36)$$

$$\left(\hat{\mathbf{r}} - \frac{\partial f_i}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} - \frac{1}{r} \frac{\partial f_i}{\partial \theta} \hat{\theta} - \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial f_i}{\partial \varphi} \hat{\varphi} \right) \times (\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{n}_i) = \mathbf{n}_i \quad (4.37)$$

En multipliant chaque côté par $\hat{\varphi}$, on obtient :

$$- \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f_i}{\partial \varphi} \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{n}_i = \mathbf{n}_i \cdot \hat{\varphi} \quad (4.38)$$

Soit, $\kappa = -\frac{r \sin \theta}{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{n}_i}$, l'équation au dessus devient :

$$\frac{\partial f_i}{\partial \varphi} = \kappa \mathbf{n}_i \cdot \hat{\varphi} \quad (4.39)$$

Ainsi, l'intégrale à droite de l'équation 4.27 se simplifie en :

$$\int e^{-im\varphi} \frac{\partial f_i}{\partial \varphi} d\varphi = \kappa \int (\mathbf{n}_i \cdot \hat{\varphi}) e^{-im\varphi} d\varphi \quad (4.40)$$

La normale \mathbf{n}_i est constante pour tous les points qui se trouvent sur la surface du triangle T_i . En plus, $\hat{\varphi}$ est le vecteur unité dans la direction de φ et est égal à $(-\sin(\varphi), \cos(\varphi), 0)$ (cf. la section 2.1.2.1). Nous avons donc :

$$\int e^{-im\varphi} \frac{\partial f_i}{\partial \varphi} d\varphi = \kappa \mathbf{n}_i \cdot \int \hat{\varphi} e^{-im\varphi} d\varphi \quad (4.41)$$

Pour évaluer l'intégration présentée dans l'équation 4.41, les deux sous inté-

grations suivantes doivent être évaluées :

$$I_1 = \int -\sin(\varphi)e^{-im\varphi} d\varphi \quad (4.42)$$

$$I_2 = \int \cos(\varphi)e^{-im\varphi} d\varphi \quad (4.43)$$

Maintenant, nous allons montrer comment nous pouvons évaluer ces intégrations à l'aide de l'intégration par partie. Commençant par :

$$I_1 = \int -\sin(\varphi)e^{-im\varphi} d\varphi \quad (4.44)$$

Prenant $u = -\sin(\varphi)$ et $dv = e^{-im\varphi} d\varphi$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} du &= -\cos(\varphi)d\varphi \\ v &= \frac{-1}{im}e^{-im\varphi} \end{aligned}$$

Par conséquent, l'application de l'intégration par partie à l'équation 4.44 nous donne :

$$I_1 = \frac{\sin(\varphi)e^{-im\varphi}}{im} - \frac{1}{im} \int \cos(\varphi)e^{-im\varphi} d\varphi \quad (4.45)$$

Appliquant l'intégration par partie encore une fois en prenant $u = \cos(\varphi)$ et $dv = e^{-im\varphi} d\varphi$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} du &= -\sin(\varphi)d\varphi \\ v &= \frac{-1}{im}e^{-im\varphi} \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{\sin(\varphi)e^{-im\varphi}}{im} - \frac{1}{im} \left[\frac{-\cos(\varphi)e^{-im\varphi}}{im} + \frac{1}{im} \int -\sin(\varphi)e^{-im\varphi} d\varphi \right] \\ &= \frac{\sin(\varphi)e^{-im\varphi}}{im} - \frac{\cos(\varphi)e^{-im\varphi}}{m^2} + \frac{1}{m^2} I_1 \end{aligned}$$

Ainsi :

$$I_1 = \frac{e^{-im\varphi}}{1-m^2} [\cos(\varphi) + im \sin(\varphi)] \quad m \neq \pm 1 \quad (4.46)$$

D'autre part, quand $m = \pm 1$, nous pouvons réécrire l'équation 4.44 comme

suit :

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int -\sin(\varphi)e^{-im\varphi}d\varphi \\
&= \int -\sin(\varphi) [\cos(\varphi) - im \sin(\varphi)] d\varphi \\
&= \int -\sin(\varphi) \cos(\varphi)d\varphi + im \int \sin^2(\varphi)d\varphi \\
&= \frac{1}{4} \cos(2\varphi) + \frac{im}{2} \int (1 - \cos(2\varphi))d\varphi \\
&= \frac{1}{4} \cos(2\varphi) + \frac{im}{2} \left(\varphi - \frac{1}{2} \sin(2\varphi) \right)
\end{aligned}$$

Donc la solution finale de I_1 est :

$$I_1 = \begin{cases} \frac{e^{-im\varphi}}{1-m^2} [\cos \varphi + im \sin \varphi] & m \neq \pm 1 \\ \frac{1}{4} \cos 2\varphi + \frac{im}{2} [\varphi - \frac{1}{2} \sin 2\varphi] & m = \pm 1 \end{cases} \quad (4.47)$$

De la même façon, nous pouvons vérifier que la solution de I_2 est :

$$I_2 = \begin{cases} \frac{e^{-im\varphi}}{1-m^2} [\sin \varphi - im \cos \varphi] & m \neq \pm 1 \\ \frac{im}{4} \cos 2\varphi + \frac{1}{2} [\varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi] & m = \pm 1 \end{cases} \quad (4.48)$$

Par conséquent, étant donné les directions de la normale sur la surface, nous pouvons évaluer F_θ^i pour n'importe quelle valeur de l , m ($m \neq 0$), θ et de φ en utilisant les équations :

$$F_\theta^i = \frac{f_i k_{l,m} P_l^m(\cos \theta) \sin(\theta) e^{-im\varphi}}{im} - \frac{k_{l,m} P_l^m(\cos \theta) \sin(\theta)}{im} \int e^{-im\varphi} \frac{\partial f_i}{\partial \varphi} d\varphi \quad (4.49)$$

$$\int e^{-im\varphi} \frac{\partial f_i}{\partial \varphi} d\varphi = \sin(\theta) \kappa \mathbf{n}_i \cdot (I_1, I_2, 0) \quad (4.50)$$

et par conséquent nous obtenons la valeur de $c_{l,m}^i$.

Quand $m = 0$, l'équation 4.26 se réduit à :

$$F_\theta^i = -k_{l,0} P_l^0(\cos \theta) \sin(\theta) \int f_i d\varphi \quad (4.51)$$

Prenant $u = f_i$ et $dv = 1$, l'application de l'intégration par partie à cette équation

nous donne :

$$\mathbf{F}_\theta^i = -k_{l,0} P_l^0(\cos \theta) \sin(\theta) \left(\varphi f_i - \int \varphi \frac{\partial f_i}{\partial \varphi} d\varphi \right) \quad (4.52)$$

Utilisant l'équation 4.39, nous obtenons :

$$\mathbf{F}_\theta^i = -k_{l,0} P_l^0(\cos \theta) \sin(\theta) \varphi f_i + k_{l,0} P_l^0(\cos \theta) \sin(\theta) \kappa \mathbf{n}_i \cdot \int \varphi \hat{\varphi} d\varphi \quad (4.53)$$

où l'intégration $\int \varphi \hat{\varphi} d\varphi$ est égale à :

$$\int \varphi \hat{\varphi} d\varphi = (\varphi \cos(\varphi) - \sin(\varphi), \varphi \sin(\varphi) + \cos(\varphi), 0) \quad (4.54)$$

4.4 Évaluation numérique

Dans la sous section 4.3.3, nous avons proposé une fonction vectorielle $\mathbf{F}^i = (\mathbf{F}_r^i, \mathbf{F}_\theta^i, \mathbf{F}_\varphi^i)$ permettant d'évaluer les coefficients $c_{l,m}^i$ par intégration sur les arêtes des triangles T_i :

$$c_{l,m}^i = \int_{\partial T_i} \mathbf{F}_\theta^i ds \quad (4.55)$$

Nous montrons maintenant comment évaluer numériquement ces coefficients en adoptant la méthode de Monte Carlo présentée dans la section 3.5.1.1.

Selon la stratégie de la méthode de Monte Carlo, nous avons besoin d'une suite de points uniformément échantillonnés sur les bords de triangle T_i . Heureusement, la génération d'une telle suite de points est directe à partir de l'équation paramétrique de segment $\overline{v_i v_j}$:

$$p = v_i + \lambda(v_j - v_i) \quad \lambda \in [0 \ 1] \quad (4.56)$$

L'approche qui en découle pour évaluer les coefficients des harmoniques sphériques est récapitulée dans l'algorithme 4.1.

La figure 4.9 montre une comparaison, à nombre de points fixé, entre l'évaluation des coefficients des harmoniques sphériques sur les triangles et sur les arêtes des triangles. Le modèle de Vase est visualisé de la façon suivante : on fait un échantillonnage régulier de la sphère avec des points P_i , on visualise ensuite la valeur de $\tilde{f}(P_i)$. Dans cet exemple, nous avons fixé les paramètres d'évaluation suivants : le même nombre de points générés et le même nombre de coefficients dans les deux cas. Nous pouvons remarquer que les détails géo-

Algorithme 4.1 Les étapes principales pour calculer $c_{l,m}$ sur les arêtes.

ENTRÉE: Un maillage triangulaire M orienté de façon consistante ;

SORTIES: $c_{l,m}$ coefficient de la THS de la fonction $f(\theta, \varphi)$ représentant M et l'écart type σ ;

$T \Leftarrow$ l'ensemble des triangles de M ;

$E \Leftarrow$ l'ensemble des arêtes de M ;

$c_{l,m} \Leftarrow 0$;

pour tout $T_i \in T$ **faire**

$c_{l,m}^i \Leftarrow 0$;

fin pour

pour tout $e \in E$ **faire**

$T_{i_1}, T_{i_2} \Leftarrow$ les triangles partagent le bord e ;

$f_{i_1} \Leftarrow$ la fonction mesurant la distance radiale associée à T_{i_1} ;

$f_{i_2} \Leftarrow$ la fonction mesurant la distance radiale associée à T_{i_2} ;

$c_{l,m}^{i_1} \Leftarrow c_{l,m}^{i_1} + \frac{\|e\|}{n} F_{\theta}^{i_1}|_e$; $\blacktriangleright F_{\theta}^{i_1}$ est calculées à l'aide des équations 4.49 et 4.50

$c_{l,m}^{i_2} \Leftarrow c_{l,m}^{i_2} + \frac{\|e\|}{n} F_{\theta}^{i_2}|_e$; $\blacktriangleright F_{\theta}^{i_2}$ est calculées à l'aide des équations 4.49 et 4.50.

fin pour

pour tout $T_i \in T$ **faire**

$c_{l,m} \Leftarrow c_{l,m} + c_{l,m}^i$;

fin pour

Retourner $c_{l,m}$ ainsi que l'écart type σ sur $c_{l,m}$

métriques sont plus visible dans la figure 4.9(b) par rapport au cas où l'évaluation est effectuée sur les triangles eux-mêmes (cf. la figure 4.9(a)). L'erreur de précision géométrique correspondante est 31 fois meilleure. Le modèle de Vase utilisé dans cet exemple contient 68k triangles. Le temps de calcul est de 4.8 secondes pour l'évaluation sur les arêtes contre 22 secondes pour l'évaluation sur les triangles. Ainsi, l'intégration sur les arêtes permet un gain de temps non négligeable par rapport à l'intégration sur les triangles (5 fois plus rapide).

La figure 4.10(a) montre la représentation du modèle Max Planck à différents niveaux de détails en utilisant les harmoniques sphériques. Ce modèle est visualisé de la même manière que l'exemple précédent. Dans cet exemple, la tolérance σ de l'évaluation de chaque coefficient est 95%. Le niveau de détail est contrôlé par la valeur de ϵ qui permet de régler la band passante β . Dans la figure 4.10(a), nous avons fixé la valeur de ϵ à 5.0. La valeur correspondant de β est 32. Pour plus de détail géométrique, nous pouvons diminuer la valeur de ϵ que dans la mesure où ϵ demeure raisonnable par rapport à la tolérance d'évaluation des coefficients (cf. la figure 4.10(b)). Dans le chapitre suivant,

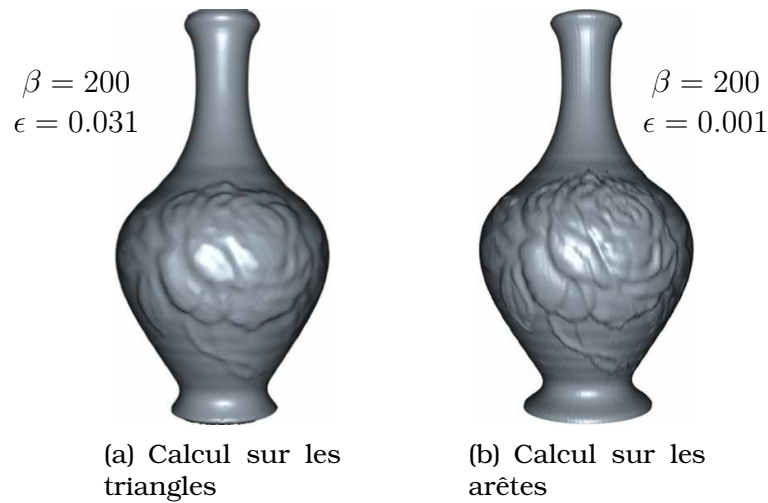


FIG. 4.9 – Une comparaison entre l'évaluation des coefficients $c_{l,m}$ par une évaluation sur les triangles (a) et sur les arêtes des triangles (b). La bande passante β fixée et le nombre de points, utilisé par Monte Carlo pour calculer chacun des coefficients, fixé conduisent à des tolérances différentes pour l'évaluation de chaque coefficient $c_{l,m}$. La différence caractérisant les précisions géométriques dans les deux cas se répercute globalement sur la mesure d'erreur ϵ entre la surface à modéliser et la représentation harmonique filtrée.

nous allons illustrer l'efficacité de notre représentation en harmoniques sphériques des maillages étoilés à travers un certain nombre d'applications comme la représentation des formes définies à partir de maillages quelconques ou même de nuage de points, ainsi que le transfert de texture géométrique et la correction locale de surfaces 3D.

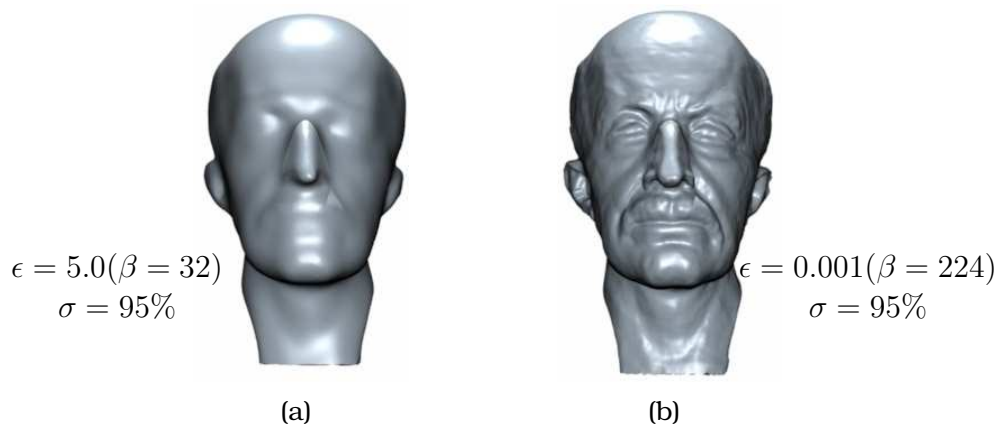


FIG. 4.10 – Le modèle de Max Planck à différents niveaux de détails.

Chapitre 5

Extension aux maillages non étoilés et ses applications

Sommaire

| | |
|---|-----------|
| 5.1 Maillages non étoilés | 82 |
| 5.1.1 Paramétrisation sphérique | 82 |
| 5.1.2 Segmentation | 87 |
| 5.2 Surfaces représentées par des nuages de points | 91 |
| 5.3 Applications | 96 |
| 5.3.1 Transfert de texture géométrique | 98 |
| 5.3.2 Correction locale de surface | 100 |
| 5.3.3 Compression | 101 |

Dans les chapitres précédents, nous avons proposé une représentation fréquentielle des objets étoilés en utilisant les harmoniques sphériques. Dans le cas des objets non étoilés, les algorithmes présentés ne sont plus applicables directement. Pour appliquer le calcul des harmoniques sphériques aux domaines non sphériques, des étapes de prétraitement sont requises pour convertir les objets non étoilés en un ensemble de sous objets sphériques. Il existe deux approches, une première utilisant une paramétrisation sphérique de chacune des trois coordonnées x , y et z et une deuxième utilisant une segmentation volumique.

Dans ce chapitre, nous allons montrer comment étendre les algorithmes proposés dans le chapitre 4 après application de ces prétraitements. La première section de ce chapitre est consacrée aux objets définis par des maillages

triangulaires. Nous montrons ensuite dans la section 5.2 comment adapter les techniques obtenues aux objets définis par des ensembles de points.

5.1 Maillages non étoilés

Dans cette section, nous décrivons deux alternatives pour appliquer les calculs des harmoniques sphériques aux maillages non étoilés. Nous commençons d'abord par l'utilisation d'une paramétrisation sphérique. Nous abordons ensuite la utilisation d'une segmentation du volume délimité par le maillage en des sous volumes étoilés.

5.1.1 Paramétrisation sphérique

La paramétrisation des données associées aux maillages 3D est importante pour beaucoup d'applications comme le plaquage de texture, le remaillage ou la métamorphose. Dans ces applications, la plupart des travaux de recherche utilise les paramétrisations planaires. Le but consiste à produire une triangulation planaire dite valide en minimisant une certaine mesure de déformation [26, 66, 27, 87]. Dans ce contexte, le terme valide signifie que les triangles planaires ne se superposent pas. Bien que la paramétrisation planaire du maillage soit la paramétrisation la plus naturelle pour le plaquage de texture, ce genre de paramétrisation ne convient pas pour de nombreuses applications. Pour les applications comme la métamorphose [85, 6, 44] ou le remaillage [33, 53], il vaut mieux paramétrer le maillage sur un domaine topologiquement équivalent au maillage. Ceci réduit la distortion due à la paramétrisation et évite les problèmes de coutures consécutifs à une éventuelle découpe de la surface maillée. Si le maillage est topologiquement équivalent à la sphère, le domaine de paramétrisation doit être sphérique. En effet, la paramétrisation d'un maillage triangulaire sur la sphère équivaut à plonger son graphe de connectivité sur la sphère de telle sorte que les triangles sphériques forment un partitionnement de la sphère. Les maillages de genre zéro peuvent être toujours paramétrisés sur la sphère.

Une manière simple de paramétrer un maillage triangulaire et fermé sur la sphère est de ramener le problème au cas planaire [35]. D'abord, on retire un triangle pour obtenir une frontière. Ensuite, on définit une paramétrisa-

tion de ce maillage sur le triangle unité en utilisant n'importe quelle méthode de paramétrisation planaire. Enfin on utilise la projection stéréo inverse pour projeter ce triangle sur la sphère. De la même manière, on peut couper le maillage en deux sous maillages qui sont topologiquement équivalents à un disque. On paramétrise ensuite chacun de ces sous maillages sur un disque en fixant la paramétrisation des frontières sur le bord du disque. On projette finalement chaque disque sur une demi-sphère par ajout d'une composant z appropriée. Les frontières communes garantissent que les deux demi-sphères coïncident avec l'équateur. Chacune des deux méthodes précédentes est susceptible d'introduire de la distorsion.

Il est plus naturel de paramétriser le maillage directement sur la sphère sans passer par une paramétrisation planaire. Plusieurs méthodes existent pour cela [86, 76, 31, 110, 81]. Nous considérons dans cette section la méthode proposée par Zhou et al. [110] en raison de sa simplicité et de son efficacité. Les principales étapes de cette méthode sont les suivantes.

Étant donné un maillage triangulaire M , la première étape consiste à créer un maillage progressif MP [38] à partir de M . Les maillages progressifs sont un outil très utile pour la simplification et la reconstruction partielle ou totale d'un maillage triangulaire. L'opération de simplification de base consiste en une contraction d'arête en un sommet. L'opération inverse consiste en l'éclatement d'un sommet en une arête. Pour créer la structure de MP , des appels itératifs à l'opération de contraction d'arêtes sont effectués en stockant les informations nécessaires pour réaliser les opérations inverses. À chaque contraction d'arête, Zhou et al. stockent des informations supplémentaires correspondant à une paramétrisation locale des deux sommets décimés sur le maillage simplifié. Étant donné v_1 et v_2 les deux extrémités de l'arête e et v le nouveau sommet créé après la contraction de e , une paramétrisation conforme est utilisée pour aplatir le premier voisinage de v [56]. Les deux sommets v_1 et v_2 sont ensuite plongés dans cette paramétrisation planaire en utilisant une paramétrisation harmonique Π [24] (cf. la figure 5.1). Supposons que $T'_k = (q_{1,k}, q_{2,k}, q_{3,k})$ soit un triangle contenant le point $\Pi(v_k)$, $k = 1, 2$ respectivement. Le plongement peut être exprimé par les coordonnées barycentriques comme suit :

$$\Pi(v_k) = \alpha_1^k q_{1,k} + \alpha_2^k q_{2,k} + \alpha_3^k q_{3,k} \quad (5.1)$$

Les coordonnées barycentriques locales de la paramétrisation locale des som-

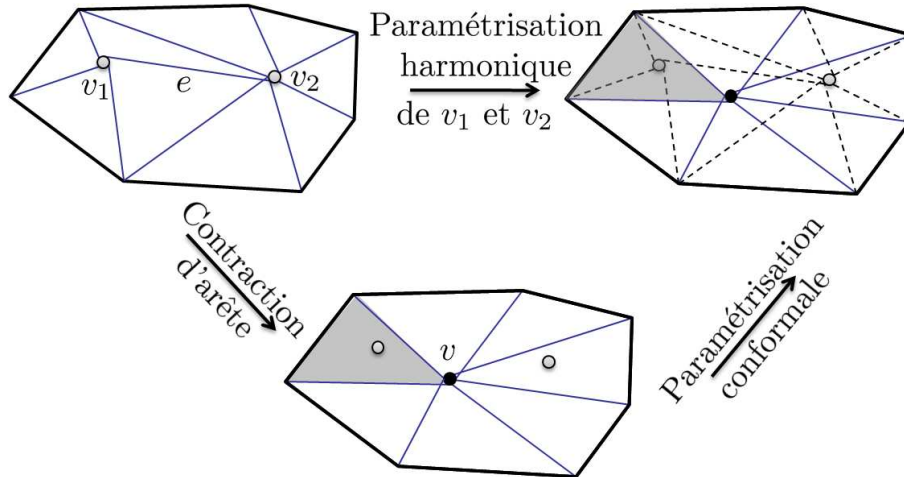


FIG. 5.1 – Paramétrisation locale de sommets décimés sur le maillage simplifié.

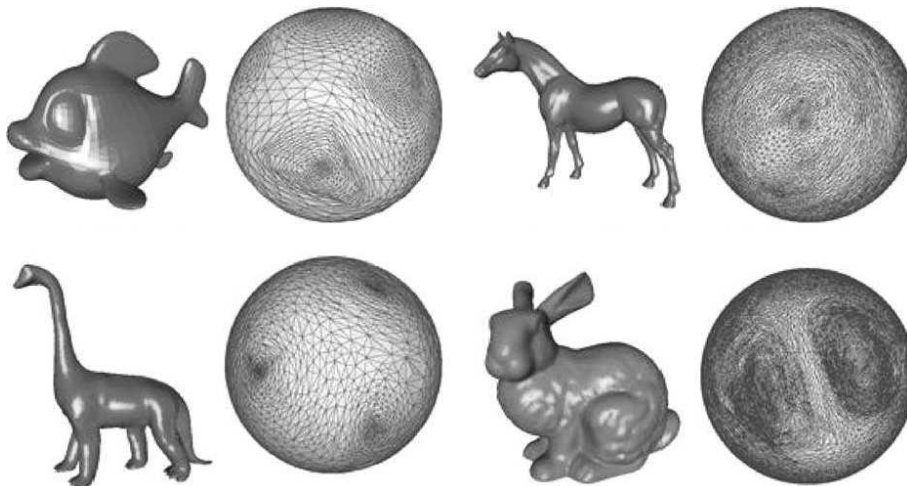


FIG. 5.2 – Quelques exemples de la paramétrisation sphérique de maillages de genre zéro (image extraite de [110]).

ments v_1 et v_2 s'ajoutent à l'information d'éclatement du sommet v en l'arête e . Elles sont stockées ainsi que les triangles T_k . Cette étape est répétée tant que le maillage de base n'est pas un tétraèdre.

La deuxième étape consiste à projeter le maillage de base sur la sphère. Par cette projection, un premier maillage sphérique est obtenu. À partir de ce maillage, on ajoute les sommets décimés en effectuant les opérations inverses à celles effectuées à la simplification. Les points ajoutés sont positionnés sur la sphère grâce aux coordonnées barycentriques déjà stockées. Les figures 2.7 et 5.2 montrent les étapes principales et quelques exemples de la paramétrisation sphérique des maillages triangulaires de genre zéro.

La paramétrisation sphérique du maillage M définit des signaux sphériques triangulés f_x , f_y et f_z auxquels nous pouvons appliquer notre calcul direct des harmoniques sphériques au lieu d'appliquer une discrétisation régulière sur la sphère comme fait précédemment par Zhou et al.

Dans la figure 5.3, nous illustrons l'intérêt d'utiliser notre méthode plutôt que la discrétisation utilisée par Zhou et al. [110]. L'échantillonnage régulier sur la sphère ignore des détails importants sur la tête du Dinosaur, avec une bande passante $\beta = 128$ (cf. la figure 5.3(a)). En appliquant notre méthode avec la même bande passante, on peut voir clairement les détails géométriques sur le modèle (cf. la figure 5.3(b)). Les coefficients des harmoniques sphériques sont calculés avec une tolérance de 95%.

Dans la figure 5.4, nous montrons la représentation fréquentielle du modèle de Bunny de Stanford par les harmoniques sphériques pour différentes mesures de précision géométrique dont on rappelle que c'est elle qui détermine la bande passante. La variation de la mesure de précision géométrique ϵ crée une représentation avec un niveau de détail correspondant. La valeur de ϵ est prise comme un pourcentage par rapport à la diagonale de la boîte englobant du modèle. Le temps de calcul de cette représentation est de 6 secondes pour la bande passante $\beta = 190$.

La figure 5.5 montre d'autres exemples de la représentation de modèles de genre zéro par décomposition en harmoniques sphériques de la paramétrisation triangulaire sphérique. Les modèles sont d'abord paramétrisés sur la sphère et ϵ est fixé dans ce cas à 0.001. Les valeurs correspondantes de β sont 128, 128, 160 respectivement.

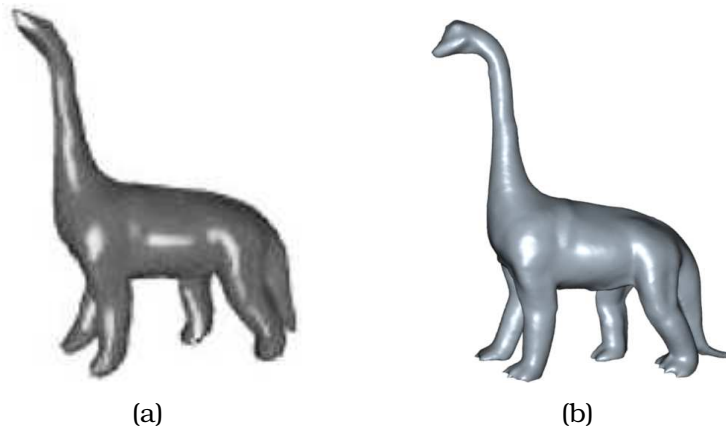


FIG. 5.3 – La décomposition des fonctions f_x , f_y et f_z en harmoniques sphériques. (a) Le modèle obtenu après discrétisation régulière sur la sphère, la tête de Dinosaur est sous-échantillonnée avec $\beta = 128$ (image extraite de [110]). (b) Notre approche avec la même bande passante $\beta = 128$ et $\sigma = 95\%$.

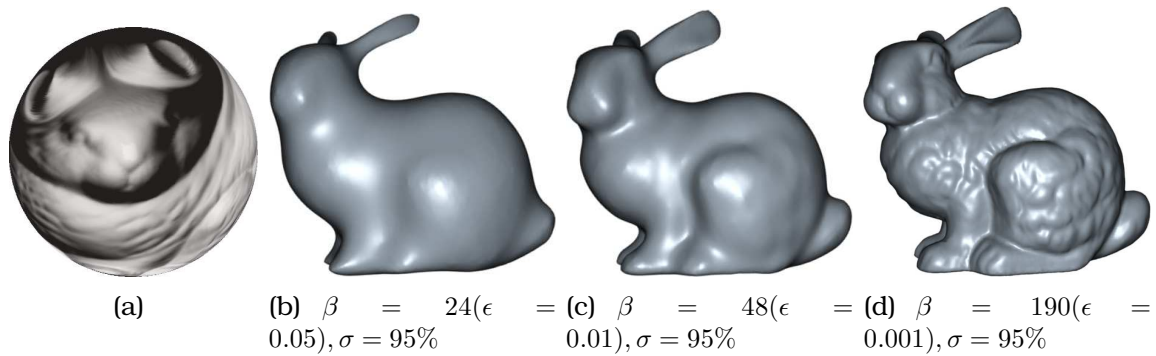


FIG. 5.4 – La représentation du modèle de Bunny en harmoniques sphériques. (a) La paramétrisation sphérique (b), (c) et (d) quelques niveaux de détails correspondent aux valeurs différentes de ϵ 0.05, 0.01 et 0.001 respectivement.

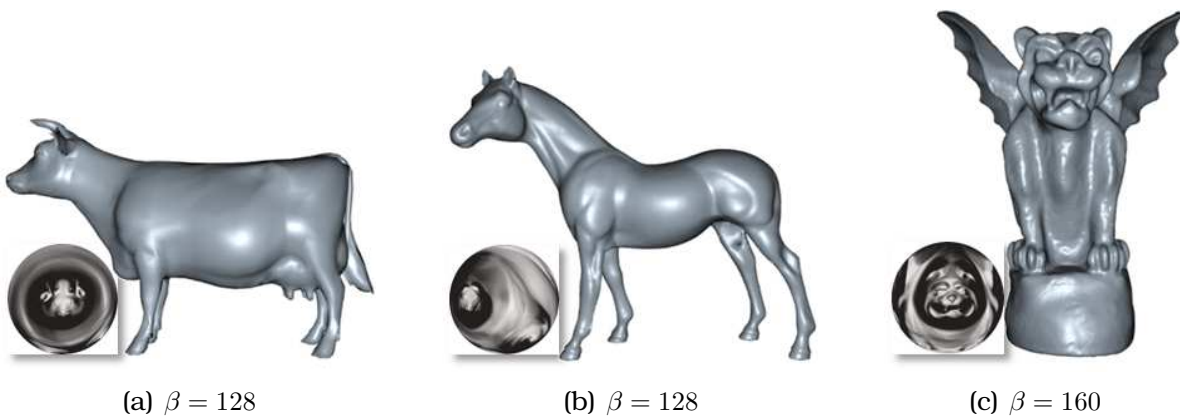


FIG. 5.5 – La représentation de modèles de genre zéro en harmoniques sphériques ($\epsilon = 0.001$ et $\sigma = 95\%$).

5.1.2 Segmentation

Dans cette section, nous montrons comment notre représentation fréquentielle peut également être étendue aux maillages 3D non étoilés en utilisant une segmentation volumique. Cette dernière consiste à diviser le volume délimité par le maillage en sous-volumes étoilés. Après cette segmentation, le calcul des harmoniques sphériques est appliqué à chaque partie séparément. Les représentations locales sont fusionnées en utilisant le cadre de surfaces implicites.

5.1.2.1 Segmentation volumique

Le problème de la segmentation des objets 3D en un nombre minimum de sous parties étoilées est un problème ouvert dans le domaine de l'informatique graphique. Cependant, il existe plusieurs techniques permettant de segmenter les modèles complexes en un nombre raisonnable de parties convexes ou étoilées. Lien et Amato [61] ont proposé une mesure de concavité pour diviser les modèles en parties approximativement convexes selon cette mesure. Dey et al. [21] ont décomposé le volume borné par un ensemble de points en plus petits sous-volumes. Leur segmentation est basée sur la notion d'attracteur puis de persistance topologique [25].

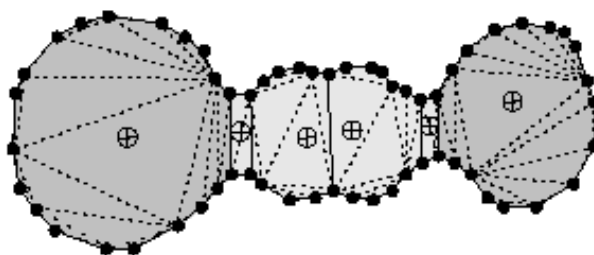


FIG. 5.6 – Les *manifolds* stables de points maximums décomposent le volume délimité par le maillage (image extraite de [21]).

Tout d'abord, Dey et al. étudient les points critiques relatifs à la fonction de distance au point le plus proche sur le modèle. Ils les classifient comme points maximums, minimums ou points selles. Les auteurs définissent ensuite des structures géométriques correspondant aux points critiques maximums. Ils les appellent les *manifolds* stables. Ces *manifolds* stables sont des régions

compactes qui décomposent le volume délimité par le maillage (cf. la figure 5.6). Généralement, ces régions sont convexes.

L'algorithme de segmentation fusionne ensuite un certain nombre de *manifolds* stables pour qu'on ait un nombre raisonnable de sous maillages. La méthode de base permet d'obtenir un bon candidat pour le choix du centre; le maximum attaché à la région du *manifold* stable. Mais comme des fusions peuvent être mises en oeuvre par cet algorithme de segmentation entre les *manifolds* stables obtenus, le choix d'un centre est moins direct. Pour cette raison, nous choisissons les centres de sous maillages à l'aide de la méthode d'optimisation aux moindres carrés présentée dans la sous section 4.2.2. La figure 5.7 montre quelques exemples de segmentation de maillages 3D.



FIG. 5.7 – Des exemples de segmentation de maillages 3D. Chaque partie est représentée par une couleur différente.

5.1.2.2 Fusion des représentations fréquentielles des parties

Dans cette section, nous associons une représentation implicite à chacune des parties sur la base de leur représentation fréquentielle. La représentation de l'objet est ensuite obtenue à l'aide de l'opération de mélange de ces représentations implicites.

Une fois réalisé le choix de son centre, chaque partie est représentée par la fonction $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ qui mesure la distance de ce centre aux points de la partie. Le calcul des harmoniques sphériques est appliqué à ces fonctions comme expliqué dans la section 4.3.

Considérons $\{M_i : i = 1, \dots, n\}$ l'ensemble des sous-parties de l'objet et $\{f_i(\theta, \varphi) : i = 1, \dots, n\}$ les fonctions sphériques correspondant à la distance

aux centres $\{c_i : i = 1, \dots, n\}$ des sous parties. Pour fusionner les parties M_i , nous associons à chaque fonction f_i une fonction $g_i : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, appelée fonction potentielle et définie comme suit :

$$g_i(p) = f_i(\theta_i^{(p)}, \varphi_i^{(p)}) - r_i^{(p)} \quad (5.2)$$

où $r_i^{(p)}$, $\theta_i^{(p)}$ et $\varphi_i^{(p)}$ sont les coordonnées sphériques de $p \in \mathbb{R}^3$ dans le système de coordonnées sphériques local et centré en c_i . Chaque g_i a la propriété suivante :

$$\text{signe}(g_i(p)) = \begin{cases} + & \text{si } p \text{ est à l'intérieur de } M_i, \\ - & \text{si } p \text{ est à l'extérieur de } M_i, \\ 0 & \text{si } p \text{ est sur } M_i. \end{cases} \quad (5.3)$$

Par conséquent, la surface de M_i peut être considérée comme le noyau de la fonction potentielle g_i . Le volume de l'objet M dans sa totalité correspond à l'union des sous volumes définis par ces surfaces implicites. La théorie des R -fonctions [73, 74, 80] fournit un ensemble d'opérations sur les fonctions potentielles. L'opérateur d'union de deux fonctions potentielles g_1 et g_2 est défini comme suit :

$$g_1 \cup g_2 = \frac{1}{1+a} \left(g_1 + g_2 + \sqrt{g_1^2 + g_2^2 - 2ag_1g_2} \right) \quad (5.4)$$

où $a(q) = s(g_1(q), g_2(q))$, s étant une fonction continue arbitraire satisfaisant la condition suivante :

$$-1 < s(t_1, t_2) \leq 1$$

La fonction maximum correspond au cas où $s = 1$.

Soit M_1 et M_2 deux parties voisines représentées par les fonctions sphériques f_1 et f_2 mesurant la distance aux centres c_1 et c_2 respectivement. Les fonctions potentielles g_1 et g_2 induites par f_1 et f_2 sont définies par l'équation 5.2. L'union de ces fonctions potentielles est obtenues par l'opérateur défini dans l'équation 5.4.

Soit \tilde{f}_1 et \tilde{f}_2 les versions approximées de f_1 et de f_2 , respectivement. Après avoir limité les fréquences à une largeur de bande β , on a pour chaque point $p \in \mathbb{R}^3$:

$$\tilde{g}_1(p) = \tilde{f}_1(\theta_1^{(p)}, \varphi_1^{(p)}) - r_1^{(p)} \quad (5.5)$$

$$\tilde{g}_2(p) = \tilde{f}_2(\theta_2^{(p)}, \varphi_2^{(p)}) - r_2^{(p)} \quad (5.6)$$

La fonction potentielle \tilde{g} , représentant l'union des parties représentées par

\hat{g}_1 et \hat{g}_2 , peut produire des irrégularités au niveau des jonctions à cause de la limitation des fréquences à une largeur de bande donnée, comme illustré dans la figure 5.8(a). Pour résoudre ce problème, nous remplaçons l'opérateur

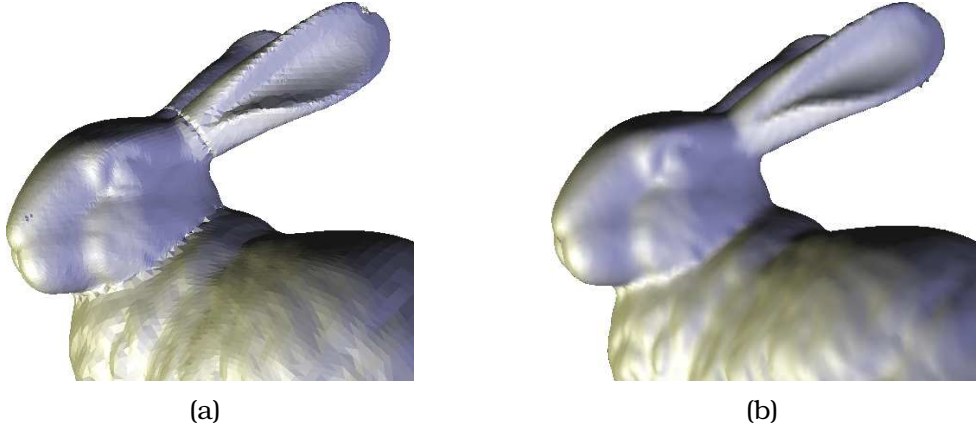


FIG. 5.8 – Fusion des parties du Bunny. (a) Fusion à l'aide de l'opérateur d'union, (b) Fusion à l'aide de l'opérateur de mélange.

d'union par l'opérateur de mélange (cf. la figure 5.8(b)). La forme générale de l'opérateur de mélange entre des fonctions implicites g_i est exprimée comme une somme pondérée :

$$G(p) = \sum_i w_i(p)g_i(p) \quad (5.7)$$

où w_i sont des poids attribués aux fonctions implicites g_i . Nous avons utilisé les B-splines quadratiques $b(t)$ [70] pour générer les poids de l'opérateur de mélange :

$$w_i(p) = b\left(\frac{3\|p - c_i\|}{2R_i}\right) \quad (5.8)$$

de rayons R_i et centré en c_i où R_i est le diamètre de la partie M_i . Puisque les B-splines $b(t)$ sont contenus dans l'enveloppe convexe de leurs points de contrôle, l'utilisation de ces B-splines comme poids de l'opérateur de mélange garantit une jonction lisse autour des régions de raccordement.

La mesure de précision géométrique est dans ce cas définie comme :

$$\epsilon = \max_i \epsilon_i \quad (5.9)$$

Ceci signifie que si ϵ satisfait une précision géométrique donnée, toutes les mesures de précision géométrique locale sont inférieures à cette précision. La surface représentée par le noyau de la fonction potentielle G peut être extraite

à l'aide d'un algorithme de marching cube.

Les figures 5.9 et 5.10 montrent quelques exemples de la représentation d'objets 3D de genre quelconque en utilisant les harmoniques sphériques après segmentation volumique. La segmentation des modèles de Bunny de Stanford, Happy Buddha et de Armadillo sont présentées dans la figure 5.7. Ces objets sont segmentés respectivement en 20, 50 et 50 parties, alors que les modèles du Dragon, du Dinosaure et du Tyra sont respectivement segmentés en 50, 70 et 50 parties. La tolérance d'évaluation des coefficients et la mesure de précision géométrique ϵ sont fixées à 95% et 0.001 respectivement pour tous les modèles. Les bandes passantes satisfaisant cette précision sont 160, 450, 320, 256, 350, 320 respectivement.

5.2 Surfaces représentées par des nuages de points

Proposées comme une alternative aux surfaces polygonales, les surfaces représentées par des nuages de points ont fait l'objet de nombreux travaux. En effet, les progrès matériels depuis une dizaine d'années permettent aujourd'hui de traiter des maillages volumineux en temps réel. Mais dans le même temps, la définition des écrans n'a pas beaucoup évolué. En effet, les tailles des triangles sont parfois plus petites qu'un pixel à l'écran. Ainsi, le paradigme du point s'est imposé comme une bonne alternative, réduisant l'espace mémoire des modèles en oubliant la composante topologique explicite présente dans les surfaces polygonales. Cette absence de topologie explicite permet notamment d'établir une structure multirésolution plus simple sur un nuage de points.

Grâce à la localité des calculs de la représentation en harmoniques sphériques et à l'opérateur de mélange, il suffit de construire des triangulations locales pour généraliser notre calcul aux surfaces représentées par des nuages de points. Cette généralisation s'appuie sur cinq étapes :

- décomposer spatialement le nuage de points en cellules de sorte que le patch contenu dans chaque cellule ne contienne pas de plis,
- trouver la sphère approximant les points dans chaque cellule,
- trianguler localement la projection de chaque patch sur sa sphère approximante,
- appliquer notre calcul sur les arêtes de ces triangulations locales,



FIG. 5.9 – Représentation d'objets 3D en utilisant les harmoniques sphériques. Les modèles de Bunny, Happy Buddha et Armadillo sont segmentés en 20, 50 et 50 parties respectivement. ϵ est fixée à 0.001 et les valeurs de β correspondantes sont 160, 450 et 320 respectivement ($\sigma = 95\%$).

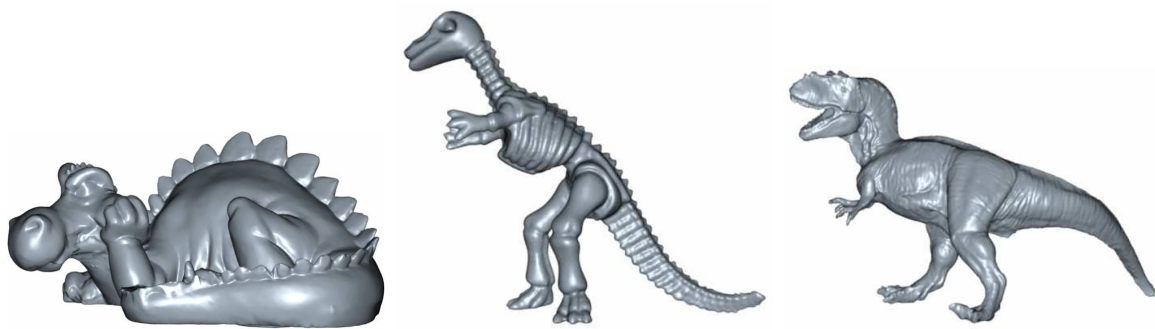


FIG. 5.10 – Les modèles de Dragon, Dinosaur et Tyra sont segmentés en 50, 70 et 50 parties. ϵ est fixée à 0.001 et les valeurs de β correspondantes sont 256, 350 et 320 respectivement ($\sigma = 95\%$).

- fusionner les représentations locales dans le cadre des surfaces implicites.

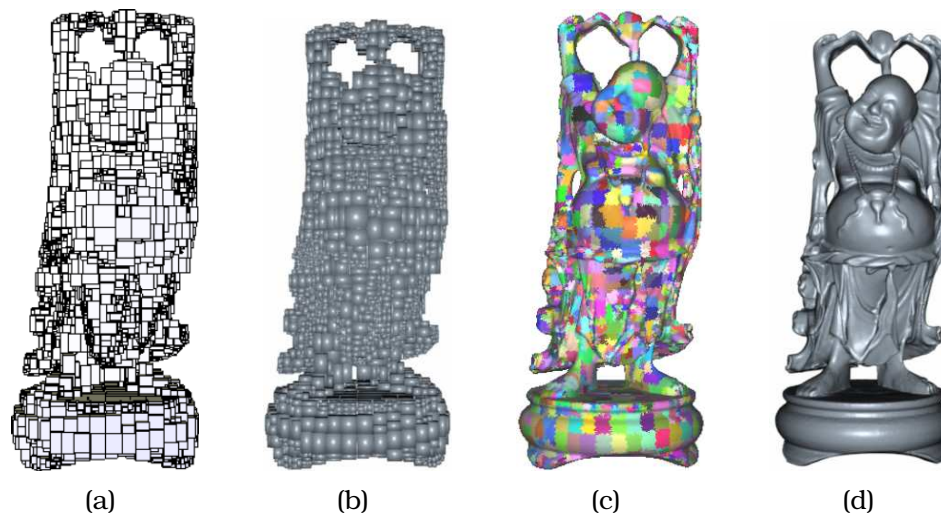


FIG. 5.11 – Les étapes principales de la généralisation de notre approche aux nuages de points non étoilés ; (a) la décomposition spatiale du nuage de points (b) les sphères approximant chaque cellule (c) les triangulations locales (d) l'objet après application du calcul des harmoniques sphériques.

Bien entendu, ces étapes sont également applicables si l'objet est maillé. Dans ce cas, nous n'avons pas besoin de remailler localement la surface car chaque patch est déjà maillé. La figure 5.11 illustre les étapes précédentes pour un modèle non étoilé et de genre non nul.

Dans cette partie, les points sont équipés d'une normale. C'est une hypothèse non restrictive quand on travaille sur des objets représentés par un ensemble de points. En effet, en l'absence de normales, les directions des normales à la surface sont estimées par une méthode de moindres carrés. Une orientation consistante de ces directions est ensuite obtenue à l'aide d'une propagation sur un arbre couvrant de poids minimal de l'ensemble de points [39].

Étant donné un ensemble de points munis d'une normale, le but de cette section est de décomposer cet ensemble en des morceaux surfaciques étoilés. Les kd-arbres [77] sont des structures hiérarchiques d'objets simples et efficaces à manipuler. Nous avons utilisé cette structure pour subdiviser la boîte englobant les points de l'objet. Pour chaque noeud intermédiaire dans le kd-arbre, nous avons utilisé le critère de subdivision proposé par Boubekur et al. [14]. Dans cette méthode, le noeud C_i est subdivisé si la condition suivante

n'est pas satisfaite :

$$\forall p \in C_i \implies \mathbf{n}_p \cdot \mathbf{n}_i > \delta \quad \delta \in [0 \ 1] \quad (5.10)$$

où \mathbf{n}_p est la normale associée à p et \mathbf{n}_i est la normale moyenne dans le noeud C_i . Cette condition favorise la propriété que les feuilles de l'arbre kd ne contiennent pas de plis. Cela signifie que les points correspondants sont projetables sur la sphère approximant chaque noeud (cf. la section 4.2.2) de sorte que cette projection maintient le voisinage local de chaque point. La figure 5.11(a) montre la décomposition spatiale d'un modèle 3D, alors que la figure 5.11(b) illustre la construction des sphères approximant chaque noeud.

Puisque la projection des points sur la sphère est convexe, la triangulation de leur enveloppe convexe peut être considérée comme une approximation du morceau de la surface contenant ces points. Soit K le nombre moyen de points dans chaque feuille et N le nombre de feuilles. N est beaucoup moins élevé que le nombre total de points. La complexité calculatoire de toutes les triangulations locales est de $N \times O(K \log K)$. Cette complexité est inférieure à la complexité de la reconstruction globale de l'objet. La figure 5.11(c) montre les triangulations locales de la décomposition spatiale illustrée dans la figure 5.11(a).

Après triangulation locale de chaque feuille, les calculs des harmoniques sphériques sont appliqués sur cette triangulation. La fusion des représentations locales en harmoniques sphériques est faite d'une manière similaires à celle présentée dans la section 5.1.2.2.

Reconstruction de surface

Récemment, plusieurs approches ont été proposées pour tenter d'interpoler ou d'approximer un nuage de points par une surface implicite. En particulier, les travaux de Turk et O'Brien sur les surfaces implicites interpolantes [99] constituent une approche relativement robuste pour le problème de la reconstruction de surface. Ils proposent d'utiliser les fonctions à base radiale (RBF) pour satisfaire un ensemble de contraintes définissant la forme. Ces contraintes sont des points de l'espace qu'on stipule explicitement comme étant sur la surface (le nuage de points à reconstruire), ou bien encore à l'intérieur ou à l'extérieur de l'objet. Cette méthode marche jusqu'à concurrence

de quelques centaines de points en entrée. On trouvera un tour d'horizon des approches les plus récentes dans [7].

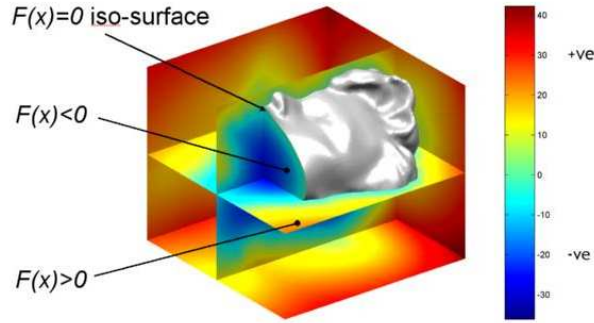


FIG. 5.12 – Exemple de la représentation de la surface par une fonction implicite (image extraite de [5]).

L'application de la reconstruction de surface à l'aide de notre représentation fréquentielle consiste à effectuer la création d'une iso-surface approximant le nuage de points (cf. la figure 5.12). Un algorithme de *Marching Cube* est ensuite appliqué pour mailler cette surface. Étant donné un nuage de points muni de normales, nous appliquons les étapes illustrées dans la figure 5.11. Une fonction implicite locale est associée à chaque morceau de la surface :

$$g_i(p) = f_i(\theta_i^{(p)}, \varphi_i^{(p)}) - r_i^{(p)} \quad (5.11)$$

où $(r_i^{(p)}, \theta_i^{(p)}, \varphi_i^{(p)})$ sont les coordonnées sphériques du point $p \in \mathbb{R}^3$ dans le système de coordonnées sphériques local et centré en c_i . La surface entière est donnée par l'iso-surface de la fonction G :

$$G(p) = \sum_i w_i(p) g_i(p) \quad (5.12)$$

où les poids w_i sont identiques à ceux présentés dans la section 5.1.2.2.

Les figures 5.13, 5.14 et 5.15 montrent un exemple de reconstruction d'une surface approximant un nuage de points munis de normales. Les valeurs différentes de la précision géométrique ϵ correspondent à des niveaux de détails sur l'objet. Les valeurs de ϵ sont prises comme un pourcentage par rapport à la boîte englobante du nuage de points.

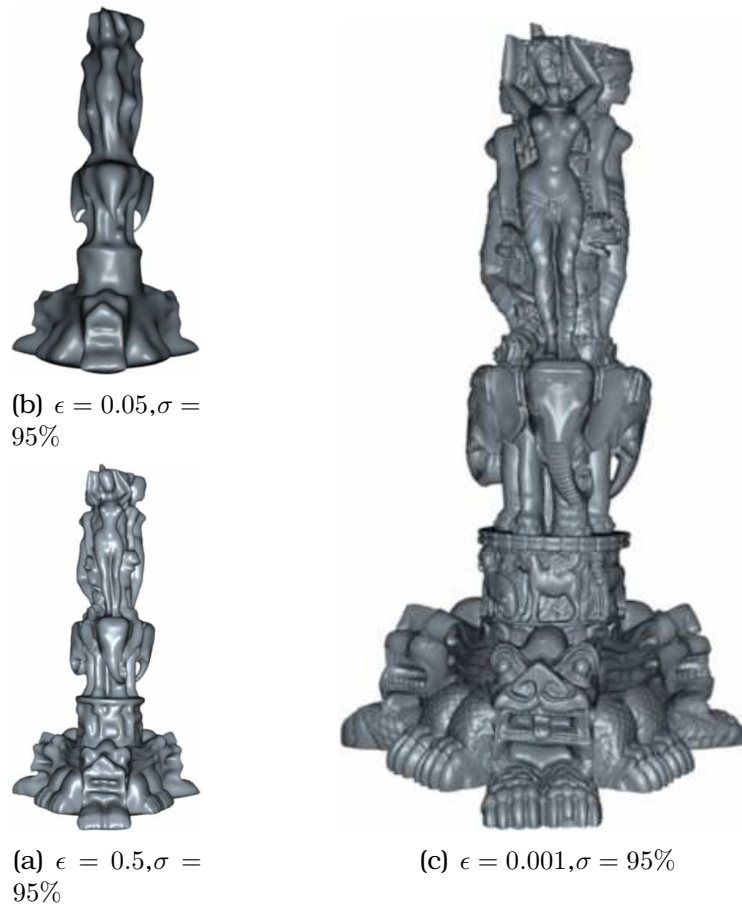


FIG. 5.13 – Le modèle de Thai à différents niveaux de détails, le modèle initial est donné comme un nuage de points orientés de taille 3000k points. Ces niveaux de détails correspondent à $\epsilon = 0.5, 0.05$ et 0.001 respectivement. Les valeurs de ϵ sont prises comme un pourcentage par rapport à la boîte englobante du nuage de points. Les valeurs de β sont (a) $\beta = 24$ (b) $\beta = 64$ (c) $\beta = 480$ ($\sigma = 95\%$).

5.3 Applications

La représentation fréquentielle d'objets 3D que nous avons proposée offre toute une variété d'applications. Nous l'avons appliquée à la reconnaissance de formes 3D, au filtrage de surfaces, à la reconstruction de surface, au transfert de texture géométrique et à la correction locale de surface. Dans les sous sections suivantes, nous monterons quelques exemples de ces applications.

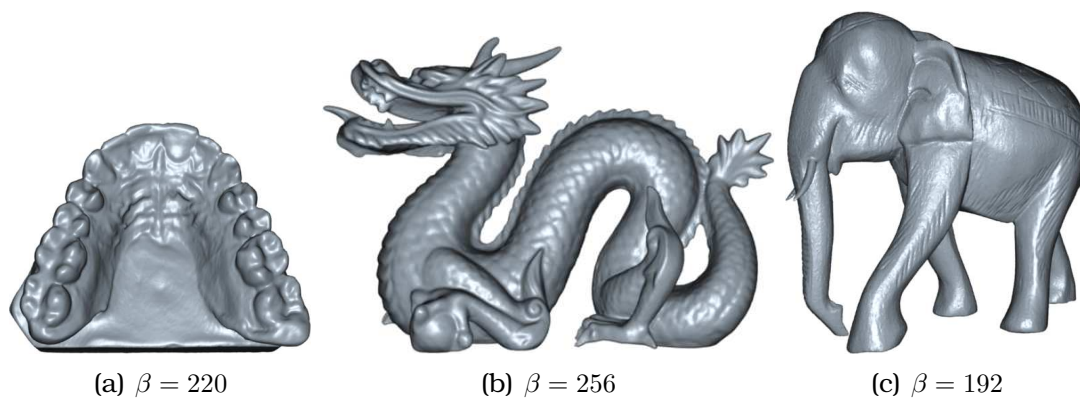


FIG. 5.14 – Reconstruction à l'aide des harmoniques sphériques ($\epsilon = 0.001$ et $\sigma = 95\%$) de nuages de points orientés.

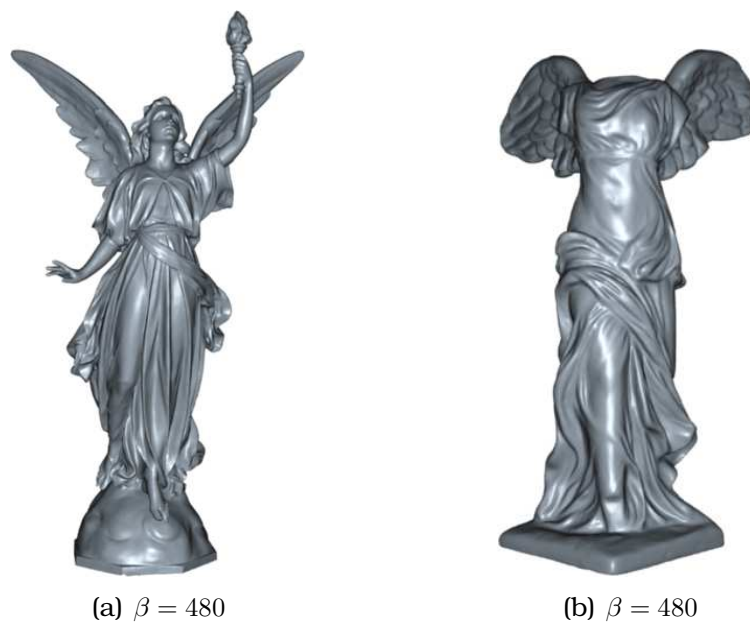


FIG. 5.15 – Reconstruction à l'aide des harmoniques sphériques ($\epsilon = 0.001$ et $\sigma = 95\%$) de nuages de points orientés.

5.3.1 Transfert de texture géométrique

Les textures géométriques nous permettent de rendre la granularité géométrique qui ne peut pas être rendue correctement en utilisant une technique simple de variation de couleur [22, 23]. Grâce à l'aspect fréquentiel de la représentation en harmoniques sphériques, les détails géométriques correspondent aux composants des hautes fréquences. Pour transférer des détails géométriques d'un patch sphérique vers un autre, il suffit d'identifier les coefficients de harmoniques sphériques correspondant à ces détails et de les ajouter à la représentation fréquentielle de la surface cible.

Étant donné un patch sphérique S contenant les détails géométriques, l'objectif est de transférer ces détails vers un autre patch U . Comme expliqué avant, les composants de hautes fréquences encodent ces détails géométriques. Le nombre de ces composants est un paramètre défini par l'utilisateur pour identifier le niveau de détails à extraire de la surface S .

Supposons que \mathbf{n}_s et \mathbf{n}_u sont les normales moyennes des surfaces S et U respectivement. Nous avons deux cas ; le premier est quand \mathbf{n}_s et \mathbf{n}_u ont la même direction et la deuxième quand ils ont deux directions différentes. Dans le premier cas, le transfert de texture est simplement l'ajout des coefficients des hautes fréquences de S aux leur correspondants dans U . Dans le deuxième cas, l'ajout de coefficients plonge les détails géométrique en dehors de la surface U . Pour résoudre ce problème, les deux surfaces S et U se sont aligner pour que les deux directions de \mathbf{n}_s et \mathbf{n}_u coïncident. En effet, la rotation d'une fonction représenté en harmoniques sphériques peut être effectuée efficacement grâce à l'algorithme proposé par Krivánek et al. [54]. Au contraire des techniques de transfert de texture géométrique à partir d'un exemple [55, 12], notre approche n'exige pas une création d'un ensemble de champs vectoriel sur la surface. Cependant, notre approche restreint le transfert aux texture paramétrisable sur la sphère. Ainsi, certains types de texture , l'épine par exemple, ne peuvent pas être transférés par ce schéma. La figure 5.16 montre un exemple du transfert de texture géométrique du dos d'Armadillo au dos de Bunny par les harmoniques sphériques. La figure 5.17 montre le recouvrement par un texture définie régulièrement sur la sphère.

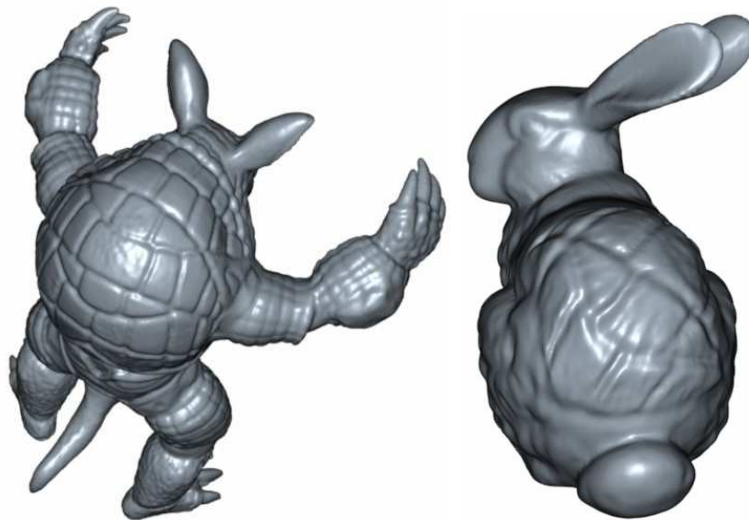


FIG. 5.16 – Transfert de texture géométrique à l'aide des harmoniques sphériques.

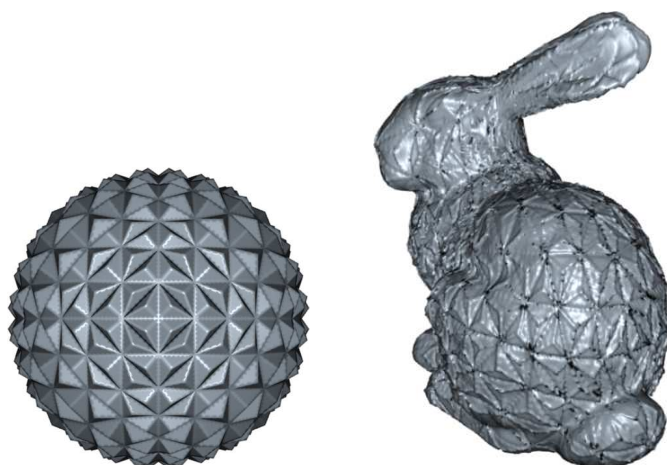


FIG. 5.17 – Transfert de texture géométrique à l'aide des harmoniques sphériques.

5.3.2 Correction locale de surface

À l'étape d'acquisition d'objets 3D, les scanners 3D introduisent localement dans les données du bruit de numérisation dont l'amplitude dépend de leur précision. L'édition locale des surfaces 3D est très utile dans ce cas. Les opérations de l'édition des surfaces exigent dans la mesure de possible de préserver les détails géométriques de la surface. Nous arguons du fait que les détails géométriques sont une propriété intrinsèque de la surface et que, par conséquent, l'édition des surfaces est mieux effectuée par le fonctionnement d'une représentation intrinsèque de la surface.

Grâce au calcul local des harmoniques sphériques, nous pouvons réparer les discontinuités trouvées sur les surfaces 3D par élimination des composants des hautes fréquence dans la représentation fréquentielle du patch contenant cette discontinuité. Ceci n'affecte les détails géométriques appartenant aux autres patches. La figure 5.18 montre un exemple de la réparation de la discontinuité trouvée sur la figure de Igea. Cette opération n'est pas équi-

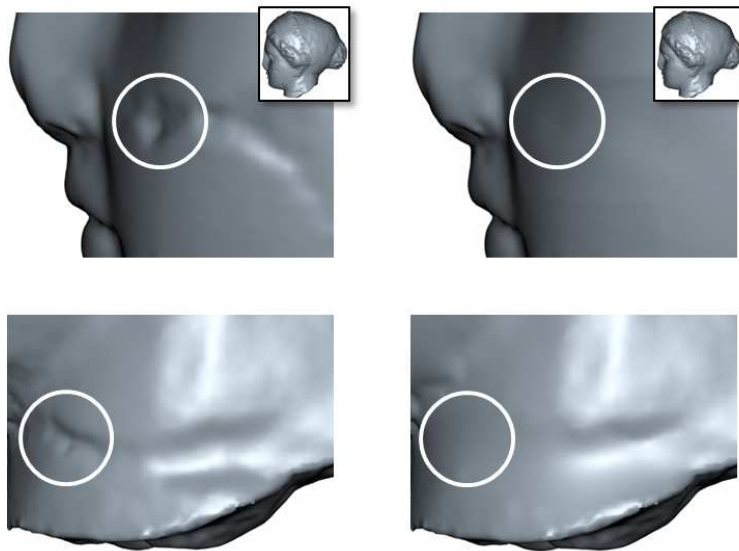


FIG. 5.18 – Réparation de la discontinuité trouvée sur la figure de Igea.

valente au filtrage du modèle. En fait, le filtrage d'un modèle affecte toute la surface de ce modèle alors que dans notre cas l'effet est local et tous les autres détails géométriques sont préservés.

5.3.3 Compression

Les représentations fréquentielles de surfaces peuvent être utilisées pour la compression et la transmission progressive des modèles 3D. En effet, les composants correspondant aux basses fréquences reflètent la forme générale de l'objet alors que les hautes fréquences correspondent aux détails géométriques. En fait, le taux de compression dépend également du nombre de parties segmentant l'objet. Le tableau 5.1 montre les taux de compression des modèles présentés dans les figures 5.9 et 5.10. Le taux de compression est calculé comme le rapport entre la taille de l'objet obtenu à la taille de l'objet d'entrée. Nous pouvons remarquer que ce taux est moins fort quand l'objet est segmenté en un grand nombre de parties. L'information de stockage présentée

| Modèle | # Points | #T | # Parties | % | $\max \beta$ |
|-------------------|----------|-----------|-----------|-----|--------------|
| Bunny | 35,947 | 69,451 | 20 | 31% | 160 |
| Dinosaure | 56,194 | 112,384 | 70 | 69% | 350 |
| Tyra | 100,000 | 200,000 | 50 | 27% | 320 |
| Phlegmatic Dragon | 240,057 | 480,076 | 50 | 23% | 256 |
| Armadillo | 172,974 | 345,944 | 50 | 16% | 320 |
| Happy Buddha | 543,652 | 1,087,716 | 50 | 11% | 450 |

TAB. 5.1 – Le taux de compression correspondant à $\epsilon = 0.001$ et $\sigma = 95\%$.

dans ce tableau est brute. Pour avoir des véritables taux de compression, nous pouvons utiliser des algorithmes exploitant la redondance de l'information.

Chapitre 6

Conclusions et Perspectives

Dans cette thèse, nous avons apporté des contributions théoriques aux représentations d'objets 3D utilisant les harmoniques sphériques. Ces représentations peuvent s'appuyer sur deux types de fonctions représentant l'objet. La première correspond à la fonction indicatrice de l'intersection d'un objet avec une sphère alors que la deuxième est la fonction mesurant la distance radiale des points d'un maillage étoilé. Étant donné un objet 3D, nous nous sommes focalisés sur le calcul des coefficients des harmoniques sphériques directement sur le maillage de l'objet, sans voxelisation de l'espace dans lequel est plongé l'objet. Dans le cas de la fonction décrivant la distance au centre des points d'un maillage étoilé, nous avons abordé deux techniques pour calculer ces coefficients. Le point commun de ces deux techniques est que les coefficients intervenant dans le développement de ces fonctions en harmoniques sphériques sont calculés directement à partir de la description du maillage.

Dans la première technique, nous avons proposé un mode de calcul direct sur les triangles du maillage. Ceci nous donne plus de contrôle sur la tolérance de l'évaluation. De plus, le temps de calcul est linéairement dépendant par rapport au nombre de triangles dans le maillage. Dans la deuxième technique, nous sommes allés plus loin dans cette évaluation pour montrer que le calcul des coefficients peut se faire sur les arêtes du maillages au lieu des triangles ce qui permet de passer à des évaluations unidimensionnelles. Pour ce faire, nous avons exploité le théorème de Curl. Un tel mode de calcul présente plusieurs avantages :

- * **Évaluation efficace.** L'évaluation des coefficients des harmoniques sphériques est distribuée sur les arêtes grâce au théorème du Curl qui

permet de réduire les évaluations sur les triangles à des évaluations sur les arêtes.

- ★ **Contrôle d'erreur.** L'évaluation des coefficients des harmoniques sphériques est faite par une méthode de Monte Carlo qui génère un ensemble de points aléatoires distribués uniformément sur les arêtes. La tolérance d'évaluation de chaque coefficient est directement liée au nombre de points générés sur chaque arête. De plus, lorsque la transformée en harmoniques sphériques est utilisée pour le filtrage, le contrôle sur l'approximation géométrique globale se fait à l'aide d'une fonction distance adhoc qui permet de calculer les coefficients progressivement jusqu'à une bande passante appropriée.
- ★ **Calcul local.** Le calcul est fait localement et directement sur la description surfacique de l'objet sans voxelisation et paramétrisation sphérique. Ceci peut être intéressant pour un portage sur carte graphique de ces calculs.

Par la suite, nous nous sommes intéressés à appliquer cette méthode sur des objets non étoilés. Il s'agit de proposer une généralisation de cette méthode en décomposant ces objets 3D en un ou plusieurs sous domaines sphériques. En particulier, les objets de genre zéro sont homomorphiques à une sphère. Ils peuvent donc être paramétrisés sur une sphère en appliquant un algorithme de paramétrisation sphérique à leur maillage triangulaire. Les calculs des harmoniques sphériques sont ensuite appliqués à la fonction sphérique définie sur cette paramétrisation. Autrement, les objets de genre non nul sont tout d'abord segmentés en un ensemble de sous objets étoilés. Les calculs des harmoniques sphériques sont ainsi appliqués localement sur ces sous objets. Finalement, les représentations locales en harmoniques sphériques sont fusionnées dans le cadre de surfaces implicites pour une recombinaison de l'objet 3D.

La représentation fréquentielle d'objets 3D en harmoniques sphériques figure dans une variété d'applications. Dans le cadre de nos travaux, nous l'avons appliqué à la reconnaissance de formes 3D, au filtrage de surface, au transfert de texture géométrique, au traitement local de surfaces, à la compression géométrique et à la reconstruction de surface à partir d'un nuage de points.

L'approche que nous avons présentée dans cette thèse présente cependant

des limites qui touchent sa performance et son efficacité :

- **Connaissance de la normale.** L'évaluation des coefficients des harmoniques sphériques sur les arêtes du maillage nécessite la connaissance de la normale à la surface. Ceci restreint l'applicabilité de l'approche aux surfaces, ou nuages de points, munis de normales.
- **La discrétisation sur les arêtes.** Même si le calcul des coefficients des harmoniques sphériques est réduit à des évaluations sur les arêtes sans voxelisation globale, ces coefficients sont évalués par une discrétisation local sur les arêtes. Nous voudrions ainsi éviter complètement la discrétisation sur les arêtes. De plus, nous voudrions étendre ce calcul au cas de la fonction indicatrice.
- **Segmentation surfacique et l'opérateur de mélange.** La segmentation surfacique décompose l'objet en un grand nombre de morceaux surfaciques. Ceci entraîne ensuite la nécessité de recomposer les morceaux en utilisant un cadre qui ne respecte pas forcément les soucis de décomposition fréquentielle. En effet, la fusion des morceaux locaux de l'objet segmenté est faite à l'aide de l'application de l'opérateur de mélange à leur représentation fréquentielle. L'opérateur de mélange est appliqué dans le domaine spatial alors que les objets sont représentés dans le domaine fréquentiel. Ainsi, nous n'avons pas une forme fréquentielle globale de l'objet. Nous avons donc besoin d'un opérateur de mélange fréquentielle.
- **Le transfert de texture.** Le transfert de texture géométriques par les harmoniques sphériques restreint l'application aux détails géométriques qui peuvent être plongés sur une sphère. Par exemple, "les épines" ne peuvent pas être transférés par cette méthode.

Enfin, avant de conclure cette thèse, quelques questions méritent de faire l'objet de futurs travaux.

- **La segmentation.** Les objets non étoilés ont été segmentés en des parties étoilées. Cependant, cette segmentation ne garantit pas un nombre raisonnable de sous parties. Nous cherchons une méthode de segmentation qui puisse produire un nombre raisonnable de sous parties. Cette méthode nous permettra d'exploiter l'aspect de compression de la représentation fréquentielle.
- **Le Laplacien.** Il est possible de considérer le Laplacien comme base de

la décomposition fréquentielle grâce à la propriété d'orthogonalité de ses fonctions propres. Nous voudrions exploiter notre mode de calcul sur cet opérateur pour avoir d'une part des fonctions de base adaptée à la géométrie et à la connectivité de l'objet, et plus de contrôle sur la représentation de l'objet d'autre part.

D'autres questions intéressantes concernent l'extension de notre mode de calcul à d'autres représentations fréquentielles, comme les ondelettes par exemple.

Annexe A

La base des harmoniques sphériques

L'équation de Laplace dans le système de coordonnées sphériques est exprimé comme suit :

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (\text{A.1})$$

On suppose que la solution présente des variables séparées : $f(r, \theta, \varphi) = \mathbf{R}(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$. L'équation devient donc :

$$\frac{1}{r^2} \frac{1}{\mathbf{R}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{1}{\Theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (\text{A.2})$$

La première partie est indépendante de θ et φ , la seconde partie est indépendante de r . Chaque terme doit donc être égal à une constante sans dimension dont la somme pourra s'annuler. Pour le premier membre :

$$\frac{1}{\mathbf{R}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial r} \right) = l(l+1) \implies \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial r} \right) = l(l+1)\mathbf{R}$$

En cherchant des fonctions polynomes du type : $\mathbf{R} = r^a$, on trouve pour la solution :

$$\mathbf{R} = l(l+1)(r^l + r^{-(l+1)}) \quad (\text{A.3})$$

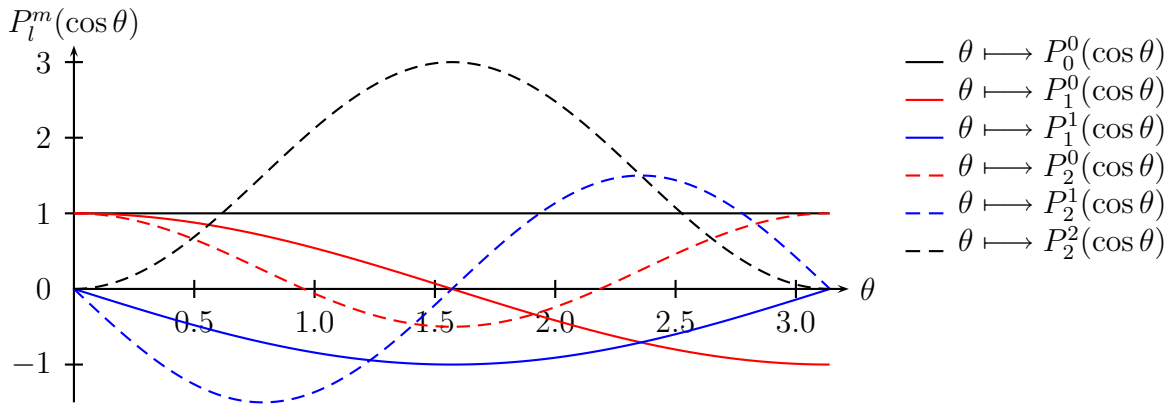


FIG. A.1 – Le polynôme de Legendre associé P_l^m . Le nombre de passage par zéro d'un polynôme de degré l et d'ordre m est exactement $l - m$.

pour le troisième membre :

$$\frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = -m^2 \implies \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = -m^2 \Phi$$

En cherchant des fonctions trigonométriques du type : $\Phi = e^{\alpha \varphi}$, on trouve pour la solution :

$$\Phi(\varphi) = e^{im\varphi} \quad (\text{A.4})$$

En remplaçant \mathbf{R} et Φ , l'équation du Laplacien devient une équation en θ seulement, que l'on peut écrire :

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right) + \left(l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) \Theta = 0$$

Avec $x = \cos \theta$, on obtient :

$$(1-x^2) \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} - 2x \frac{\partial \Theta}{\partial x} + \left(l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right) \Theta = 0$$

Les fonctions solutions de cette équation sont les polynômes de Legendre $P_l^m(\cos \theta)$, qui n'existent que pour des valeurs entières et positive de l et des valeurs entières de m entre $-l$ et $+l$ (cf. la figure A.1). La solution de l'équation de Laplace est donc :

$$f(r, \theta, \varphi) = \mathbf{R} P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi}$$

La partie angulaire de cette solution est appelé les harmoniques sphériques $Y_l^m(\theta, \varphi)$.

Bibliographie

- [1] CGAL, Computational Geometry Algorithms Library.
<http://www.cgal.org>.
- [2] GSL, GNU Scientific Library. <http://www.gnu.org/software/gsl/>.
- [3] GTS, GNU Triangulated Surface library.
<http://gts.sourceforge.net/>.
- [4] <http://amp.ece.cmu.edu/projects/3DModelRetrieval/>.
- [5] <http://aranz.com/research/modelling/theory/surfacefaq.html>.
- [6] M. Alexa. Merging polyhedral shapes with scattered features. In *SMI '99 : Proceedings of the International Conference on Shape Modeling and Applications*, page 202, 1999.
- [7] Rémi Allègre. *Contributions à l'introduction de flexibilité dans la reconstruction et l'édition de modèles 3D*. Thèse de doctorat en informatique, Université Claude Bernard Lyon 1, December 2006.
- [8] C. Andújar. Geometry simplification. Technical report, Universitat Politècnica de Catalunya, Spain, 1999.
- [9] T. Annen, J. Kautz, F. Durand, and H.-P. Seidel. Spherical harmonic gradients for mid-range illumination. In *Proceeding of Rendering Eurographics Symposium*. Eurographics Association, 2004.
- [10] F. Banse, J.L. Dekeyser, and R. Fauquembergue. Parallélisation d'une méthode de monte carlo pour la simulation de composants semi-conducteurs. Technical Report 1999-06, LIFL, 1999.
- [11] H. Behnke, F. Bachmann, K. Fladt, and H. Kunle. *Fundamentals of Mathematics*, volume 2 : Geometry. Cambridge, MA : MIT Press, 1974.
- [12] P. Bhat, S. Ingram, and G. Turk. Geometric texture synthesis by example. In *SGP '04 : Proceedings of the 2004 Eurographics/ACM SIG-*

- GRAPH symposium on Geometry processing*, pages 41–44, New York, NY, USA, 2004. ACM Press.
- [13] T. Blow. Spherical diffusion for 3d surface smoothing. In *3DPVT'02 : the first International Symposium on 3D Data Processing Visualization and Transmission*, page 449, Padova, Italy, 2002.
- [14] T. Boubekur, P. Reuter, and C. Schlick. Visualization of point-based surfaces with locally reconstructed subdivision surfaces. In *Shape Modeling International*. IEEE Computer Society Press, June 2005.
- [15] W. E. Byerly. *Spherical Harmonics*, chapter 6, pages 195–218. New York : Dover, 1959. An Elementary Treatise on Fourier's Series, and Spherical, Cylindrical, and Ellipsoidal Harmonics, with Applications to Problems in Mathematical Physics.
- [16] M. Charnay and O. Mazet. Méthode de monte carlo. Technical report, Centre de Mathématiques, INSA de Lyon, 2004.
- [17] H. Homer Chen and S. Thomas Huang. A survey of construction and manipulation of octrees. *Comput. Vision Graph. Image Process.*, 43(3) :409–431, 1988.
- [18] J. W. Cooley and J. W. Tukey. An algorithm for the machine calculation of complex fourier series. *Math. Comput.*, 19 :297–301, 1965.
- [19] P. R. Cromwell. *Polyhedra*. Cambridge University Press, New York, 1997.
- [20] M. Desbrun, M. Meyer, P. Schröder, and A. H. Barr. Implicit fairing of irregular meshes using diffusion and curvature flow. In *SIGGRAPH '99 : Proceedings of the 26th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, pages 317–324, New York, NY, USA, 1999. ACM Press/Addison-Wesley Publishing Co.
- [21] T. K. Dey, J. Giesen, and S. Goswami. Shape segmentation and matching with flow discretization. In F. Dehne, J.-R. Sack, and M. Smid, editors, *WADS '03 : Proceedings of the 8th International Workshop on Algorithms and Data Structures*, number 2748 in LNCS, pages 25–36, Carleton Univ., Ottawa, Canada, July-August 2003. Springer Verlag.
- [22] J-M Dischler and D. Ghazanfarpour. A geometrical based method for highly complex structured textures generation. *Comput. Graph. Forum*, 14(4) :203–216, 1995.

-
- [23] J. M. Dischler and D. Ghazanfarpour. A survey of 3d texturing. *Computers & Graphics*, 25(1), 2001.
- [24] M. Eck, T. DeRose, T. Duchamp, H. Hoppe, M. Lounsbery, and W. Stuetzle. Multiresolution analysis of arbitrary meshes. In *SIGGRAPH '95 : Proceedings of the 22nd annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, pages 173–182, New York, NY, USA, 1995. ACM Press.
- [25] H. Edelsbrunner, D. Letscher, and A. Zomorodian. Topological persistence and simplification. In *FOCS '00 : Proceedings of the 41st Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, page 454, Washington, DC, USA, 2000. IEEE Computer Society.
- [26] M. S. Floater. Parametrization and smooth approximation of surface triangulations. *Computer Aided Geometric Design*, 14(3) :231–250, 1997.
- [27] M. S. Floater and K. Hormann. Surface parameterization : a tutorial and survey. In N. A. Dodgson, M. S. Floater, and M. A. Sabin, editors, *Advances in Multiresolution for Geometric Modelling*, Mathematics and Visualization, pages 157–186. Springer, Berlin, Heidelberg, 2005.
- [28] T. Funkhouser, P. Min, M. Kazhdan, J. Chen, A. Halderman, D. Dobkin, and D. Jacobs. A search engine for 3d models. *ACM Transactions on Graphics*, 22(1) :83–105, 2003.
- [29] R. C. Gonzalez and R. E. Woods. *Digital Image Processing*. Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc., Boston, MA, USA, 1993.
- [30] C. Gotsman. On graph partitioning, spectral analysis, and digital mesh processing. In *SMI '03 : Proceedings of the Shape Modeling International 2003*, page 165, Washington, DC, USA, 2003. IEEE Computer Society.
- [31] C. Gotsman, X. Gu, and A. Sheffer. Fundamentals of spherical parameterization for 3D meshes. *ACM Trans. Graph.*, 22(3) :358–363, 2003.
- [32] R. Green. Spherical harmonic lighting : The gritty details. In *Game Developers Conference*, March 2003.
- [33] X. Gu, S. J. Gortler, and H. Hoppe. Geometry images. In *SIGGRAPH '02 : Proceedings of the 29th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, pages 355–361, New York, NY, USA, 2002. ACM Press.

- [34] I. Guskov, W. Sweldens, and P. Schröder. Multiresolution signal processing for meshes. In *SIGGRAPH '99 : Proceedings of the 26th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, pages 325–334, New York, NY, USA, 1999. ACM Press/Addison-Wesley Publishing Co.
- [35] S. Haker, S. Angenent, A. Tannenbaum, R. Kikinis, G. Sapiro, and M. Halle. Conformal surface parameterization for texture mapping. *IEEE Trans. Vis. Comput. Graph.*, 6(2) :181–189, 2000.
- [36] D.M. Healy, D.N. Rockmore, P.J. Kostelec, and S. Moore. FFTs for the 2-sphere-improvements and variations. *Fourier Analysis and Applications*, 9(4) :341–385, Jul 2003.
- [37] E. W. Hobson. *The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics*. New York : Chelsea, 1955.
- [38] H. Hoppe. Progressive meshes. In *SIGGRAPH '96 : Proceedings of the 23rd annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, pages 99–108, New York, NY, USA, 1996.
- [39] H Hoppe, T DeRose, T Duchamp, J McDonald, and W Stuetzle. Surface reconstruction from unorganized points. In *SIGGRAPH '92*, pages 71–78, New York, NY, USA, 1992. ACM Press.
- [40] H. Hoppe and E. Praun. Shape compression using spherical geometry images. In N. Dodgson, M. Floater, and M. Sabin, editors, *Advances in Multiresolution for Geometric Modelling*, pages 27–46. Springer-Verlag, 2003.
- [41] B. K. P. Horn. Extended gaussian images. *Proceedings of the IEEE*, 72 :1671–1686, 1984.
- [42] M. Isenburg and P. Lindstrom. Streaming meshes. *VIS'05 : IEEE Visualization*, pages 231–238, 2005.
- [43] J. Jin, M. Dai, H. Bao, and Q. Peng. Watermarking on 3d mesh based on spherical wavelet transform. *Journal of Zhejiang University Science*, 5(3) :251–258, 2004.
- [44] T. Kanai, H. Suzuki, and F. Kimura. Metamorphosis of arbitrary triangular meshes. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 20(2) :62–75, 2000.

-
- [45] S. B. Kang and K. Ikeuchi. The complex EGI : A new representation for 3D pose determination. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 15(7) :707–721, 1993.
- [46] Z. Karni and C. Gotsman. Spectral compression of mesh geometry. In *SIGGRAPH '00 : Proceedings of the 27th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, pages 279–286, New York, NY, USA, 2000. ACM Press/Addison-Wesley Publishing Co.
- [47] Z. Karni and C. Gotsman. 3d mesh compression using fixed spectral bases. In *GRIN'01 : No description on Graphics interface 2001*, pages 1–8, Toronto, Ont., Canada, Canada, 2001. Canadian Information Processing Society.
- [48] J. Kautz, P. P. Sloan, and J. Snyder. Fast, arbitrary brdf shading for low-frequency lighting using spherical harmonics. In *EGRW '02 : Proceedings of the 13th Eurographics workshop on Rendering*, pages 291–296. Eurographics Association, 2002.
- [49] M Kazhdan. Reconstruction of solid models from oriented point sets. In *Eurographics Symposium on Geometry Processing 2005*, pages 73–82, 2005.
- [50] M. Kazhdan, T. Funkhouser, and S. Rusinkiewicz. Rotation invariant spherical harmonic representation of 3d shape descriptors. In *SGP '03 : Proceedings of the Eurographics/ACM SIGGRAPH symposium on Geometry processing*, pages 156–164. Eurographics Association, 2003.
- [51] M. Kazhdan, T. Funkhouser, and S. Rusinkiewicz. Symmetry descriptors and 3d shape matching. In *SGP '04 : Symposium on Geometry Processing*, pages 116–125, July 2004.
- [52] Y. Kitamura and F. Kishino. A parallel algorithm for octree generation from polyhedral shape representation. In *Proceedings of the 13th International Conference on Pattern Recognition*, volume 3, pages 303–309, 1996.
- [53] L. Kobbelt, J. Vorsatz, U. Labsik, and H. P. Seidel. A shrink wrapping approach to remeshing polygonal surfaces. *Computer Graphics Forum*, 18(3) :119–130, 1999.
- [54] J. Křivánek, J. Konttinen, K. Bouatouch, S. Pattanaik, and J. Žára. Fast approximation to spherical harmonic rotation. In *SCCG '06 : Proceedings*

- of the 22nd spring conference on Computer graphics*, New York, NY, USA, 2006. ACM Press.
- [55] Y.-K. Lai, S.-M. Hu, D. X. Gu, and R. R. Martin. Geometric texture synthesis and transfer via geometry images. In *SPM '05 : Proceedings of the 2005 ACM symposium on Solid and physical modeling*, pages 15–26, New York, NY, USA, 2005. ACM Press.
- [56] A. Lee, W. Sweldens, P. Schröder, L. Cowsar, and D. Dobkin. MAPS : Multiresolution adaptive parameterization of surfaces. In *SIGGRAPH '98*, pages 95–104, 1998.
- [57] Y. T. Lee and A. A. G. Requicha. Algorithms for computing the volume and other integral properties of solids. ii. a family of algorithms based on representation conversion and cellular approximation. *Commun. ACM*, 25(9) :642–650, 1982.
- [58] S. Lein and J. Kajiya. A symbolic method for calculating the integral properties of arbitrary nonconvex polyhedra. *IEEE, Computer Graphics and Application*, 4(9) :35–41, 1984.
- [59] B. Levy. Laplace-beltrami eigenfunctions : Towards an algorithm that understands geometry. In *IEEE International Conference on Shape Modeling and Applications*, 2006.
- [60] T. Lewiner, H. Lopes, A. Wilson Vieira, and G. Tavares. Efficient implementation of marching cubes cases with topological guarantees. *JGT (Journal of graphics tools)*, 8(2) :1–15, 2003.
- [61] Jyh-Ming Lien and Nancy M. Amato. Approximate convex decomposition. In *SCG '04 : Proceedings of the twentieth annual symposium on Computational geometry*, pages 457–458, New York, NY, USA, 2004. ACM Press.
- [62] S. L. Lien and J. T. Kajiya. A symbolic method for calculating the integral properties of arbitrary nonconvex polyhedra. *IEEE Computer Graphics and Applications*, pages 43–51, 1984.
- [63] S.L.C. Lien. *Combining Computation with Geometry*. PhD thesis, California Institute of Technology, 1984.
- [64] W. E. Lorensen and H. E. Cline. Marching cubes : A high resolution 3d surface construction algorithm. In *SIGGRAPH '87 : Proceedings of the*

-
- 14th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, pages 163–169, New York, NY, USA, 1987. ACM Press.
- [65] M. Lounsbery, T.D. DeRose, and J. Warren. Multiresolution analysis for surfaces of arbitrary topological type. *ACM Trans. Graph.*, 16(1) :34–73, 1997.
- [66] B. Lévy, S. Petitjean, N. Ray, and J. Maillot. Least squares conformal maps for automatic texture atlas generation. *ACM Transaction on Graphics*, 21(3) :362–371, 2002.
- [67] M. Mohlenkamp. *A Fast Transform for Spherical Harmonics*. PhD thesis, Yale University, New Haven CT, May 1997.
- [68] M. Mousa, R. Chaine, and S. Akkouche. Frequency-based representation of 3d models using spherical harmonics. In *WSCG'06 : Proceedings of the 14th International Conference in Central Europe on Computer Graphics, Visualization and Computer Vision*, volume 14, pages 193–200, Plzen, Czech Republic, January 30 - February 3 2006.
- [69] M. Novotni and R. Klein. 3d zernike descriptors for content based shape retrieval. In *SM '03 : Proceedings of the eighth ACM symposium on Solid modeling and applications*, pages 216–225. ACM Press, 2003.
- [70] Y. Ohtake, A. Belyaev, M. Alexa, G. Turk, and H.P. Seidel. Multi-level partition of unity implicits. *ACM Trans. Graph.*, 22(3) :463–470, 2003.
- [71] R. Osada, T. Funkhouser, B. Chazelle, and D. Dobkin. Matching 3d models with shape distributions. In *SMI '01 : Proceedings of the International Conference on Shape Modeling & Applications*, page 154. IEEE Computer Society, May 2001.
- [72] E. Paquet and M. Rioux. A content-based search engine for VRML databases. *Computer Vision and Pattern Recognition, 1998. Proceedings.*, pages 541–546, 1998.
- [73] A. Pasko and V. Savchenko. Blending operations for the functionally based constructive geometry. In *CSG 94 : Set-theoretic solid modelling—Techniques and Applications*, pages 151–161, Winchester, UK, April 1994.
- [74] A. Pasko and V. Savchenko. Constructing functionally defined surfaces. In B. Wyvill and M. P. Gascuel, editors, *Implicit Surfaces '95 :*

- The first international workshop on implicit surfaces*, pages 97–106, Grenoble, France, April 18–19 1995.
- [75] M. Pauly and M. Gross. Spectral processing of point-sampled geometry. In *SIGGRAPH '01 : Proceedings of the 28th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, pages 379–386, New York, NY, USA, 2001. ACM Press.
- [76] E. Praun and H. Hoppe. Spherical parametrization and remeshing. *ACM Transaction on Graphics*, 22(3) :340–349, 2003.
- [77] F. P. Preparata and M. I. Shamos. *Computational geometry : an introduction*. Springer-Verlag New York, Inc., New York, NY, USA, 1985.
- [78] A. P. Reeves, R. J. Prokop, S. E. Andrews, and F. P. Kuhl. Three-dimensional shape analysis using moments and fourier descriptors. *IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 10(6) :937–943, Novembre 1988.
- [79] A. G. Requicha. Representations for rigid solids : Theory, methods, and systems. *ACM Comput. Surv.*, 12(4) :437–464, 1980.
- [80] V. L. Rvachev. *Theory of R-functions and some applications*. Naukova Dumka, Kiev, 1987. (in Russian).
- [81] S. Saba, I. Yavneh, C. Gotsman, and A. Sheffer. Practical spherical embedding of manifold triangle meshes. In *SMI '05 : Proceedings of Shape Modeling International*, MIT, USA, June 2005.
- [82] YU. Safarov. Functions of the laplace-beltrami operator. *Journées équations aux dérivées partielles*, pages 1–8, May 1996.
- [83] D. Saupe and D. V. Vranic. 3d model retrieval with spherical harmonics and moments. In *Proceedings of the 23rd DAGM-Symposium on Pattern Recognition*, pages 392–397. Springer-Verlag, September 2001.
- [84] P. Schröder and W. Sweldens. Spherical wavelets : efficiently representing functions on the sphere. In *SIGGRAPH '95 : Proceedings of the 22nd annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, pages 161–172. ACM Press, 1995.
- [85] A. Shapiro and A. Tal. Polyhedron realization for shape transformation. *The Visual Computer*, 14(8/9) :429–444, 1998.

-
- [86] A. Sheffer, C. Gotsman, and N. Dyn. Robust spherical parameterization of triangular meshes. In *Proceeding of 4th Israel-Korea Binational Workshop on Computer Graphics and Geometric Modeling*, pages 94–99, Tel Aviv, 2003.
- [87] A. Sheffer, E. Praun, and K. Rose. Mesh parameterization methods and their applications. *Foundation and Trends in Computer Graphics and Vision*, 2(2) :105–171, 2006.
- [88] O. Sorkine. Differential representations for mesh processing. *Computer Graphics Forum*, 25(4), 2006.
- [89] O. Sorkine and D. Cohen-Or. Least-squares meshes. In *Proceedings of Shape Modeling International*, pages 191–199. IEEE Computer Society Press, 2004.
- [90] O. Sorkine, D. Cohen-Or, D. Irony, and S. Toledo. Geometry-aware bases for shape approximation. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 11(2) :171–180, 2005.
- [91] O. Sorkine, D. Cohen-Or, Y. Lipman, M. Alexa, C. Rössl, and H.-P. Seidel. Laplacian surface editing. In *SGP '04 : Proceedings of the 2004 Eurographics/ACM SIGGRAPH symposium on Geometry processing*, pages 175–184, New York, NY, USA, 2004. ACM Press.
- [92] R. Suda and M. Takami. A fast spherical harmonics transform algorithm. *Math. Comput.*, 71(238) :703–715, 2002.
- [93] W. Sweldens. The lifting scheme : A construction of second generation wavelets. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 29(2) :511–546, 1998.
- [94] W. Sweldens and P. Schröder. Digital geometric signal processing, course notes 50. In *SIGGRAPH 2001 Conference Proceedings*, 2001.
- [95] G. Taubin. Geometric signal processing on polygonal meshes. In *EUROGRAPHICS 2000*, 2000.
- [96] Gabriel Taubin. A signal processing approach to fair surface design. In *SIGGRAPH '95 : Proceedings of the 22nd annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, pages 351–358, New York, NY, USA, 1995. ACM Press.
- [97] I. Tomic and P. Frossard. FST-based reconstruction of 3d-models from non-uniformly sampled datasets on the sphere. In *Proceedings of the Picture Coding Symposium*, April 2006.

- [98] T.Tung and F.Schmitt. Indexation de modèles 3d par graphe de reeb multirésolution augmenté. *Annales des télécommunications - Annals of telecommunications, Technologies et outils pour les images 3D*, 60(11-12) :1309–1336, 2005.
- [99] G. Turk and J.F. O'brien. Modelling with implicit surfaces that interpolate. *ACM Trans. Graph.*, 21(4) :855–873, 2002.
- [100] D. Vranic and D. Saupe. 3d shape descriptor based on 3d fourier transform. In K. Fazekas, editor, *Proceedings of the EURASIP Conference on Digital Signal Processing for Multimedia Communications and Services*, pages 271–274, September 2001.
- [101] D. V. Vranic and D. Saupe. Description of 3d-shape using a complex function on the sphere. In *ICME '02 : Proceedings of the IEEE International Conference on Multimedia and Expo*, pages 177–180, 2002.
- [102] L.Y. Wei and M. Levoy. Texture synthesis over arbitrary manifold surfaces. In *SIGGRAPH '01 : Proceedings of the 28th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, pages 355–360, New York, NY, USA, 2001. ACM Press.
- [103] Eric W. Weisstein. *Legendre Polynomial*. From MathWorld : A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/LegendrePolynomial.html>.
- [104] S. N. Yang and T. W. Lin. A new linear octree construction by filling algorithms. In *Proceedings of Computers and Communications Conference*, pages 740–746, Scottsdale, AZ, USA, 1991.
- [105] T. Zaharia and F. Prêteux. Indexation de maillages 3d par descripteurs de forme. In *Actes 13ème Congrès Francophone AFRIF-AFIA Reconnaissance des Formes et Intelligence Artificielle (RFIA'2002)*, pages 48–57, Angers, France, 2002.
- [106] T. Zaharia and F. Prêteux. 3d versus 2d/3d shape descriptors : A comparative study. In *Proceedings SPIE Conference on Image Processing : Algorithms and Systems III - IS&T / SPIE Symposium on Electronic Imaging, Science and Technology '04, San Jose, CA*, volume 5298, pages 47–58, January 2004.
- [107] C. Zhang and T. Chen. Efficient feature extraction for 2d/3d objects

- in mesh representation. In *ICIP '01 : Proceedings of the International Conference on Image Processing*, pages 935–938, October 2001.
- [108] D. S. Zhang and G. J. Lu. Shape retrieval using fourier descriptors. In *Proceeding of International Conference on Multimedia and Distance Education*, pages 1–9, Fargo, ND, USA, June 2001.
- [109] H. Zhang and O. van Kaick. Spectral methods for mesh processing and analysis. In *Eurographics 2007*, Prague, Czech Republic, 2007.
- [110] K. Zhou, H. Bao, and J. Shi. 3d surface filtering using spherical harmonics. *Computer-Aided Design*, 36(4) :363–375, 2004.

Publications

- [1] M. Mousa, R. Chaine, S. Akkouche, and E. Galin. Efficient spherical harmonics representation of 3D objects. In *PG'07 : Pacific Graphics conference*, Maui, USA, 2007.
- [2] M. Mousa, R. Chaine, and S. Akkouche. Frequency-based representation of 3D point-based surfaces using the spherical harmonics. In *ICCVG'06, International Conference on Computer Vision and Graphics*, Warsaw, Poland, 2006.
- [3] M. Mousa, R. Chaine, and S. Akkouche. Direct spherical harmonic transform of a triangulated mesh. *Journal of Graphics Tools*, 11 :17–26, 2006.
- [4] M. Mousa, R. Chaine, and S. Akkouche. Frequency-based representation of 3D models using spherical harmonics. In *WSCG'06 : the 14th International Conference in Central Europe on Computer Graphics, Visualization and Computer Vision*, volume 14, pages 193–200, Plzen, Czech Republic, January 30 - February 3 2006.
- [5] M. Mousa, R. Chaine, and S. Akkouche. Une représentation fréquentielle des modèles 3D utilisant les harmoniques sphériques. In *18ièmes journées de l'Association Française d'Informatique Graphique, 3ièmes journées de l'Association Chapitre Français d'Eurographics*, volume 18, pages 79–89, 2005.
- [6] M. Mousa, R. Chaine, and S. Akkouche. Direct spherical harmonic transform of a triangulated mesh. Technical Report RR-LIRIS-2005-015, LIRIS : Lyon Research Center for Images and Intelligent Information Systems, 2005.

Titre : Calcul efficace et direct des représentations de maillages 3D utilisant les harmoniques sphériques

Résumé Dans le domaine de l'informatique graphique, les harmoniques sphériques jouent un rôle important dans des applications aussi variées que l'illumination globale, le rendu, le filtrage de surface et la reconnaissance de forme. La transformée en harmoniques sphériques permet de réaliser l'analyse fréquentielle de fonctions définies sur une sphère. Nous nous intéressons ici au cas particulier des fonctions sphériques définissant un maillage (maillage d'une surface étoilée, BRDF linéaire par morceaux, fonction indicatrice de l'intersection entre un objet et une sphère 3D) et nous offrons un algorithme permettant de calculer les coefficients de la transformée en harmoniques sphériques directement à partir des triangles ou des arêtes composant le maillage. Cet algorithme s'accompagne d'une analyse permettant de contrôler la précision et l'erreur géométrique commise suite à des opérations de filtrage. On évite ainsi les problèmes d'erreur systématiques liés à une voxelisation régulière de l'espace dans lequel est plongée la forme 3D. Nous avons appliqué ces résultats dans une variété d'applications telles que le filtrage, le transfert de texture géométrique, la reconstruction de surface.

Title : Direct and efficient computation of representations of 3D meshes using the spherical harmonics

Abstract In the computer graphics community, the spherical harmonics play an important role in many fields such as rendering, global illumination, surface filtering and shape matching. The spherical harmonics transform allows the spectral analysis of functions defined on the sphere. We are interested in the case where the spherical functions define a mesh (star-shaped meshes, BRDF, indicator function of the intersection of an object and a sphere). We propose an algorithm which enables to calculate the coefficients of the spherical harmonics transform directly from the triangles or the edges of the mesh. This algorithm is accompanied with an analysis allowing the control of the geometric error precision resulting from the filtering operations. So we avoid the error problems relative to the regular voxelization of the space containing the 3D form. We have applied these results in a variety of application such as the filtering, the geometric texture transfer and the surface reconstruction.

Discipline Informatique

Adresse du laboratoire

Laboratoire LIRIS - UMR 5205

Université Claude Bernard – Lyon 1

Bâtiment Nautibus,

43 boulevard du 11 Novembre 1918

69622 VILLEURBANNE CEDEX